ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-TROISIÈME — ANNÉE 1946

(82e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1946

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΤΕΩΜΕΤΡΕΙ

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES

DU MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

AVEC LE CONCOURS

DES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Publication fondée en 1864 par L. PASTEUR
continuée de 1872 à 1882 par H. SAINTE-CLAIRE DEVILLE
de 1883 à 1888 par H. DEBRAY
de 1889 à 1900 par Ch. HERMITE
de 1901 à 1917 par G. DARBOUX
et de 1918 à 1941 par É. PICARD

TROISIÈME SÉRIE

TOME SOIXANTE-TROISIÈME — ANNÉE 1946

(82e VOLUME DE LA COLLECTION)

PARIS 1946

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR

KRAUS REPRINT
Nendeln/Liechtenstein
1971

Reprinted by permission of the original publishers

KRAUS REPRINT
A Division of
KRAUS-THOMSON ORGANIZATION LIMITED
Nendeln/Liechtenstein
1971

Printed in Germany
Lessingdruckerei Wiesbaden

ADMINISTRATION :

Directeur : M. PAUL MONTEL,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Trésorier : Mlle P. GAUTHIER-VILLARS.

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR UNE THÉORIE GÉNÉRALE
DE
LA RÉDUCTIBILITÉ DES ÉQUATIONS
ET
SYSTÈMES D'ÉQUATIONS FINIES OU DIFFÉRENTIELLES

PAR M. ERNEST VESSIOT.

Introduction.

Les deux Mémoires que j'ai publiés en 1941 et 1942, sur la réductibilité de certains systèmes de Lie et sur celle des équations algébriques (1), procèdent, en fait, d'une même théorie générale de la réductibilité des équations et systèmes d'équations, finies ou différentielles. Celle-ci redonne, et même, le cas échéant, dans des conditions plus larges (2), les généralisations de la théorie des équations algébriques de Galois déjà obtenues par diverses méthodes. Elle peut en donner de nouvelles. C'est cette théorie générale qui fait l'objet du présent Mémoire. Celui-ci comprend deux parties : La première est consacrée à un exposé succinct de la théorie; la seconde en donne trois applications importantes : elles concernent, en effet, respectivement, les systèmes de n équations différentielles ordinaires du 1er ordre à n inconnues, les équations

(1) *Annales sientifiques de l'École Normale Supérieure*, (3), t. 57, p. 1-60 et t. 58, p. 1-36. Ces deux Mémoires seront cités ici sous les rubriques respectives M_1 et M_2.

(2) *Cf.* M_1, Introduction, p. 1 et suiv.

différentielles ordinaires d'ordre n à une inconnue et les équations aux dérivées partielles du 1er ordre, à $n+1$ variables indépendantes et à une fonction inconnue.

La théorie générale en question concerne toute famille de systèmes, d'une ou plusieurs équations, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Chaque système $\mathcal{S}$ de la famille possède des solutions complètes, c'est-à-dire des familles de solutions telles que de chacune d'elles se déduisent, rationnellement, des formules aptes à représenter, par un choix approprié de certains éléments arbitraires, les diverses solutions particulières de $\mathcal{S}$. La résolution complète de $\mathcal{S}$ sera considérée, en conséquence, comme consistant à trouver une solution particulière quelconque du système S dont dépendront ces solutions complètes, et qui sera dit l'*associé* de $\mathcal{S}$.

2° La famille de systèmes considérée constitue une *classe* vis-à-vis d'une famille de transformations, dites *auxiliaires*, portant sur les inconnues et, le cas échéant, sur les variables indépendantes qui figurent dans ces systèmes. On supposera que cela a lieu de telle manière que, si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des solutions complètes quelconques de deux systèmes quelconques de la classe, distincts ou confondus, il existe une de ces transformations auxiliaires qui change $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$ et une seule. Il en résulte, en particulier, que chaque système $\mathcal{S}$ de la classe demeure invariant par certaines de ces transformations auxiliaires, qui seront dites ses *auto-transformations*, et l'on se bornera aux cas où celles-ci constituent un *groupe*, ou un *pseudo-groupe*, *modulo* $\mathcal{S}$ [3].

On appellera *réduit de la classe* le système $\mathcal{S}_0$ de la classe défini par la condition d'avoir une solution complète $\mathcal{F}_0$ arbitrairement choisie une fois pour toutes dans le domaine de rationalité $\mathcal{D}$ considéré. Résoudre un système $\mathcal{S}$ de la classe équivaudra alors à trouver une transformation auxiliaire qui change $\mathcal{S}$ en $\mathcal{S}_0$: c'est ce qu'on nommera une *transformation réductrice* de $\mathcal{S}$. Ces transformations réductrices jouent un rôle essentiel dans notre analyse de la notion de réductibilité, dont voici les points principaux.

Dans tout domaine de rationalité $\mathcal{D}$ un système $\mathcal{S}$ de la classe considérée sera dit *réductible* si son associé S est réductible au sens de J. Drach, c'est-à-dire si un sous-système Σ de S est rationnel; et le mode spécial de réductibilité de $\mathcal{S}$ sera caractérisé par la structure du groupe, ou pseudo-groupe, $\mathcal{G}$, composé de toutes les auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui laissent invariant tout sous-système rationnel de S; et $\mathcal{G}$ sera dit, en conséquence, le groupe ou pseudo-groupe, *spécifique* de $\mathcal{S}$.

Si l'on appelle *conjuguées* deux solutions complètes de $\mathcal{S}$ qui dérivent l'une de l'autre par deux auto-transformations de $\mathcal{G}$, tout sous-système rationnel de S qui admettra une solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ admettra aussi ses conjuguées :

---

[3] Sur la notion de *pseudo-groupe*, *voir* M_2, Introduction, n° 1, p. 2 et § 3, p. 10.

de sorte que $\mathcal{F}$ sera inséparable de ses conjuguées quant à sa détermination par des équations rationnelles.

On dira que $\mathcal{F}$ est une solution complète *primitive* de $\mathcal{S}$ s'il existe un sous-système rationnel de S, soit H, qui admette pour solutions $\mathcal{F}$ et ses conjuguées seulement. Pour un tel sous-système H, le groupe ou pseudo-groupe spécifique $\mathcal{G}$ de $\mathcal{S}$ jouera le rôle d'un groupe d'automorphie. C'est donc la structure de $\mathcal{G}$ qui déterminera la nature des opérations à faire pour résoudre ce *sous-système résolvant* H de S; et, par conséquent, qui caractérisera le mode spécial de réductibilité de $\mathcal{S}$, si celui-ci a effectivement des solutions complètes primitives.

Si l'on se place au point de vue qui fut celui de Galois dans sa théorie des équations algébriques, on conclut de ce qui précède que, pour qu'une fonction rationnelle d'une solution complète primitive de $\mathcal{S}$ ait une valeur rationnelle (dans $\mathcal{D}$), il faut et il suffit que cette valeur demeure invariante par les transformations du groupe, ou du pseudo-groupe spécifique de $\mathcal{S}$, effectuées sur cette solution complète dans cette fonction.

On peut enfin modifier cet énoncé de manière à obtenir une généralisation plus complète du théorème fondamental de Galois, en y substituant au groupe, ou pseudo-groupe, spécifique de $\mathcal{S}$, le groupe des *permutations* que ses transformations opèrent sur les solutions de $\mathcal{S}$ considérées comme des objets distincts, en nombre fini ou infini; ou encore le groupe de celles qu'elles opèrent, de même, sur les solutions complètes de $\mathcal{S}$: groupes que nous appellerons, respectivement, *groupe de Galois* et *groupe de réductibilité* de $\mathcal{S}$. On pourra encore remplacer ce dernier par une quelconque de ses représentations analytiques, qui jouera le rôle de *groupe de rationalité*. Ces divers groupes, ayant la même structure que le groupe, ou pseudo-groupe, spécifique $\mathcal{G}$, caractériseront, comme lui, le mode spécial de réductibilité de $\mathcal{S}$.

PREMIÈRE PARTIE

EXPOSÉ DE LA THÉORIE.

1. On considère une famille $(\mathcal{S})$ de systèmes $\mathcal{S}$, ayant une même forme générale, composée d'une ou plusieurs équations, algébriques ou différentielles. On suppose que ces systèmes $\mathcal{S}$ possèdent des *solutions complètes*. Nous entendons par là des familles $\mathcal{F}$ de solutions particulières, à définir pour chaque famille $(\mathcal{S})$ considérée, telles que l'on puisse, soit extraire de chacune d'elles, par la particularisation de certains éléments arbitraires toutes les solutions particulières, soit en déduire, pour celles-ci, par des opérations rationnelles, — pouvant comprendre des éliminations et des dérivations —, des formules aptes à les définir, individuellement, en termes finis, explicitement ou implicitement. On pourra, du reste, remonter de chacune de ces

solutions complètes, par des calculs rationnels, au système $\mathfrak{S}$ dont elle donne ainsi les solutions particulières (4).

Les solutions complètes de chaque système $\mathfrak{S}$ seront les solutions particulières d'un certain système S, qui en sera dit l'*associé* (5), et le problème de l'intégration ou de la résolution de $\mathfrak{S}$ sera considéré comme consistant à trouver une solution particulière quelconque de son associé S.

2. Dans tout domaine de rationalité $\mathfrak{D}$ où un système $\mathfrak{S}$ est rationnel, ce système sera dit *réductible* si l'un quelconque des *sous-sytèmes* Σ de son associé S est rationnel dans $\mathfrak{D}$.

On se propose de caractériser, pour chaque domaine $\mathfrak{D}$ donné, le mode de réductibilité propre à chacun des systèmes $\mathfrak{S}$ réductibles dans $\mathfrak{D}$. On en trouvera les moyens en étudiant d'abord, indépendamment de toute question de réductibilité, les propriétés des sous-systèmes Σ de l'associé S d'un système $\mathfrak{S}$ quelconque.

On supposera, pour cette étude, que la famille $(\mathfrak{S})$ constitue une *classe*, vis-à-vis d'une certaine famille $(\mathfrak{T})$ de transformations $\mathfrak{T}$, ponctuelles ou différentielles, portant sur l'inconnue ou les inconnues, et, le cas échéant, sur la ou les variables indépendantes (6).

Ces transformations $\mathfrak{T}$, qui seront dites les *transformations auxiliaires* de la classe $(\mathfrak{S})$, devront comprendre la transformation identique de leur espèce.

---

(4) Voici, par exemple, ce que sera, par définition, une solution complète dans quatre cas importants. — *a*. Famille des équations algébriques, de degré n, à une inconnue x, sans racines multiples : ce sera un système quelconque $x = x_1, \ldots, x = x_n$ de n racines différentes. — *b*. Famille des équations différentielles ordinaires d'ordre n, à une inconnue x : ce sera une *intégrale générale* quelconque. — *c*. Il en sera de même pour la famille $(\mathfrak{S})$ formée par les systèmes de n équations différentielles ordinaires du 1er ordre à n inconnues, $x_1, \ldots, x_n$. — *d*. Famille des équations aux dérivées partielles du 1er ordre, à $n+1$ variables indépendantes t, $x_1, \ldots, x_n$ et une fonction inconnue z : ce sera une *intégrale complète*, au sens de Lagrange.

(5) Voici ce qu'est, dans les exemples de la Note précédente, l'*associé* S d'un système $\mathfrak{S}$. — *a*. C'est le système d'équations en $x_1, \ldots, x_n$ donné par les relations entre les racines et les coefficients de l'équation algébrique qui constitue $\mathfrak{S}$. — *b*. et *c*. S se déduit de $\mathfrak{S}$ en y considérant respectivement, x et $x_1, \ldots, x_n$ comme des fonctions de la variable indépendante t et des constantes arbitraires d'intégration, $c_1, \ldots, c_n$. — *d*. S se déduit, de même, de $\mathfrak{S}$ en y considérant z comme une fonction des variables indépendantes $t, x_1, \ldots, x_n$, et des constantes arbitraires, $a_1, \ldots, a_n$, c dont les intégrales complètes sont supposées dépendre.

(6) Voici ce que pourront être, par exemple, les transformations de classe $\mathfrak{T}$ dans les cas de la note (4). — *a*. On pourra prendre les transformations $\bar{x} = \varphi(x)$, ou φ est entier, de degré $n-1$, — *b*. On pourra prendre les transformations différentielles $\bar{x} = \varphi\left(t; x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right)$, d'ordre $n-1$: φ sera une fonction arbitraire de ses arguments. — *c*. On pourra prendre les transformations ponctuelles de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n)$ qui laissent t invariant. — *d*. On pourra prendre les transformations de contact de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n; z)$ relatives à l'équation de Pfaff, $dz = q\,dt + p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n$, qui laissent t invariant. — Remarquons que l'on a affaire à un groupe de transformations, pour les familles $(\mathfrak{T})$ ainsi choisies, dans les cas *c*. et *d*., mais non dans les cas *a*. et *b*. (*Cf.* M_2, § 2, p. 8).

Elles laisseront invariant l'ensemble $((\mathcal{F}))$ de toutes solutions complètes $\mathcal{F}$ de tous les systèmes $\mathcal{S}$ de la classe $(\mathcal{S})$. On supposera que, pour tout couple d'éléments de cet ensemble, il y a une transformation $\mathcal{T}$ et une seule qui change le premier en le second (ce couple pouvant, du reste, être formé de deux solutions complètes d'un même système $\mathcal{S}$, et ses éléments pouvant même être identiques). Ce qu'on exprimera en disant que les transformations $\mathcal{T}$ opèrent sur l'ensemble des solutions complètes des systèmes de la classe $(\mathcal{S})$ *suivant un mode simplement transitif*.

Il résulte, en particulier, de cette hypothèse que, pour chaque système $\mathcal{S}$ de la classe, il y a, dans la famille $(\mathcal{T})$ des transformations auxiliaires $\mathcal{T}$, une sous-famille (t) de transformations t (que nous appellerons les *auto-transformations* de $\mathcal{S}$), qui laissent invariant $\mathcal{S}$ et qui opèrent sur ses solutions complètes suivant un mode simplement transitif. Nous supposerons que cette sous-famille (t) est un groupe, ou un pseudo-groupe, *modulo* $\mathcal{S}$ (7), que nous appellerons le *groupe d'invariance* ou le *pseudo-groupe d'invariance* de $\mathcal{S}$ [Cf. M_1, n° 5 et M_2, § 3].

3. Relativement au domaine de rationalité $\mathcal{O}$ donné, nous appellerons *réduit* de la classe $(\mathcal{S})$, un système particulier s de cette classe, défini par la condition d'avoir une solution complète rationnelle donnée f, choisie une fois pour toutes. Pour tout système $\mathcal{S}$ de la classe, toute transformation auxiliaire $\mathcal{T}$ qui changera $\mathcal{S}$ en ce réduit s sera dite une *transformation réductrice*, et celle qui changera en f une solution complète particulière $\mathcal{F}$ quelconque de $\mathcal{S}$ sera dite avoir $\mathcal{F}$ pour *génératrice*. Chaque transformation réductrice de $\mathcal{S}$ changera l'associé S de $\mathcal{S}$ en l'associé S de s, et S sera dit *le réduit* de S; elle changera tout sous-système Σ de S en un sous-système σ du réduit S, et σ sera dit *un réduit* de Σ. Le sous-système A de S, dont les solutions sont les génératrices des diverses transformations réductrices de $\mathcal{S}$ qui changent Σ en un même réduit σ, sera dit *l'adjoint* de Σ relatif à ce réduit, ou à l'une quelconque de ces génératrices.

Toute solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ est solution d'un adjoint A de Σ et d'un seul. On reconnaît que, pour que celui-ci ait pour solution une autre solution $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{S}$, il faut et il suffit que l'auto-transformation de $\mathcal{S}$ qui change $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$ laisse invariant Σ. Dès lors, pour toute solution $\mathcal{F}$ d'un adjoint quelconque A de Σ les auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui changent $\mathcal{F}$ en les diverses solutions de A sont les auto-transformations θ de $\mathcal{S}$ qui laissent Σ invariant. L'ensemble (θ) de celles-ci, qui sera, en même temps que celui de toutes les auto-transformations de $\mathcal{S}$, un groupe ou un pseudo-groupe, sera dit *le groupe* ou *le pseudo-groupe d'invariance* de Σ. Il sera aussi pour A, un groupe, ou pseudo-groupe d'invariance [*Cf.* M_1, n° 13; M_2, § 8].

L'ensemble de tous les adjoints de tous les sous-systèmes de S ne diffère pas

(7) Sur la notion de *pseudo-groupe*, *voir* M_2, Introduction, n° 1, p. 2 et § 3, p. 10.

de celui de tous ses sous-systèmes (que nous appellerons *principaux*) pour chacun desquels les diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par une même famille (groupe ou pseudo-groupe) d'auto-transformations de $\mathcal{S}$, jouant ainsi pour lui le rôle d'un groupe ou pseudo-groupe d'*automorphie* [*Cf.* M_1, n° 14; M_2, § 9].

4. Nous supposerons, pour l'étude du mode de réductibilité d'un système $\mathcal{S}$ donné, dans un domaine de rationalité $\mathfrak{D}$ donné, que parmi ses solutions complètes il en est (que nous dirons *distinguées*) pour lesquelles tous les adjoints des sous-systèmes rationnels de son associé S qui leur sont relatifs sont aussi rationnels (8). Soit $\mathcal{F}$ l'une d'elles, et soit Φ_0 celui des sous-systèmes de S rationnels auxquels elle satisfait et qui est un sous-système de tous les autres : ce que nous exprimerons en disant que Φ_0 est pour $\mathcal{F}_0$ un sous-système de S *fondamental* (9). Si $\mathcal{F}_0$ est la seule solution, elle est rationnelle. Ce cas écarté, on voit sans peine que Φ_0 sera son propre adjoint relativement à $\mathcal{F}_0$. Il le sera par suite, aussi pour toute autre de ces solutions : ce qui entraîne qu'il est *fondamental* aussi pour elle et, par suite, que Φ_0 est *irréductible* (c'est-à-dire qu'il n'a pas de sous-système rationnel).

Soient Σ un sous-système rationnel quelconque de S et A_0 son adjoint relatif à $\mathcal{F}_0$. Comme $\mathcal{F}_0$ est distinguée, A_0 est rationnel et Φ_0 en est un sous-système. Le groupe (ou pseudo-groupe) d'invariance de Σ, composé des auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui changent $\mathcal{F}_0$ en les diverses solutions de A_0, contient les auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui changent $\mathcal{F}_0$ en les diverses solutions de Φ_0, c'est-à-dire les transformations Θ du groupe (ou pseudo-groupe) d'invariance (Θ) de Φ_0. Celui-ci peut donc être défini comme le groupe (ou pseudo-groupe) des auto-transformations de $\mathcal{S}$ qui laissent invariants tous les sous-systèmes rationnels de S. Il est donc indépendant de la solution complète distinguée $\mathcal{F}_0$ qui a servi à en démontrer l'existence. Nous l'appellerons le groupe (ou pseudo-groupe) *spécifique* de $\mathcal{S}$, relatif au domaine de rationalité $\mathfrak{D}$ donné. C'est, en effet, sa structure qui caractérise, comme nous le verrons, le mode *spécial* de réductibilité de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{D}$.

5. Nous dirons que deux solutions complètes de $\mathcal{S}$ sont *conjuguées* si elles sont homologues vis-à-vis de son groupe (ou pseudo-groupe) spécifique (Θ). Tout sous-système rationnel Σ de S admettant les transformations Θ, ses solutions se répartissent en familles de solutions complètes de $\mathcal{S}$ deux à deux

(8) Il existe des *solutions distinguées* dans tous les cas classiques, ainsi que dans les exemples *b.* et *c.* de la note (4). La démonstration de leur existence est, dans toute application de la présente théorie, le point capital.

(9) La démonstration de l'existence d'un tel *sous-système fondamental* par toute solution d'un sous-système rationnel de S se ferait en thèse générale, par un raisonnement analogue à ceux par lesquels elle se trouve établie, dans M_1, n° 17 et M_2, paragraphe 10, pour les systèmes qui y sont considérés.

conjuguées. Il en résulte que toute solution complète de $\mathcal{S}$ est inséparable de ses conjuguées quant à sa détermination par des équations rationnelles.

Si un sous-système Σ de S, rationnel, n'a pour solutions qu'une seule famille de solutions complètes de $\mathcal{S}$ deux à deux conjuguées, ce sera un sous-système principal de S dont le groupe (ou pseudo-groupe) d'invariance sera le groupe (ou pseudo-groupe) spécifique (Θ) de $\mathcal{S}$ et nous dirons que c'est un sous-système *spécifique* de S ([10]).

Une solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ sera dite *primitive* si elle est solution d'un sous-système spécifique Φ de S : celui-ci est alors fondamental pour $\mathcal{F}$, ainsi que pour ses conjuguées (lesquelles sont aussi primitives), et il est irréductible.

Les solutions distinguées sont un cas particulier des solutions primitives; les conjuguées d'une solution complète distinguée sont, du reste, aussi des solutions complètes distinguées.

Il y a des cas où les solutions complètes de tout système $\mathcal{S}$ réductible sont primitives : tel est celui des équations algébriques à une inconnue [*Cf.* M_2, § 11]. Mais c'est une circonstance exceptionnelle [*Cf.* M_1, n^{os} 5 et 6 de l'introduction et III, n° 24].

Quoi qu'il en soit, la résolution de $\mathcal{S}$, supposé réductible, reviendra à chercher une de ses solutions complètes primitives, c'est-à-dire, celle-ci étant inséparable de ses conjuguées, à résoudre le sous-système spécifique Φ de l'associé S de $\mathcal{S}$ auquel elle satisfait. Celui-ci pouvant être considéré comme un système automorphe pour lequel le groupe (ou pseudo-groupe) spécifique de $\mathcal{S}$ joue le rôle de groupe (ou pseudo-groupe) d'automorphie, c'est la structure de ce dernier qui déterminera le choix et la nature des systèmes résolvants à employer. C'est donc bien, en définitive, comme nous l'avions annoncé, cette structure qui caractérise le mode spécial de réductibilité du système $\mathcal{S}$ considéré.

6. Plaçons-nous maintenant au point de vue de Galois. Soit $\mathcal{F}$ une solution complète de $\mathcal{S}$, laissée indéterminée et soit $R(\mathcal{F})$ une fonction de $\mathcal{F}$, rationnelle dans $\mathcal{O}$, c'est-à-dire une fonction rationnelle dans $\mathcal{O}$ de ses éléments constitutifs, numériques ou fonctionnels et, le cas échéant, des variables indépendantes dont ils dépendront et de leurs dérivées par rapport à celles-ci. Étant donnée une solution complète particulière quelconque $\mathcal{F}_0$ de $\mathcal{S}$, on dira que $R(\mathcal{F}_0)$ est la *valeur* de R pour $\mathcal{F}_0$. Il s'agit de voir dans quel cas cette valeur appartiendra à $\mathcal{O}$. Nous remarquerons, à cet effet, que s'il en est ainsi, le sous-système de S obtenu en adjoignant à S l'équation $R(\mathcal{F}) = R(\mathcal{F}_0)$ sera rationnel : de sorte que, ayant la solution $\mathcal{F}_0$, il admettra aussi pour solutions toutes les conjuguées $\mathcal{F}'_0$ de $\mathcal{F}_0$. On aura donc, pour chacune

([10]) Dans notre Mémoire M_1 nous avons appelé *spécifique* tout sous-système principal ayant le groupe spécifique pour groupe d'invariance (*Cf.*, M_1, n° 20). Nous réservons ici cette appellation, comme nous l'avons fait dans M_2, à des sous-systèmes rationnels (*Cf.* M_2, § 11).

d'elles, $R(\mathcal{F}_0) = R(\mathcal{F}'_0)$. Si, réciproquement, il en est ainsi, l'équation $R(\mathcal{F}) = V$ sera, pour l'unique valeur $V = R(\mathcal{F}_0) = R_0$, une conséquence du sous-système principal H_0 de S dont les solutions sont $\mathcal{F}_0$ et ses conjuguées $\mathcal{F}'_0$. *Si $\mathcal{F}_0$ est primitive*, H_0 sera un sous-système spécifique de S : il sera donc rationnel, et, en exprimant que $R(\mathcal{F}) = V$, où V sera considérée comme une inconnue, est une conséquence de H_0, on obtiendra, comme conditions, un système en V, rationnel, ayant R_0 pour unique solution. Celle-ci, c'est-à-dire $R(\mathcal{F}_0)$, sera donc rationnelle (dans Ω).

Comme l'on passe de $\mathcal{F}_0$ à ses conjuguées $\mathcal{F}'_0$ par les diverses transformations du groupe (ou pseudo-groupe) spécifique (Θ) de $\mathcal{S}$, on pourra traduire les égalités $R(\mathcal{F}_0) = R(\mathcal{F}'_0)$ en disant que la valeur de $R(\mathcal{F})$ pour $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ admet (*numériquement*) ce groupe (ou pseudo-groupe). D'où, pour la généralisation du théorème fondamental de Galois, l'énoncé abrégé, où le mot *rationnelle* signifie rationnelle dans Ω.

Théorème fondamental de Galois. — *Pour qu'une fonction rationnelle d'une solution complète du système considéré ait une valeur rationnelle, il faut qu'elle demeure invariante, numériquement, par les transformations du groupe (ou pseudo-groupe) spécifique de ce système; cette condition est suffisante, si cette solution complète est primitive.*

7. Pour rattacher ce résultat, d'une manière complète, aux idées de Galois, il nous suffira de remarquer que toute auto-transformation t de $\mathcal{S}$ opère sur ses solutions, considérées comme des objets distincts, en nombre fini ou infini, une *permutation* p, d'où résulte pour ses solutions complètes, envisagées de même, une *permutation* P; et que les correspondances ainsi établies entre les transformations t et les *permutations* p comme entre les premières et les *permutations* P, sont biunivoques, du fait qu'il y a une auto-transformation t et une seule qui change une solution complète de $\mathcal{S}$, donnée, en une autre, donnée aussi.

L'ensemble (p) des permutations p, comme l'ensemble (P) des permutations P, constituera manifestement un groupe holoédriquement isomorphe au groupe (ou pseudo-groupe) d'invariance (t) de $\mathcal{S}$; et aux transformations Θ du groupe (ou pseudo-groupe) spécifique de $\mathcal{S}$ correspondront, dans ces deux groupes respectivement, les permutations, γ et Γ, de deux groupes (γ) et (Γ), que nous appellerons *groupe de Galois* et *groupe de réductibilité* de $\mathcal{S}$.

On pourra, dès lors, remplacer les transformations du groupe (ou pseudo-groupe) spécifique de $\mathcal{S}$, dans l'énoncé du théorème fondamental de Galois, par les permutations de ce groupe de Galois, ou de ce groupe de réductibilité.

8. Les *permutations* p et P ont un caractère concret, et, par conséquent, *synthétique*, qui nous paraît en accord avec la pensée de Galois. Mais les permutations P pourront se traduire *analytiquement* par des *transformations*

portant sur les arbitraires dont dépend la solution complète générale du système $\mathcal{S}$ considéré. Au *groupe de réductibilité* (Γ) de $\mathcal{S}$ correspondra ainsi un groupe de transformations que nous appellerons (par extension de la terminologie employée couramment dans les cas classiques), *groupe de rationalité* de $\mathcal{S}$, et qui pourra, au même titre que le groupe de Galois ou le groupe de réductibilité, remplacer le groupe (ou pseudo-groupe) spécifique dans l'énoncé du théorème fondamental de Galois.

DEUXIÈME PARTIE.

APPLICATIONS.

I. — Sur la réductibilité des systèmes de n équations différentielles ordinaires du premier ordre à n inconnues.

1. Les systèmes en question seront pris sous la forme résolue

$$x'_\alpha = \theta_\alpha(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Les systèmes $\mathcal{S}$ de la théorie générale seront alors les divers systèmes (1), relatifs à une même valeur de n donnée.

Les *solutions complètes* de l'un d'eux seront ses *intégrales générales*

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(t; c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Pour chacune d'elles, $\mathcal{F}$, en effet, les équations (2) sont aptes à représenter, par un choix approprié des valeurs des constantes arbitraires $c_1, \ldots, c_n$, toute solution particulière du système $\mathcal{S}$ considéré.

Le système S, *associé* à un système $\mathcal{S}$ [d'équations (1) données], dont dépendent les solutions complètes de ce système $\mathcal{S}$, a aussi pour équations ces mêmes équations (1) à condition d'y considérer les inconnues $x_1, \ldots, x_n$ comme des fonctions des variables $t, c_1, \ldots, c_n$, indépendantes relativement à $c_1, \ldots, c_n$, et les x'_α comme les dérivées partielles des x_α par rapport à t. Chaque solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ sera définie par des *conditions initiales* de la forme

$$\varphi_\alpha(t_0; c_1, \ldots, c_n) = \gamma_\alpha(c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

relatives à une valeur initiale $t = t_0$ arbitraire.

Il y a un système $\mathcal{S}$ et un seul admettant une solution complète (2) donnée. C'est

$$x'_\alpha = \varphi'_\alpha(t; \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

les ξ_α étant définis par la résolution du système (2) sous la forme

$$c_\alpha = \xi_\alpha(t; x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Ces ξ_α sont les éléments de l'un quelconque des *systèmes fondamentaux d'invariants* de la transformation infinitésimale

$$\mathrm{D}f = \frac{\partial f}{\partial t} + \theta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \theta_n \frac{\partial f}{\partial x_n}, \tag{6}$$

lesquels sont, comme l'on sait, les *systèmes fondamentaux de solutions* de $\mathrm{D}f = 0$.

2. Pour les *transformations auxiliaires* $\mathfrak{T}$ de la théorie générale, nous prendrons les transformations ponctuelles de l'espace $t, x_1, \ldots, x_n$,

$$y_\alpha = \mathrm{F}_\alpha(t; x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

qui laissent t invariant. Elles forment un groupe infini.

Pour que la transformation (7) change la solution complète (2) d'un système $\mathfrak{S}$ en une autre, donnée,

$$y_\alpha = \psi_\alpha(t; c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

appartenant au même système de la famille $(\mathfrak{S})$ ou à un autre, il faut et il suffit que les équations

$$\mathrm{F}_\alpha(t; \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \psi_\alpha(t; c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

soient des identités par rapport à $t, c_1, \ldots, c_n$; et, par conséquent que les équations

$$\mathrm{F}_\alpha(t; x_1, \ldots, x_n) = \psi_\alpha(t; \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{10}$$

qui en résultent par le changement de variables (5), soient des identités par rapport à $t, x_1, \ldots, x_n$.

Il existe donc une transformation $\mathfrak{T}$ et une seule, à savoir

$$y_\alpha = \psi_\alpha(t; \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

qui change (2) en (8). Conformément aux hypothèses de la théorie générale, les systèmes $\mathfrak{S}$ forment donc une *classe* vis-à-vis des transformations $\mathfrak{T}$, et les solutions complètes $\mathfrak{F}$ de tous ces systèmes sont permutées par ces transformations suivant un mode *simplement transitif*.

3. Comme système *réduit* $\mathfrak{S}_0$ de la classe $(\mathfrak{S})$, nous choisirons le système

$$y'_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{12}$$

et nous prendrons sa solution complète

$$y_\alpha = c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

pour *solution complète de référence* $\mathfrak{F}_0$. La transformation

$$y_\alpha = \xi_\alpha(t; x_1, \ldots, x_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

qui a pour inverse

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(t;\ y_1, \ldots, y_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{15}$$

sera ainsi la *transformation réductrice* $\mathcal{R}$ de $\mathcal{S}$ [d'équations (1)], qui a pour *génératrice* la solution complète $\mathcal{F}$, d'équations (2), de ce système.

4. Tout *sous-système* Σ du système S associé à un système $\mathcal{S}$ donné peut être défini par l'adjonction, aux équations (1) de $\mathcal{S}$, d'un système complémentaire Ω, de la forme

$$\Pi_\omega(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ \ldots, x_\alpha^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}, \ldots) = 0 \qquad (\omega = 1, 2, \ldots, s), \tag{16}$$

les indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant des indices de dérivation par rapport à $c_1, \ldots, c_n$ respectivement. On peut, en effet, en se servant des équations (1), faire disparaître des autres équations de Σ toute dérivation par rapport à t. D'autre part, on ne change pas l'ensemble des solutions de Σ en lui adjoignant les dérivées, par rapport à t, des équations (16) [après en avoir fait disparaître, au moyen des équations (1), les dérivées x'_α et $(x'_\alpha)^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$], c'est-à-dire les équations obtenues en appliquant aux équations (16) la transformation infinitésimale Df, convenablement prolongée. On pourra donc supposer que Ω est invariant par Df. Nous dirons, dans ces conditions, que Ω est le *noyau* de Σ.

5. Cela posé, le *réduit* Σ_0 de Σ par la transformation réductrice (14) sera formé de S_0 [d'équations (12)], et du *noyau réduit* Ω_0, qui s'obtiendra en portant dans les équations (16) les expressions (15) des x_α et leurs dérivées $x_\alpha^{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$. Celles-ci seront des fonctions linéaires homogènes des dérivées $\varphi_\alpha^{\omega_1, \ldots, \omega_n}$ des $\varphi_\alpha(t;\ y_1, \ldots, y_n)$, prises par rapport aux y_β, avec des coefficients entiers par rapport aux dérivées $y_\beta^{\beta_1, \ldots, \beta_n}$ des y_β par rapport aux c_γ. Soit

$$\Pi_\omega(t;\ y_1, \ldots, y_n;\ \ldots, y_\beta^{\omega_1, \ldots, \omega_n}, \ldots;\ \ldots, \varphi_\alpha^{\varpi_1, \ldots, \varpi_n}, \ldots) = 0 \qquad (\omega = 1, 2, \ldots, s) \tag{17}$$

le système ainsi obtenu. Il admettra la transformation infinitésimale $\frac{\partial f}{\partial t}$, qui est associée à $\mathcal{S}_0$ comme Df l'est à $\mathcal{S}$, et qui est, par suite la transformée de Df par toute transformation réductrice de $\mathcal{S}$.

On obtiendra donc un système Ω_0 équivalent à Ω_0 en faisant $t = t_0$ dans (17). Ce sera le système

$$\Pi_\omega(t_0;\ y_1, \ldots, y_n;\ \ldots, y_\beta^{\omega_1, \ldots, \omega_n}, \ldots;\ \ldots, \gamma_\alpha^{\varpi_1, \ldots, \varpi_n}, \ldots) = 0 \qquad (\omega = 1, 2, \ldots, s), \tag{18}$$

où les γ_α seront les données initiales (3) de la solution complète génératrice considérée $\mathcal{F}$.

En identifiant alors, par rapport aux $y_\beta^{\beta_1, \ldots, \beta_n}$, les systèmes (17) et (18), on obtiendra un système différentiel relatif aux φ_α, qui sera le *système adjoint* A de Σ admettant pour l'une de ses solutions cette génératrice $\mathcal{F}$.

6. Les opérations indiquées ci-dessus pour la construction de l'adjoint A sont de nature rationnelle. Si donc Σ est rationnel, et si t_0 et les $\gamma_\alpha(c_1, \ldots, c_n)$ le sont, A sera rationnel. On en conclut que, si une solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$ est rationnelle pour une valeur particulière de t quelconque, elle est, pour tout sous-système Σ de $\mathcal{S}$ rationnel, solution d'un adjoint rationnel de ce sous-système.

Toutes les conditions voulues pour l'application de notre théorie générale de la réductibilité sont, dès lors, remplies pour les systèmes $\mathcal{S}$ considérés.

II. – Sur la réductibilité des équations différentielles ordinaires d'ordre n à une inconnue.

L'étude de la réductibilité des équations différentielles ordinaires d'ordre n, à une inconnue, a été, jusqu'ici, rattachée, comme un cas particulier, à la théorie de l'intégration logique des équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires et homogènes.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \theta_1(t; x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \theta_n(t; x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

Il y aurait cependant un intérêt théorique et pratique à en avoir une théorie directe.

On montrera ici comment on en peut fonder une sur la théorie générale de la réductibilité du présent Mémoire.

1. Les équations à considérer, supposées d'un même ordre donné n, seront prises sous la forme résolue

$$x^{(n)} = \theta(t; x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{1}$$

x étant l'inconnue et $x', x'', \ldots, x^{(n-1)}$ étant ses dérivées successives par rapport à la variable indépendante t.

Ce seront les systèmes $\mathcal{S}$ de la théorie générale. Une *solution complète* $\mathcal{F}$ d'un tel système $\mathcal{S}$ sera une solution de $\mathcal{S}$ dépendant de n indéterminées $c_1, \ldots, c_n$,

$$x = \varphi(t; c_1, \ldots, c_n), \tag{2}$$

et formant avec ses $n-1$ premières dérivées par rapport à t, $\varphi', \varphi'', \ldots, \varphi^{(n-1)}$, n fonctions de $c_1, \ldots, c_n$ indépendantes. L'équation (2) est, en effet, apte à représenter, pour des valeurs convenables des c_α, toute solution particulière de $\mathcal{S}$, puisque φ est, par définition, une intégrale générale de (1). Cette solution complète $\mathcal{F}$ sera déterminée par des conditions initiales de la forme

$$\varphi^{\alpha}(t_0; c_1, \ldots, c_n) = \gamma_\alpha(c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3}$$

avec la convention que la dérivée d'indice zéro d'une fonction est cette fonction même. Elle sera dite *principale, relativement à* $t = t_0$, si $\gamma_\alpha = c_{\alpha+1}$.

Le système d'équations

$$x^{(\alpha)} = \varphi^{(\alpha)}(t; c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4}$$

sera résoluble sous la forme

$$c_\alpha = \xi_\alpha(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

et les ξ_α formeront un système fondamental d'invariants de la transformation infinitésimale

$$\mathrm{D}f = \frac{\partial f}{\partial t} + x' \frac{\partial f}{\partial x} + \ldots + x^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial x^{(n-2)}} + \theta \frac{\partial f}{\partial x^{(n-1)}}, \tag{6}$$

c'est-à-dire de solutions de $\mathrm{D}f = 0$. Si $\mathfrak{F}$ est principale, par rapport à $t = t_0$, on aura

$$\xi_\alpha(t_0; x, x', \ldots, x^{(n-1)}) = x^{(\alpha-1)} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

de sorte que ce système fondamental sera aussi principal, relativement à $t = t_0$.

Il y a un système $\mathfrak{S}$ et un seul ayant une solution complète (2), arbitrairement donnée, à savoir :

$$x^{(n)} = \varphi^{(n)}(t; \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{7}$$

L'ensemble $(\mathfrak{F})$ des solutions complètes de tous les systèmes $\mathfrak{S}$ considérés est donc représenté par (2), φ étant une fonction arbitraire de ses arguments; et le système S, *associé* à un système $\mathfrak{S}$, qui en définit les solutions complètes, est représenté par la même équation (1) que lui, dès que l'on considère x comme une fonction des variables indépendantes t, $c_1, \ldots, c_n$, et les $x^{(\alpha)}$, comme on l'a fait pour les $\varphi^{(\alpha)}$, comme des dérivées partielles.

2. Pour les *transformations auxiliaires* $\mathfrak{C}$ de la théorie générale, nous prendrons les transformations différentielles d'ordre $(n-1)$,

$$y = \mathrm{F}(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{8}$$

qui, laissant t invariant, changent toute fonction x de t en une autre fonction, y. Si x est solution du système $\mathfrak{S}$ d'équation (1), on a de proche en proche, *modulo* $\mathfrak{S}$, pour les dérivées de y, au moyen de l'opérateur $\mathrm{D}f$ défini par (6),

$$y' = \mathrm{DF} = \mathrm{F}_1(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \quad \ldots, \quad y^{(\alpha)} = \mathrm{DF}_{\alpha-1} = \mathrm{F}_\alpha(t; x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \quad \ldots \tag{9}$$

En résolvant (11) ensuite le système formé par (8) et les $(n-1)$ premières équations (9), on aura des formules de la forme

$$x = \mathrm{G}(t; y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{10}$$

$$x^{(\alpha)} = \mathrm{G}_\alpha(t; y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1); \tag{11}$$

(11) Nous excluons dans cette Note, tous les cas d'exception.

et le transformé $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ sera

$$y^{(n)} = F_n(t;\ G, G_1, \ldots, G_{n-1}) = \bar{\theta}(t;\ y, y', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{12}$$

Soit, *inversement*, la transformation auxiliaire $\mathcal{C}'$, de y en x, d'équation (10), et appliquons-la à une solution y de $\mathcal{S}'$. Si nous considérons $x', \ldots, x^{(n-1)}$, pour un moment, comme les fonctions de t définies par les formules (11), les équations (8) et les n premières équations (9) seront vérifiées, et l'on en déduira, par des dérivations, les identités

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial x}\left(\frac{dx}{dt} - x'\right) + \ldots + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^{(n-2)}}\left(\frac{dx^{(n-2)}}{dt} - x^{(n-1)}\right) + \frac{\partial F_\alpha}{\partial x^{(n-1)}}\left(\frac{dx^{(n-1)}}{dt} - 0\right) = 0, \tag{13}$$

pour $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ (en faisant $F_0 = F$). Par suite, $x', \ldots, x^{(n-1)}$ sont les $n-1$ premières dérivées de x, et $\mathcal{C}'$ change $\mathcal{S}'$ en $\mathcal{S}$. Donc $\mathcal{C}'$ est *pseudo-inverse* de $\mathcal{C}$, *modulo* $\mathcal{S}$; et $\mathcal{C}$ est *pseudo-inverse* de $\mathcal{C}'$, *modulo* $\mathcal{S}'$. On voit, de plus, que $G_\alpha = D' G_{\alpha-1}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$; $G_0 = G$), avec

$$D'f = \frac{\partial f}{\partial t} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + y^{(n-1)} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} + \bar{\theta} \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}. \tag{14}$$

3. Conformément aux hypothèses de la théorie générale, l'ensemble $(\mathcal{S})$ des systèmes $\mathcal{S}$ considérés est une *classe* vis-à-vis des transformations auxiliaires $\mathcal{C}$ que nous venons d'introduire, et l'ensemble $(\mathcal{C})$ de celles-ci est *simplement transitif* relativement à l'ensemble $(\mathcal{F})$ des solutions complètes $\mathcal{F}$ de tous les systèmes de cette classe $(\mathcal{S})$. Cela résulte de ce qu'il y a une transformation $\mathcal{C}$, et une seule, qui change la solution complète $\mathcal{F}$, d'équation (2) donnée, en une autre solution complète donnée $\mathcal{F}'$,

$$y = \psi(t;\ c_1, \ldots, c_n). \tag{15}$$

En effet, pour qu'il en soit ainsi de la transformation (8), il faut et il suffit que l'on ait l'identité en $t, c_1, \ldots, c_n$

$$F(t;\ \varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)}) = \psi(t;\ c_1, \ldots, c_n), \tag{16}$$

qui devient, par le changement de variables défini par (5), ou par le système équivalent (4), l'identité en $t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}$

$$F(t;\ x, x', \ldots, x^{(n-1)}) = \psi(t;\ \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{17}$$

La transformation $\mathcal{C}$, unique, annoncée est donc

$$y = \psi(t;\ \xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{18}$$

On remarquera que, les ξ_α étant des invariants de Df, elle se complète, *modulo* $\mathcal{S}$, par les formules

$$y^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(t;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{19}$$

Sa pseudo-inverse, *modulo* $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}'$, est, de même,

$$x = \varphi(t;\ \eta_1, \ldots, \eta_n), \tag{20}$$

les η_α étant définis par la résolution, sous la forme

$$c_\alpha = \eta_\alpha(t;\ y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

du système

$$y^{(\alpha)} = \psi^{(\alpha)}(t;\ c_1, \ldots, c_n) \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n-1); \tag{22}$$

et les η_α étant des invariants de $\mathrm{D}'f$, on peut lui adjoindre, *modulo* $\mathcal{S}'$, les formules

$$x^{(\alpha)} = \varphi^{(\alpha)}(t;\ \eta_1, \ldots, \eta_\alpha) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{23}$$

Remarquons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont liées, symétriquement, par les relations

$$\xi_\alpha(t;\ x, x', \ldots, x^{(n-1)}) = \eta_\alpha(t;\ y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{24}$$

que l'on obtient en résolvant les systèmes (18), (19) et (20), (23) par rapport aux ξ_α et aux η_α respectivement.

Par ailleurs, l'existence d'une transformation $\mathcal{C}$, unique, changeant $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}'$ entraîne que la famille $(\mathcal{C})$ des transformations auxiliaires est un *pseudo-groupe modulo* $(\mathcal{S})$: ce qu'il est facile, du reste, de vérifier directement.

4. Nous prendrons comme *réduit* de la classe $(\mathcal{S})$ le système $\mathcal{S}_0$ dont l'équation est $y^{(n)} = 0$. Sa solution complète principale $\mathcal{F}_0$, relative à $t = t_0$ est

$$y = c_1 + \frac{t - t_0}{1} c_2 + \ldots + \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} c_n, \tag{25}$$

et satisfait aux équations (21) si l'on pose

$$\left\{\begin{aligned}
&\eta_1 = y + \frac{t_0 - t}{1} y' + \ldots + \frac{(t_0 - t)^{n-2}}{(n-2)!} y^{(n-2)} + \frac{(t_0 - t)^{n-1}}{(n-1)!} y^{(n-1)},\\
&\eta_2 = y' + \frac{t_0 - t}{1} y'' + \ldots + \frac{(t_0 - t)^{n-2}}{(n-2)!} y^{(n-1)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\eta_{n-1} = y^{(n-2)} + \frac{t_0 - t}{1} y^{(n-1)},\\
&\eta_n = y^{(n-1)}.
\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Pour le système $(\mathcal{S})$ d'équation (1), la *transformation-réductrice* $\mathcal{R}$ qui a pour *génératrice* la solution complète $\mathcal{F}$ d'équation (2), c'est-à-dire qui change $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}_0$ est dès lors, en application de (18),

$$y = \xi_1 + \frac{t - t_0}{1} \xi_2 + \ldots + \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!} \xi_n; \tag{27}$$

et sa pseudo-inverse *modulo* $\mathcal{S}$, est, avec les notations (26), la transformation $\mathcal{R}'$ définie par (20).

5. On peut définir tout *sous-système* Σ du système S associé à un système $\mathfrak{S}$, donné, en adjoignant à l'équation (1) de $\mathfrak{S}$ (et de S), un système Ω de la forme

$$(28)\quad H_\omega(t;\ x,\ x',\ \ldots,\ x^{n-1};\ \ldots,\ x^{(\alpha)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n},\ \ldots)=0 \qquad (0\leq\alpha<n;\ \omega=1,2,\ldots,s),$$

où les indices inférieurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont des indices de dérivation par rapport à $c_1, \ldots, c_n$ respectivement. Or, toute solution de ce système $\Sigma=(S,\Omega)$ satisfera aussi aux équations obtenues en dérivant par rapport à t les équations (28) et en se servant de (1) pour éliminer $x^{(n)}$ et les $x^{(n)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, c'est-à-dire en leur appliquant la transformation Df (convenablement prolongée). On pourra donc adjoindre à Ω toute équation ainsi obtenue qui n'en serait pas une conséquence algébrique; et cela permet de supposer que Ω sera, vis-à-vis de Df, un système invariant. Nous dirons, dans ces conditions, que Ω est le *noyau* de Σ.

Cela posé, le *réduit* de Σ par une transformation réductrice $\mathcal{R}$ quelconque, d'équation (27) sera $\Sigma_0=(S_0,\Omega_0)$, Ω_0 étant le transformé de Ω, que nous appellerons son *réduit*.

Ce *noyau réduit* s'obtiendra en remplaçant dans les H_ω, conformément aux résultats du n° 4, les $x^{(\alpha)}$ ($\alpha=0, 1, 2, \ldots, n-1$) par les $\varphi^{(\alpha)}(t;\eta_1,\ldots,\eta_n)$, et les $x^{(\alpha)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ par les dérivées, d'indices $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, de ces fonctions composées de $c_1, \ldots, c_n$, calculées en se servant des formules (26) qui définissent les $\eta_{|\alpha}$. Ces expressions des $x^{(\alpha)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ seront linéaires homogènes par rapport aux dérivées $\varphi^{(\alpha)}_{\omega_1,\ldots,\omega_n}$ des fonctions $\varphi^{(\alpha)}(t;c_1,\ldots,c_n)$, (avec $c_\alpha=\eta_\alpha$) et les coefficients seront des polynomes entiers par rapport aux dérivées $\eta_{|\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$, calculées au moyen des formules (26) en fonction linéaire et homogène des $y^{(\varpi)}_{\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$.

Le système Ω_0 se présentera ainsi sous la forme

$$(29)\quad \Pi_\omega[t;\ \ldots,\ \varphi^{(\alpha)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(t;\eta_1,\ldots,\eta_n),\ \ldots;\ \ldots,\ \eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n},\ \ldots]=0 \qquad (\omega=1,2,\ldots,s),$$

avec les expressions (26) pour les $\eta_{|\alpha}$ et leurs conséquences

$$(30)\quad \eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}=y^{(\alpha-1)}_{\varpi_1,\ldots,\varpi_n}+\frac{t_0-t}{1}\,y^{(\alpha)}_{\varpi_1,\ldots,\varpi_n}+\ldots.$$

Remarquons que Ω admettant Df, Ω_0 admettra

$$(31)\quad D_0 f=\frac{\partial f}{\partial t}+y'\frac{\partial f}{\partial y}+\ldots+y^{(n-1)}\frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}};$$

car $\mathcal{R}$, transformant $\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{S}_0$, change Df en $D_0 f$.

Or, les $\eta_{|\alpha}$ et leurs dérivées $\eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$ étant des invariants de $D_0 f$, l'invariance de (29) par $D_0 f$ équivaudra à son invariance par $\frac{\partial f}{\partial t}$, et l'on obtiendra, en y faisant $t=t_0$ (sans modifier les $\eta_{|\alpha}$, ni les $\eta_{|\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$), le système équivalent $\overline{\Omega}_0$, dont les équations seront

$$(32)\quad \Pi_\omega[t_0;\ \ldots,\ \gamma_{\alpha;\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\eta_1,\ldots,\eta_n),\ \ldots;\ \ldots,\ \eta_{\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n},\ \ldots)=0 \qquad (\omega=1,2,\ldots,s),$$

compte tenu des équations (3).

On conclut donc que l'on connaît le *réduit* de Σ par $\mathcal{R}$, si l'on connaît les données initiales qui définissent la solution complète $\mathcal{F}$, génératrice de $\mathcal{R}$.

6. En identifiant les deux systèmes (29) et (32) par rapport aux $\gamma_{1\alpha;\varpi_1,\ldots,\varpi_n}$, on obtiendra, en considérant t et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ comme des variables indépendantes, un système différentiel, où φ sera l'inconnue. Ce sera l'*adjoint* de Σ dont l'une des solutions est la solution complète de $\mathcal{S}$ qui satisfait aux conditions initiales (3), pour $t = t_0$.

Les calculs qui y auront conduit étant de nature rationnelle, cet adjoint sera rationnel si Σ l'est, et si t_0 et les $\gamma_\alpha(c_1, \ldots, c_n)$ sont pris dans le domaine de rationalité Δ considéré.

La théorie générale s'appliquera donc, et les solutions *à point rationnel* seront *primitives*.

III. — Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une inconnue [12].

1. Les équations en question seront prises sous la forme résolue

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0\left(t;\ x_1, \ldots, x_n;\ z;\ \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right), \tag{1}$$

et l'on considérera les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$ comme des inconnues auxiliaires. Les systèmes $\mathcal{S}$ de la théorie générale seront ainsi les systèmes mixtes

$$\frac{\partial z}{\partial t} = q; \qquad \frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n, \qquad q = 0(t; x_1, \ldots, x_n; z; p_1, \ldots, p_n) \tag{2}$$

correspondant à une même valeur de n donnée.

Les *solutions complètes* $\mathcal{F}$ de la théorie générale seront les *intégrales complètes* au sens de Lagrange, des équations (1), c'est-à-dire les familles de solutions

$$z = \varphi(t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c), \qquad q = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \qquad p_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad p_n = \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \tag{3}$$

dépendant de $n+1$ constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_n, c$ pour lesquelles φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ sont, relativement à ces arguments, des fonctions indépendantes. De chacune d'elles on déduit, en effet, toute solution particulière de $\mathcal{S}$ (comme il est bien connu) sous la forme

$$z = \varphi[t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; \gamma(a_1, \ldots, a_n)], \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial a_\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

---

[12] J'ai donné autrefois (*Annales de l'École Normale Supérieure*, 3e série, t. 32, 1915) une théorie directe de la réductibilité de ces équations. Mais elle aurait besoin d'être révisée sur certains points.

où $a_1, \ldots, a_n$ sont des indéterminées auxiliaires, et $\gamma(a_1, \ldots, a_n)$ une fonction de ces indéterminées convenablement choisie.

Tout système (3) définit, du reste $\left(\text{si } \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} \text{ sont des fonctions de } a_1, \ldots, a_n, c \text{ indépendantes}\right)$, une solution complète $\mathfrak{F}$ d'un système $\mathfrak{S}$ et d'un seul, que l'on obtiendrait en éliminant $a_1, \ldots, a_n, c$ entre les équations (3).

On sait aussi que tout système $\mathfrak{S}$ a une solution complète et une seule satisfaisant à une *condition initiale* de la forme

$$\varphi(t_0; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c) = \xi(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c), \tag{5}$$

où t_0 est une valeur initiale arbitraire de t, et où ξ est une fonction de ses arguments arbitrairement donnée, sous réserve de l'indépendance, relativement à $a_1, \ldots, a_n, c$, de $\xi, \frac{\partial\xi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\xi}{\partial x_n}$.

Le système S de la théorie générale, *associé* au système $\mathfrak{S}$, d'équations (2) (qui en définit les solutions complètes) est formé de ces même équations, où l'on interprétera $z, q, p_1, \ldots, p_n$ comme des fonctions des $2n+2$ variables $t, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, c$.

2. Pour les *transformations auxiliaires* $\mathfrak{T}$ de la théorie générale, nous prendrons les transformations de contact de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n, z)$ qui laissent invariante la coordonnée t. Leur ensemble $(\mathfrak{T})$ est un groupe. Chacune a au moins deux équations directrices. Nous appellerons *normales* et nous désignerons par la lettre $\mathfrak{N}$ celles qui n'en ont que deux. Ces équations directrices étant alors mises sous la forme

$$t = t', \qquad z = \mathrm{V}(t; x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n; z'), \tag{6}$$

on dira que la transformation $\mathfrak{N}$ ainsi définie a pour *génératrice* la solution complète

$$z = \mathrm{V}(t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c). \tag{7}$$

Ce sera celle des transformations $\mathfrak{T}$ qui change les surfaces constituant cette solution complète en la famille $\mathfrak{F}_0$ des droites $x'_1 = a_1, \ldots, x'_n = a_n, z' = c$. Le système de ses équations se composera des équations (6) et des équations

$$q - \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t} = q' \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'}, \qquad p_\alpha = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_\alpha}, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'_\alpha} + p'_\alpha \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z'} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Il en résulte qu'elle change en $q' = 0$ une équation (1) lorsque celle-ci résulte de l'élimination de $x'_1, \ldots, x'_n, z'$ entre les équations

$$z = \mathrm{V}; \qquad p_\alpha = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \qquad q = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial t}, \tag{9}$$

c'est-à-dire lorsque sa génératrice (7) est solution complète du système $\mathfrak{S}$ qui a les équations (2) pour équations.

On conclut de ces observations que l'ensemble $(\mathfrak{S})$ des systèmes $\mathfrak{S}$ est une *classe* vis-à-vis du groupe $(\mathfrak{G})$, et que $q=0$, $\frac{\partial z}{\partial x_\alpha}=p_\alpha(\alpha=1, 2, \ldots, n)$, que nous désignerons par $\mathfrak{S}_0$, peut être pris pour *réduit* de cette classe.

D'une manière plus précise, soient $\mathfrak{F}_1$ et $\mathfrak{F}_2$ deux solutions complètes (d'un même système $\mathfrak{S}$ ou de deux); $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$ les transformations auxiliaires normales dont elles sont génératrices; et $\mathfrak{N}'_1$, $\mathfrak{N}'_2$ les inverses de celles-ci. La transformation produit $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}'_2$, où $\mathfrak{N}_1$ change $\mathfrak{F}_1$ en $\overline{\mathfrak{F}}_0$, et où $\mathfrak{N}'_2$ change $\overline{\mathfrak{F}}_0$ en $\mathfrak{F}_2$, change $\mathfrak{F}_1$ en $\mathfrak{F}_2$. Et réciproquement, si une transformation $\mathfrak{G}$ change $\mathfrak{F}_1$ en $\mathfrak{F}_2$, le produit $\mathfrak{G}\mathfrak{N}_2$ change $\mathfrak{F}_1$ en $\overline{\mathfrak{F}}_0$, de sorte que l'on a $\mathfrak{G}\mathfrak{N}_2=\mathfrak{N}_1$, d'où $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}'_2$.

Il y a donc, conformément aux hypothèses de la théorie générale, une transformation $\mathfrak{G}$ et une seule qui change $\mathfrak{F}_1$ en $\mathfrak{F}_2$, à savoir $\mathfrak{G}=\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}'_2$. On remarquera qu'il résulte de là que toute transformation, normale ou non, peut être mise sous cette forme d'une infinité de manières.

2 *bis*. Pour chaque système $\mathfrak{S}$ seront dites *réductrices* les transformations $\mathfrak{G}$ *normales* qui le changent en le *réduit* $\mathfrak{S}_0$, c'est-à-dire les transformations $\mathfrak{N}$ qui ont pour génératrices les diverses solutions complètes de $\mathfrak{S}$. Si cependant, $\mathfrak{S}$ est *semi-linéaire*, chacune de ses intégrales complètes (au sens de Sophus Lie) *à moins de* $(n+1)$ *dimensions* donne naissance à une transformation $\mathfrak{G}$, *à plus de deux équations directrices*, qui réduit $\mathfrak{S}$ à $\mathfrak{S}_0$. Mais, comme nous n'avons ici en vue que la recherche des solutions complètes, au sens strict de Lagrange, nous ferons abstraction de ces transformations $\mathfrak{G}$ non-normales, et nous réserverons le nom de *réductrices* à celles qui sont à la fois réductrices et normales.

3. Soit maintenant Σ un *sous-système* du type S *associé* à un système $\mathfrak{S}$ donné, d'équations (z). On pourra le supposer formé de S et d'un système complémentaire Σ d'où l'on aura fait disparaître, en se servant de S, l'inconnue q et toutes les dérivées partielles de $z, p_1, \ldots, p_n$ comportant une dérivation par rapport à t. On pourra aussi supposer que Ω demeure invariant par la transformation infinitésimale de contact

$$\mathrm{C}f=[\mathrm{W}, f]-\mathrm{W}\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad \text{où } \mathrm{W}=q-0. \tag{10}$$

On sait, en effet, que toute intégrale de $\mathfrak{S}$ est engendrée par des trajectoires (*caractéristiques*), de $\mathrm{C}f$; de sorte que toute solution de Σ satisfera aux équations obtenues en appliquant $\mathrm{C}f$ aux équations de Ω, et qu'il sera, dès lors, loisible d'adjoindre à Ω, sans changer les solutions de Σ, toutes celles qui ne seraient pas des conséquences algébriques de Ω. Le système Ω, étant ainsi supposé ne dépendre de t que comme d'un paramètre, ne pas faire intervenir l'inconnue g et admettre $\mathrm{C}f$, sera dit le *noyau* de Σ.

4. Cela posé, appliquons à Σ la transformation réductrice $\mathcal{R}$ qui a pour génératrice une solution complète $\mathcal{F}$ de $\mathcal{S}$, d'équation (7) : elle changera S en son *réduit* S_0, associé de $\mathcal{S}_0$, et Ω en un *réduit* Ω_0; et, par suite, changera $\Sigma = (S, \Omega)$ en son *réduit* $\Sigma_0 = (S_0, \Omega_0)$. Le *noyau réduit* Ω_0 ne dépendra pas de q', et t n'y sera qu'un paramètre. De plus, les équations (6) et (8) de $\mathcal{R}$ ayant pour conséquences

$$(11) \quad dz - q\,dt - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = \frac{\partial V}{\partial z'}(dz' - q'\,dt' - p'_1\,dx'_1 - \ldots - p'_n\,dx'_n),$$

et

$$(12) \quad W = q'\frac{\partial V}{\partial z'},$$

$\mathcal{R}$ changera Cf en $C_0 f = [q', f] - q'\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial t'}$, de sorte que Ω_0 admettra $\frac{\partial f}{\partial t}$, c'est-à-dire sera indépendant de t. On pourra donc, pour l'obtenir, donner à t, dans tout le calcul, (où il ne joue que le rôle d'une constante arbitraire) une valeur arbitraire t_0 : c'est-à-dire effectuer dans le système $\Omega^{(0)}$, déduit de Ω en faisant $t = t_0$, la transformation auxiliaire $\mathcal{R}^{(0)}$ qui a pour génératrice la fonction $\zeta(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c)$ qui est la valeur initiale pour $t = t_0$ de la génératrice $V(t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c)$ de $\mathcal{R}$.

Les règles classiques des changements de variables donneront, pour $\mathcal{R}^{(0)}$, des expressions explicites de $z, p_1, \ldots, p_n$ et de leurs dérivées (par rapport à $x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, c$) en fonction de $\zeta(x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n; z')$ et de ses dérivées, et des dérivées de $z', p'_1, \ldots, p'_n$ (par rapport à $x'_1, \ldots, x'_n$, $a_1, \ldots, a_n, c$). On les portera dans $\Omega^{(0)}$, et il ne restera plus qu'à remplacer $x_1, \ldots, x_n$, dans le système $\overline{\Omega}^{(0)}$ ainsi obtenu, par leurs valeurs tirées des équations

$$(13) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x'} + p'_\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial z'} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Il y aura des solutions complètes V de $\mathcal{S}$ pour lesquelles cette dernière partie du calcul se fera rationnellement. Telle sera celle qui se réduira, pour une valeur initiale $t = t_0$ donnée, à $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n - c$: nous l'appellerons la solution complète *principale*, relative à cette valeur t_0. La transformation $\mathcal{R}^{(0)}$ sera, pour elle, la transformation de contact involutive d'Ampère

$$(14) \quad \begin{cases} x'_\alpha = p_\alpha, \quad p'_\alpha = x_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \\ t' = t, \quad q' = -q, \quad z' = x_1 x'_1 + \ldots + x_n x'_n - z. \end{cases}$$

5. Reprenons maintenant le calcul du noyau réduit Ω_0 en laissant indéterminée la génératrice V de $\mathcal{R}$. On aura encore des formules explicites donnant $z, p_1, \ldots, p_n$ et leurs dérivées, au moyen de la fonction indéterminée $V(t; x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n; z')$ et de ses dérivées, en fonction de $t', x_1, \ldots, x_n$, $x'_1, \ldots, x'_n, z'$ et des dérivées de $z', p'_1, \ldots, p'_n$. On portera dans Ω ces expressions; mais il faudrait, pour avoir Ω_0, remplacer dans le système $\overline{\Omega}$ ainsi

obtenu, les variables $x_1, \ldots, x_n$ en fonction de $t, x'_1, \ldots, x'_n, z', p'_1, \ldots, p'_n$ au moyen des équations

$$\frac{\partial V}{\partial x'_\alpha} + p'_\alpha \frac{\partial V}{\partial z'} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n); \tag{15}$$

ce qui sera impossible.

On pourra cependant utiliser le système $\overline{\Omega}$ pour identifier le réduit général Ω_0 avec un réduit particulier Π calculé par la méthode du n° 4. Car cela équivaudra à identifier $\overline{\Omega}$ avec le système $\overline{\Pi}$ que l'on obtiendra en remplaçant, dans Π, $p'_1, \ldots, p'_n$ par les expressions qu'en donnent les équations (15). Cette identification sera conditionnée par un système différentiel liant la fonction $V(t; x_1 \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n; z')$ à ses arguments. En y remplaçant $x'_1, \ldots, x'_n, z'$ par $a_1, \ldots, a_n, c$, posant $z = V(t; x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n; c)$, et en lui adjoignant S, on aura ainsi (par des calculs rationnels) l'*adjoint* $\mathfrak{A}$ de Σ admettant pour solution la solution complète de $\mathfrak{S}$ qui aura servi à calculer le réduit Π de Ω.

6. On conclut de ce qui précède, sur le plan rationnel, que tout système $\mathfrak{S}$ rationnel possède des solutions complètes (dont les solutions principales relatives à des valeurs de t rationnelles) telles que, pour tout système rationnel de l'associé de $\mathfrak{S}$, l'adjoint auquel satisfait l'une d'elles est aussi rationnel : c'est-à-dire des solutions complètes *distinguées*. On est, dès lors, en mesure d'appliquer aux équations aux dérivées partielles (1), en ce qui concerne la recherche d'une intégrale complète, notre théorie générale de la réductibilité, dans son analyse et dans ses conclusions.

En conséquence, le mode de réductibilité spécial de chaque équation (1) réductible sera caractérisé par la structure d'un *groupe spécifique*, relatif à cette équation, c'est-à-dire au système $\mathfrak{S}$ qui lui correspond, et au domaine de rationalité $\mathfrak{D}$ choisi; et ce groupe sera composé des transformations $\mathfrak{G}$ [transformations de contact de l'espace $(t, x_1, \ldots, x_n, z)$ laissant invariante la coordonnée t] qui laissent invariants tous les sous-systèmes rationnels du système S associé à ce système $\mathfrak{S}$. Chacune des intégrales complètes de (1) (ou solutions complètes de $\mathfrak{S}$) sera, en ce qui concerne sa détermination par des équations rationnelles, inséparable de ses *conjuguées*, c'est-à-dire de ses homologues vis-à-vis de ce groupe spécifique. Il y en aura qui seront, avec leurs conjuguées, les solutions de *systèmes automorphes* rationnels ayant tous le groupe spécifique pour groupe d'automorphie. On les dira *primitives*. Telles seront, en particulier, les solutions complètes *distinguées* dont nous venons de constater, ci-dessus, l'existence.

Les fonctions rationnelles d'une solution complète $\mathfrak{F}$, indéterminée de $\mathfrak{S}$ donneront lieu, en ce qui concerne la rationalité de la *valeur* que prend l'une quelconque d'entre elles quand on y fait $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0$, $\mathfrak{F}_0$ étant une solution complète

particulière quelconque, à un *théorème de Galois*, c'est-à-dire à une extension aux équations (1) du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques de Galois. Une condition nécessaire de cette rationalité sera l'*invariance numérique* de cette valeur vis-à-vis des transformations du groupe spécifique; et cette condition sera suffisante si $\mathcal{F}_0$ est une solution complète primitive ([13]).

Pour se conformer plus strictement aux idées de Galois on peut substituer au groupe spécifique, dans l'énoncé de cette condition, soit le groupe des *permutations* que les transformations du groupe spécifique opèrent sur les intégrales de (1) considérées comme des objets distincts, soit le groupe de celles qu'elles effectuent, de même sur ses intégrales complètes : groupes que nous nommerons respectivement, *groupe de Galois*, et *groupe de réductibilité*.

On pourra enfin remplacer ce dernier par une des représentations analytiques dont il sera susceptible. Par extension d'une terminologie classique, nous nommerons le groupe ainsi obtenu *groupe de rationalité* de l'équation.

On pourra faire en sorte que ce groupe de rationalité soit un *groupe de transformations de contact de l'espace paramétrique* $(a_1, \ldots, a_n, c)$ dont les coordonnées $a_1, \ldots, a_n, c$ figurent dans la forme générale (3) des intégrales complètes (ou solutions complètes).

Cela tient à ce que, comme Sophus Lie l'a montré, on passe de toute intégrale complète à toute autre par une telle transformation : ce qu'il est, du reste, facile de déduire du résultat qui termine le n° 2 de la présente Note. Appliqué, en effet, au *réduit* de la classe $(\mathcal{S})$, c'est-à-dire à l'équation $q = 0$, il montre que l'on passe de toute intégrale complète, $z = W_1(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n, c)$ de celle-ci à toute autre par une transformation de contact de l'espace $(x_1, \ldots, x_n, z)$, et par suite, par raison de symétrie, par une transformation de contact de l'espace paramétrique $(a_1, \ldots, a_n, c)$. Soient alors $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux solutions complètes quelconques d'un même système $\mathcal{S}$ quelconque, et soit $\mathcal{R}$ une transformation réductrice de ce système : on aura $\mathcal{R}[\mathcal{F}_2] = \mathcal{C}(\mathcal{R}[\mathcal{F}_1])$, $\mathcal{C}$ étant une certaine transformation de contact de l'espace paramétrique $(a_1, \ldots, a_n, c)$; et, par suite, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{C}$ opérant respectivement sur deux systèmes d'indéterminées indépendants l'un de l'autre, $\mathcal{R}[\mathcal{F}_2] = \mathcal{R}(\mathcal{C}[\mathcal{F}_1])$. D'où l'on conclut $\mathcal{F}_2 = \mathcal{C}[\mathcal{F}_1]$, ce qui exprime précisément la propriété en question.

([13]) Sur les termes de *valeur* et d'*invariance numérique*, voir, pages 61 et 34 respectivement, les Mémoires que j'ai publiés dans les *Annales de l'École Normale*, en 1941 et 1942.

QUELQUES RÉFLEXIONS

A PROPOS DE

LA PARATAXIE

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. *Introduction.* — En 1930 ([1]) j'avais indiqué le résultat suivant : *un cycle de l'espace anallagmatique à 3 dimensions peut être représenté par ses projections sur le plan xOy, faites à partir de chacun de ses foyers;* j'avais aussi indiqué *le groupe à 20 paramètres réels, des transformations changeant un cycle réel en un nouveau cycle réel, deux cycles paratactiques restant paratactiques.* J'avais pu, ainsi, réintégrer dans le domaine réel ([2]) la belle configuration, imaginaire toutefois, découverte par Tzitzéica et M. Barbilian ([3]) : *dix cycles d'un même plan, tels que chacun touche quatre autres cycles de cette même configuration;* il suffit d'adjoindre à cette configuration celle qui en est la conjuguée pour obtenir dix cycles réels de l'espace, tels que chacun soit paratactique à quatre autres de la même configuration. J'expose ensuite quelques réflexions sur l'espace anallagmatique à 3 dimensions, réel ou complexe, que M. Élie Cartan m'a communiquées à propos de mon fascicule sur les *Cycles paratactiques* ([4]).

2. *Représentation d'un cycle par ses foyers ou par deux cycles du plan xOy.* — On sait qu'un cercle, de l'espace anallagmatique réel ou complexe à 3 dimensions, de rayon fini, peut être représenté par ses *foyers*, centres des sphères de rayon nul issues de ce cercle; s'il s'agit d'une *droite*, les sphères de rayon

([1]) *C. R. Acad. Sc. Paris*, 190, 1930, p. 564-567.

([2]) B. GAMBIER, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LV, mars 1931.

([3]) D. BARBILIAN, *Les cas d'exception de certaines propriétés quadratiques* (*Bull. de Math. et Phys. de l'Éc. Polyt. de Bucarest*, 1re année, 1929, p. 1-17; G. TZITZÉICA, *Sur certaines propriétés quadratiques*, même Recueil, 1929, p. 18-21.

([4]) B. GAMBIER, *Mémorial des Sciences Mathématiques*, fasc. CIV, Gauthier-Villars, 1944.

nul doivent être remplacées par les *plans isotropes* issus de la droite; la notion de *centre* donne alors lieu à des difficultés et ne permet plus de distinguer des droites parallèles; on évite cette ambiguïté en prenant comme *éléments focaux* d'un cercle (non rectiligne) les *sphères du rayon nul* elles-mêmes, au lieu de leur centre, et, comme éléments focaux d'une *droite non isotrope*, les *plans isotropes* déjà signalés. Avec cette définition, une transformation du groupe conforme fait correspondre à chaque élément focal du cercle ou de la droite primitifs un élément focal toujours défini sans ambiguïté. Pour respecter les habitudes, je parlerai presque toujours de foyers et non d'éléments focaux; mais, si des droites intervenaient au lieu de cercles, il n'y aurait aucune difficulté à modifier l'énoncé; je montrerai aussi, plus loin, que l'on peut, avec M. Cartan, assimiler une sphère-point à un point, qui en est le centre et un plan isotrope, à un certain point.

Orienter un *cercle* C, de façon à le transformer en cycle $\vec{C}$, revient à attribuer le rang 1 à l'un des foyers que nous appelons F′ ou foyer *prime*, le rang 2 à l'autre, F″ ou foyer *seconde* (1). Deux cycles opposés $\vec{C}$, $(-\vec{C})$ ont un même cercle comme support, le foyer prime de chacun étant foyer seconde de l'autre.

La Géométrie descriptive montre les avantages d'une double construction plane substituée à une unique construction spatiale; de même, *nous substituons à chaque cycle de l'espace les traces de ses éléments focaux sur* xOy : mais, puisque tout cercle ou cycle de xOy a lui aussi deux sphères focales, il y a quelques précisions à fournir.

En effet un cercle ou cycle *réel* de l'espace à 3 dimensions conduit à étudier des cercles ou cycles du plan xOy, en général *imaginaires*, sauf si le cercle de l'espace vient sur le plan xOy. Il n'y a aucune difficulté pour orienter un cycle *réel* de xOy par le *signe de son rayon* : le rayon est positif si le cycle est parcouru dans le sens direct (sens de la rotation d'amplitude $\frac{\pi}{2}$ amenant $\overrightarrow{Ox}$ sur $\overrightarrow{Oy}$), négatif dans le cas contraire; si le cercle est imaginaire, on ne peut donner qu'une définition analytique; le rayon du cercle, quel que soit le système de coordonnées adopté, est fourni par un certain radical carré et la détermination adoptée pour ce radical individualise celui des deux cycles que l'on choisit : $\vec{\gamma}$, tandis que $(-\vec{\gamma})$ correspond à l'autre détermination; ρ étant le rayon de $\vec{\gamma}$, on adoptera comme foyer *prime* de $\vec{\gamma}$ celui qui a pour cote $i\rho$; *pour définir complètement un cycle de* xOy, *il suffit donc d'en donner le foyer prime*.

Si nous envisageons deux cycles $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$, *réels*, du plan xOy, tangents, leurs rayons sont de même signe ou de signes contraires suivant que le contact est

(1) Dans le cours de ce travail, nous laisserons *prime* et *seconde* invariables; on peut imaginer que *prime* est l'abréviation de *d'espèce prime*.

interne ou externe : de toutes façons, *la distance des centres est égale à la valeur absolue de la différence des rayons.* Il est équivalent de dire que, $\vec{\gamma_1}$, $\vec{\gamma_2}$ *étant tangents en* M, *leurs foyers prime* F'_1, F'_2 *sont sur une même droite isotrope* $MF'_1F'_2$ *et réciproquement; c'est cette propriété analytique qui permet de définir le contact de deux cycles réels ou imaginaires du plan* xOy *: le carré de la distance des centres est encore égal au carré de la différence des rayons.* Les foyers seconde donnent de même la droite isotrope $MF''_1F''_2$; si $\vec{MT}$ est la tangente orientée au point de contact M, le plan isotrope $MTF'_1F'_2$ est l'élément focal prime de $\vec{MT}$, le plan $MTF''_1F''_2$ l'élément focal seconde; on oriente donc une droite de xOy en orientant un cercle de xOy tangent à cette droite.

Si nous considérons un cycle quelconque $\vec{C}$ de l'espace, puis ses sphères focales de centre F', F'', nous prenons les *cercles* C', C'' d'intersection de ces sphères par xOy et nous les orientons de sorte que les *cycles* $\vec{C'}$, $\vec{C''}$ aient *tous deux pour foyers prime* F', F'' respectivement : cette définition a, comme nous le verrons, beaucoup d'avantages par rapport à celle qui consisterait à orienter $\vec{C''}$ de façon que F'' soit foyer seconde (et non prime) de $\vec{C''}$. Tout d'abord remarquons que tous les cycles de xOy seront uniformément définis par leur foyer prime, sans avoir à dire si un tel cycle est une image prime ou seconde.

Deux cycles paratactiques $\vec{C}$, $\vec{C_1}$ donnent deux images prime $\vec{C'}$, $\vec{C'_1}$ tangentes entre elles au pied sur xOy de la droite isotrope $F'F'_1$; les deux sphères focales prime se raccordent le long de cette droite; on a des propriétés analogues pour les images secondes $\vec{C''}$, $\vec{C''_1}$. *Les réciproques sont vraies : pour que deux cycles soient paratactiques, il est nécessaire et suffisant que leurs images de même nom soient tangentes.*

Considérons deux cycles opposés $\vec{C}$ et $(-\vec{C})$; l'image prime de l'un est l'image seconde de l'autre; avec la convention non adoptée, il faudrait, pour obtenir les images de $(-\vec{C})$ à partir de celles de $\vec{C}$, d'abord changer le numéro d'ordre, puis changer l'orientation.

Soient deux cycles *antitactiques* $\vec{C}$, $\vec{C_1}$ d'images respectives $(\vec{C'}, \vec{C''})$, $(\vec{C'_1}, \vec{C''_1})$; puisque $(-\vec{C_1})$ est paratactique à $\vec{C}$ et que $(-\vec{C_1})$ a pour images : *prime* $\vec{C'_1}$, *seconde* $\vec{C''_1}$, les cycles $(\vec{C'}, \vec{C''_1})$ sont tangents et de même $(\vec{C''}, \vec{C'_1})$: *les images de noms contraires sont tangentes; réciproquement, cette double condition assure que les cycles de l'espace sont antitactiques.* Avec la convention non adoptée, les images de noms contraires eussent été improprement tangentes.

Deux cycles *conjugués* $\vec{C}$, $\vec{C_1}$ sont à la fois *paratactiques* et *antitactiques; donc, chaque image de l'un est tangente aux deux images de l'autre et réciproquement :* ici encore, la convention non adoptée eût singulièrement compliqué l'énoncé.

La construction, dans l'espace, des cycles conjugués à un cycle donné $\vec{C}$ réel se ramène donc à un problème de géométrie plane : *construire un cycle tangent à deux cycles donnés;* ces deux cycles sont imaginaires conjugués, de sorte que le cycle imaginaire conjugué du cycle tangent est automatiquement lui aussi tangent et fournit la seconde image du cycle de l'espace.

Pour que deux cycles soient *cosphériques*, il est nécessaire et suffisant qu'ils possèdent un cycle conjugué commun : les points communs aux deux cycles sont les foyers de ce cycle; autrement dit, *il est nécessaire et suffisant que le total des quatre cycles images admette deux cycles tangents communs;* le birapport des points de contact d'un de ces cycles tangents (évalué sur ce cycle) est égal à $\left(-\operatorname{tang}^2\frac{V}{2}\right)$, où V est l'angle d'intersection. Si l'on appelle M_1, M_2 les deux points communs, et $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ les cycles de xOy dont M_1, M_2 sont les foyers prime, deux circonstances différentes se produisent suivant que M_1, M_2 sont imaginaires conjugués ou sont réels; dans le premier cas, $\vec{\gamma}_1$, $\vec{\gamma}_2$ sont imaginaires conjugués et sont les images, prime et seconde, du cycle conjugué commun réel; dans le second cas, $\vec{\gamma}_1$ est imaginaire conjugué de lui-même (car il a, dans xOy, une équation à coefficients réels), de sorte qu'il constitue à la fois l'image prime et l'image seconde du point M_1; il en est de même pour $\vec{\gamma}_2$ et M_2.

Il est naturel d'étudier surtout les cycles *réels* de l'espace anallagmatique à 3 dimensions; un cycle $\vec{C}$ réel donne deux images $\vec{C}'$, $\vec{C}''$ dont les supports sont des cercles de xOy, *imaginaires conjugués l'un de l'autre*. Les foyers F', F'' de $\vec{C}$ ont des cotes $a+ib$, $a-ib$ imaginaires conjuguées; d'après nos conventions, les rayons de $\vec{C}'$, $\vec{C}''$ sont égaux au quotient par i de $a+ib$ pour $\vec{C}'$, de $a-ib$ pour $\vec{C}''$; *donc le rayon de chaque image est le nombre opposé à l'imaginaire conjuguée de l'autre.* A un cycle arbitraire $\vec{\gamma}$ tracé dans le plan xOy correspond un seul cycle $\vec{C}$ de l'espace, dont $\vec{\gamma}$ est l'image prime, et par suite un seul cycle de l'espace, à savoir $(-\vec{C})$ dont $\vec{\gamma}$ est l'image seconde; en effet si $\vec{\gamma}$ est une image prime, le foyer prime de $\vec{\gamma}$ est un point F' qui est le foyer prime de $\vec{C}$, tandis que le point F'' imaginaire conjugué de F' est le foyer seconde de $\vec{C}$: le cycle $\vec{C}$ est ainsi parfaitement connu.

Un cycle $\vec{C}$ tracé dans xOy a pour image prime lui-même et pour image seconde le cycle opposé $(-\vec{C})$.

Un point réel M peut être considéré comme un cycle de rayon nul et de plan indéterminé : les deux foyers sont confondus avec M et les images de M sont un seul et même cycle de xOy.

Une congruence paratactique réelle orientée $\vec{\Gamma}$ est engendrée par les cycles réels dont les foyers prime et seconde décrivent respectivement les droites fixes Δ', Δ'' imaginaires conjuguées l'une de l'autre; Δ' coupe $x\mathrm{O}y$ en M', Δ'' le coupe en M''; le plan isotrope unique issu de Δ' (ou Δ'') a pour trace sur $x\mathrm{O}y$ une droite δ' (ou δ'') issue de M' (ou M''), que nous orientons de sorte que le plan $\delta'\Delta'$ (ou $\delta''\Delta''$) soit le plan isotrope prime de $\vec{\delta'}$ (ou $\vec{\delta''}$); les images, prime (ou seconde), de tous les cycles de la congruence sont toutes tangentes en M' (ou M'') à $\vec{\delta'}$ (ou $\vec{\delta''}$); on peut donc dire que l'*élément de contact orienté, complexe*, $(\mathrm{M}', \vec{\delta'})$ *est l'image prime en bloc de la congruence orientée* $\vec{\Gamma}$, *tandis que* $(\mathrm{M}'', \vec{\delta''})$ *en est l'image seconde*. Les deux plans isotropes $(\delta'\Delta')$, $(\delta''\Delta'')$ se coupent suivant le cycle rectiligne de la congruence; cette droite, souvent appelée *axe de la congruence*, est orientée de sorte que $\vec{\delta'}$, $\vec{\delta''}$ soient ses images prime et seconde. Si $\vec{\mathrm{C}}$ est un cycle de la congruence $\vec{\Gamma}$, le cycle $\vec{\mathrm{C}_1}$, de cette même congruence, conjugué de $\vec{\mathrm{C}}$, est tel que l'image $\vec{\mathrm{C}'_1}$ soit tangente à $\vec{\mathrm{C}'}$ en M' et touche $\vec{\mathrm{C}''}$: cela détermine $\vec{\mathrm{C}_1}$ d'une façon unique; pour la même raison l'image $\vec{\mathrm{C}''_1}$ est tangente à $\vec{\mathrm{C}''}$ en M'' et touche $\vec{\mathrm{C}'}$.

La géométrie des ∞^6 *congruences paratactiques réelles orientées de l'espace anallagmatique à 3 dimensions est ainsi ramenée à celle des éléments de contact orientés du plan* $x\mathrm{O}y$; on doit toutefois signaler qu'*il n'existe aucune correspondance biunivoque et bicontinue entre les éléments de contact du plan projectif complexe et les points de l'espace projectif complexe* (raison topologique); nous verrons au paragraphe 4 qu'il existe une correspondance biunivoque et bicontinue entre les deux variétés à 3 dimensions complexes suivantes : points de l'espace projectif complexe d'une part, droites isotropes de l'espace anallagmatique complexe d'autre part. Or une congruence paratactique réelle orientée est définie d'une façon biunivoque, bicontinue, par la droite isotrope qui porte les foyers prime des cycles. On se rend compte de l'inexistence d'une correspondance biunivoque, bicontinue, entre les éléments de contact du plan projectif complexe et les points de l'espace projectif complexe en considérant une droite isotrope $\vec{\delta'}$ tracée dans $x\mathrm{O}y$: cette droite donne un point M' indéterminé sur elle.

Étudions *les* ∞^2 *congruences paratactiques de l'une ou l'autre espèce orthogonales à une même sphère* Σ *de centre réel et rayon imaginaire pure* : Δ', Δ'' sont alors deux génératrices imaginaires conjuguées de Σ; elles sont donc de même système; deux génératrices imaginaires conjuguées, prises dans le système opposé à celui de Δ', Δ'', fournissent une congruence paratactique d'espèce opposée; la droite image δ', du plan $x\mathrm{O}y$, peut être considérée comme trace sur $x\mathrm{O}y$ d'un plan isotrope tangent à Σ, donc au cône isotrope concentrique

à Σ; nous allons donc envisager le cycle $\vec{\sigma}$ de xOy dont le foyer *prime* est le centre de Σ et nous choisissons une tangente (orientée bien entendu) de $\vec{\sigma}$: elle joue le rôle de $\vec{\delta'}$ ou $\vec{\delta''}$; supposons que ce soit $\vec{\delta'}$; le plan isotrope *prime* issu de $\vec{\delta'}$ contient le centre de Σ et une direction isotrope unique à laquelle nous menons la parallèle par l'un ou l'autre des deux points M′, $\overline{M'}$ où $\vec{\delta'}$ coupe le cercle σ_1 (qu'il est inutile d'orienter), trace de Σ sur xOy; on a ainsi, si l'on choisit M′, une droite Δ′ située sur Σ, définissant, comme il a été expliqué, une congruence paratactique réelle orientée; si l'on adopte $\overline{M'}$, au lieu de M′, on remplace Δ′ par sa symétrique relativement au centre de Σ et nous trouvons une congruence qui est la symétrique, par rapport au centre de Σ, de celle définie par Δ′ : ces deux congruences sont d'espèce opposée. Si la tangente, déjà choisie, du cycle $\vec{\sigma}$ est considérée comme droite $\vec{\delta''}$, le plan isotrope *prime* issu de la tangente en jeu ne change pas, comme suite des conventions adoptées ici et nous trouvons les mêmes congruences paratactiques, où chaque cycle est simplement remplacé par son opposé.

3. *Transformation des cycles en cycles avec conservation de la parataxie.* — La transformation conforme réelle de l'espace anallagmatique change un cycle réel $\vec{C}$ en un nouveau cycle $\vec{C_1}$ réel; nous avons ainsi *le groupe général de transformations ponctuelles réelles transformant les cycles en cycles avec conservation de la parataxie.* Mais il existe *des transformations plus générales, qui ne sont ni ponctuelles, ni transformations de contact, changeant un cycle réel en cycle réel, conservant la parataxie : elles forment un groupe* G *à* 20 *paramètres réels et renferment le groupe conforme comme sous-groupe.*

Les foyers F′, *prime*, des ∞^6 cycles réels de l'espace anallagmatique réel à 3 dimensions remplissent un espace anallagmatique complexe (F′) à 3 dimensions, sur lequel nous pouvons opérer une transformation conforme T′ (complexe) à 10 paramètres complexes; un cycle réel $\vec{C}$ a deux foyers F′, F″ imaginaires conjugués; ayant transformé F′ en F'_1 par l'opération T′, il suffit d'associer à F'_1 le point imaginaire conjugué F''_1 pour déduire de $\vec{C}$ un nouveau cycle $\vec{C_1}$ réel aussi; cela revient à dire que l'espace (F″), conjugué de (F′), a été soumis à la transformation conforme T″, complexe, conjuguée de T′. Puisque deux cycles paratactiques $\vec{C}$, $\vec{\Gamma}$ donnent deux foyers prime F′, Φ′ reliés par une droite isotrope, transformée en une nouvelle droite isotrope, *les cycles transformés* $\vec{C_1}$, $\vec{\Gamma_1}$ *sont encore paratactiques, mais l'angle de parataxie change en général;* on doit en effet considérer la sphère Σ contenant les deux droites isotropes F′Φ′, F″Φ″ qui sont sur Σ du même système; le birapport des génératrices de Σ, de système opposé, issues de F′, Φ′, F″, Φ″ est égal à $\left(-\tan^2\frac{V}{2}\right)$, où V est l'angle

de parataxie; ce birapport change au cours de la transformation; nous donnerons des exemples mettant cette variation en évidence.

Un résultat important est qu'une *congruence paratactique se transforme en une nouvelle congruence paratactique;* l'espèce de la congruence peut être ou non changée.

Voyons ce que deviennent *deux cercles conjugués* C, C_1. Le cercle C est support commun de deux cycles $\vec{C}$, $\left(-\vec{C}\right)$ tous deux paratactiques aux cycles analogues $\vec{C_1}$, $\left(-\vec{C_1}\right)$. Soient F, Φ les deux foyers du cercle C; par la transformation T′ les points F, Φ deviennent F′, Φ′; par T″, ils deviennent F″, Φ″; on peut supposer que $\vec{C}$ a pour foyer prime F, de sorte que la transformation (T′, T″) change $\vec{C}$ en le cycle de foyers (F′, Φ″) et $\left(-\vec{C}\right)$ en le cycle de foyers (Φ′, F″); le cercle C_1 conduit de même aux cycles (F_1', Φ_1''), (Φ_1', F_1'') qui sont tous deux paratactiques à chacun des cycles (F′, Φ″), (Φ′, F″) (1).

Le caractère antitactique se perd : deux cycles (F′, F″), (Φ′, Φ″) sont antitactiques si F′Φ″ est une droite isotrope, ainsi que la droite conjuguée F″Φ′; il n'y a aucune raison pour que, après transformation, les droites $F_1'\Phi_1''$ ou $F_1''\Phi_1'$ soient isotropes.

Une congruence paratactique, non dégénérée, est définie par les *deux droites isotropes conjuguées non sécantes* Δ′, Δ″, lieux des foyers prime ou seconde; choisissons sur Δ′, Δ″ deux points conjugués F′, F″ et joignons-les à un point O réel arbitraire; de O menons les droites $\overline{\Delta'}$, $\overline{\Delta''}$ parallèles à Δ′, Δ″ respectivement; ces droites sont encore isotropes et conjuguées; elles définissent une *congruence paratactique dégénérée* formée des cycles tangents entre eux en O, la tangente commune étant perpendiculaire en O à $\overline{\Delta'}$, $\overline{\Delta''}$ et il suffit que T′ soit la translation $\overrightarrow{F'O}$, T″ la translation $\overrightarrow{F''O}$ pour que la congruence non dégénérée se transforme en la congruence dégénérée. *On peut, d'une infinité de façons, transformer une congruence paratactique donnée, dégénérée ou non, en une autre, elle-même dégénérée ou non, donnée* a priori.

Nous allons étudier *le cas où* T′ *est la translation* $i\vec{A}$, *où* $\vec{A}$ *est un vecteur réel:* T″ est la translation $\left(-i\vec{A}\right)$. *Si* $\vec{C}$ *est un cycle réel, dont le transformé est* $\vec{\Gamma}$, *la figure* F′Φ′F″Φ″ *formée par les foyers primitifs et transformés est un parallélogramme, dont le centre* ω *est le centre commun de* $\vec{C}$ *et* $\vec{\Gamma}$. Or M. Robert a remarqué (2) qu'un cycle $\vec{C}$ de centre ω et rayon R peut être représenté par un

(1) Un point M réel est remplacé par un cycle dont les foyers prime et seconde sont les transformés de M par T′ et T″; deux cycles qui ont un point commun M sont remplacés par deux cycles paratactiques au cycle transformé de M; deux cycles qui ont deux points communs réels sont donc remplacés par deux cycles paratactiques aux cycles transformés des deux points.

(2) *Mémorial des Sciences math.*, fascicule CIV déjà cité, p. 40-43.

vecteur $\overrightarrow{\omega\Omega}$, de longueur R, porté à partir du centre ω de $\vec{C}$ sur l'axe de $\vec{C}$, de sorte que l'observateur ayant les pieds en ω, la tête en Ω, voit le cycle tourner autour de lui dans le sens direct; il est évident que la donnée de ω et Ω permet de placer F', F'', donc d'avoir $\vec{C}$ d'une façon unique; en ajoutant géométriquement au vecteur $\overrightarrow{\omega\Omega}$ le vecteur $\vec{A}$, et conservant l'origine ω, on obtient le vecteur représentatif de $\vec{\Gamma}$. Un point réel M est remplacé par un cycle de centre M, de plan perpendiculaire à l'axe portant $\vec{A}$, et de rayon égal à la longueur de $\vec{A}$. Plus généralement considérons un cycle tracé dans un plan perpendiculaire à $\vec{A}$; on a choisi un axe $\vec{\alpha}$ orienté parallèle au support de $\vec{A}$ et nous appelons a le nombre positif ou négatif, qui mesure le vecteur $\vec{A}$ quand $\vec{\alpha}$ est choisi comme axe de référence; nous appelons ρ le rayon du cycle, rayon positif si le cycle tourne dans le sens direct autour de l'observateur traversé des pieds à la tête par un axe parallèle à $\vec{\alpha}$, et de même sens, issu du centre du cercle; le cycle transformé est concentrique au premier, dans le même plan et a pour rayon, en grandeur et signe, $(a+\rho)$.

Nous allons étudier un tore d'axe parallèle à $\vec{A}$ et les parallèles, les méridiens, les cercles de Villarceau de ce tore. Nous orientons tous les parallèles dans le même sens; ils sont remplacés par des parallèles concentriques, de rayon égal à celui du parallèle correspondant, augmenté algébriquement de a. On obtient donc les parallèles d'un nouveau tore dont le cercle méridien provient du cercle méridien primitif par une translation perpendiculaire à l'axe du tore, égale à a, effectuée dans un sens convenable. *En tenant compte d'une homothétie et d'un déplacement, on voit donc que les familles de parallèles* (1) *de tous les tores* (*tore usuel sans point conique, ou tore à points coniques engendré par la rotation d'un cercle autour d'une droite de son plan le coupant en deux points*) *sont égales vis-à-vis de notre groupe* G.

Or, si l'on déplace le cercle méridien de façon à faire venir son centre sur l'axe, on obtient une sphère et une *famille de parallèles, chaque parallèle étant le support de deux cycles opposés :* une inversion effectuée à partir du pôle commun à ces parallèles fournit *une famille de cercles concentriques tracés dans un même plan, chaque cercle portant deux cycles opposés : c'est une nouvelle figure égale à la précédente.*

Nous allons montrer maintenant que la *famille des méridiens d'un tore quelconque est égale à la famille déjà considérée des parallèles d'un tore quelconque, et cela, que le tore soit ou non à points coniques.* Sur un tore, non sphérique, l'orientation d'un premier méridien sera choisie arbitrairement et entraîne,

(1) Sur chaque tore les parallèles sont orientés tous dans le même sens, le choix de ce sens étant d'ailleurs indifférent.

par continuité, l'orientation des autres méridiens; mais sur la sphère, on devra considérer chaque méridien comme support de deux cycles opposés. Il y a une raison de topologie évidente qui, soit pour les parallèles, soit pour les méridiens, entraîne cette conséquence.

Appelons a la distance à l'axe du centre du cercle méridien, b le rayon du cercle méridien, a et b étant positifs; supposons $b < a$ de façon à avoir le tore usuel sans points coniques et adoptons les axes habituels : Oz axe du tore; O centre du tore. Le cercle méridien situé dans xOz du côté des x positifs a pour foyers

$$F'(a, ib, o), \quad F''(a, -ib, o).$$

Supposons que la transformation T' soit l'homothétie de pôle O et rapport i; T'' est aussi une homothétie de pôle O et rapport $(-i)$. Le cercle méridien envisagé a pour transformé le cycle de foyers

$$\Phi'(ia, -b, o), \quad \Phi''(-ia, -b, o).$$

Le transformé est situé dans le plan yOz, a pour centre le point $(o, -b, o)$ de Oy, et pour rayon a; ce cercle coupe Oz, puisque $a > b$; les méridiens du premier tore, dépourvu de point conique, sont remplacés par les méridiens du second tore qui a des points coniques.

Dans ce raisonnement, b peut devenir nul; le *premier tore se réduit alors à un cercle et les méridiens aux points de ce cercle; le second tore se réduit à une sphère dont on étudie une famille de méridiens* (du moins, ce résultat sera établi à la fin du paragraphe actuel).

D'autre part *un tore sans point conique a deux axes de révolution anallagmatique*, dont l'un est l'axe métrique; avec les notations qui précèdent $(a > b > o)$, l'axe anallagmatique est le cercle de centre O, tracé dans xOy avec le rayon $\sqrt{a^2 - b^2}$; une inversion effectuée à partir d'un point de l'axe de révolution circulaire convertit le tore en un nouveau tore, le rôle des axes s'étant échangé, les méridiens de l'un devenant les parallèles de l'autre. La proposition énoncée en résulte : *une famille de méridiens d'un tore quelconque (à points coniques ou non), une famille de parallèles d'un tore quelconque (à points coniques ou non), ne constituent qu'une seule famille vis-à-vis de notre groupe; cette famille peut être réduite encore aux points réels d'un cercle ou d'une droite réels, ou encore à un faisceau de cercles quelconques (sur une sphère on prend une famille de parallèles ou de méridiens, et l'on fait une inversion à partir d'un point arbitraire de la sphère); on peut aussi obtenir les génératrices ou les parallèles d'un cône quelconque de révolution : méridiens ou parallèles d'un tore à point conique, transformés par inversion à partir de l'un des points coniques.* Cet ensemble de métamorphoses d'une famille de courbes toujours égale à elle-même est vraiment curieux; nous allons donner encore quelques formes saisissantes par leur simplicité; partant des points réels d'une droite

réelle ou d'un cercle réel, si nous utilisons comme transformation T' la translation $i\vec{A}$, et T'' la translation $(-i\vec{A})$, nous obtenons *une série d'anneaux tous égaux, de plans parallèles, ayant pour centres les points de la droite ou du cercle;* si nous partons d'une droite, nous avons *les sections circulaires d'un cylindre du second degré;* on peut aussi supposer que les anneaux égaux soient dans un même plan contenant la droite ou dans le plan du cercle. Il est facile de voir que nous pouvons obtenir aussi une *famille de génératrices d'un hyperboloïde de révolution à une nappe;* en effet, prenons un tore sans points coniques; nous appelons a la distance du centre des méridiens à l'axe, b leur rayon et nous supposons $0 < b < a$; nous supposons que T' soit la translation parallèle à l'axe du tore, d'amplitude $i\sqrt{a^2-b^2}$, T'' la translation opposée; tous les méridiens sont conjugués à l'axe de rotation anallagmatique circulaire, lequel, considéré comme *cercle* et non *cycle*, donne deux *cycles* transformés, l'un Γ réduit à un point qui est le centre du tore, l'autre Γ' concentrique à l'axe circulaire et de rayon double; les transformés des méridiens sont donc des cycles passant en O et paratactiques au cercle Γ'; une inversion de pôle O convertit ces cercles en droites engendrant un hyperboloïde de révolution.

Nous devons signaler que nous avons trouvé *plusieurs familles d'éléments dépendant rationnellement d'un paramètre, égales toutes entre elles, sauf une famille exceptionnelle qui n'est égale à aucune des autres;* par exemple, un faisceau de cercles représenté par deux cercles de base, $x^2+y^2+m=0$, $x=0$; le paramètre est m; on peut prendre m quelconque, *mais non nul.* Inutile de revenir sur les métamorphoses de cette figure. Le faisceau défini par $x^2+y^2=0$, $x=0$ appartient à une congruence paratactique dégénérée, tandis que le faisceau $x^2+y^2+m=0$, $x=0$ ne rentre dans aucune congruence paratactique; par conséquent la figure exceptionnelle ne peut jamais se transformer en l'une des figures non exceptionnelles. Il y a là une circonstance qui mérite une explication; nous la fournirons par comparaison avec la proposition de géométrie métrique plane : *toutes les hyperboles du faisceau* $x(y-\lambda)-1=0$ *sont égales;* pourtant, la valeur $\lambda=\infty$ fournit la droite Oy, qui n'est égale à aucune courbe du faisceau; l'explication de ce cas est immédiate, car on passe de l'hyperbole λ à l'hyperbole $xy-1=0$ par une translation d'amplitude λ parallèle à Oy; prenons sur l'hyperbole $xy-1=0$ les segments curvilignes compris entre les parallèles successives à Ox, d'équations $y=1$, $y=2$, ..., $y=n$, $y=n+1$, ... Le segment de rang $n(n<y<n+1)$ est déplacé parallèlement à Oy de façon que son origine vienne sur Ox, l'amplitude du déplacement est mesurée par le nombre n; quand n devient très grand, le segment transporté se confond *pratiquement* avec le segment $(0, 1)$ de l'axe Oy et c'est pour cela que l'on peut dire que, *asymptotiquement*, l'axe Oy rentre dans la famille; le paradoxe tient à ce que la géométrie projective, et non plus métrique, intervient elle aussi : avant le déplacement, le segment de

rang n est, pour la géométrie projective, pratiquement réduit à un point; après le déplacement, il a retrouvé sa notion de longueur. De même les cercles du faisceau $x^2+y^2+m+2\lambda x=0$ comprennent pour $m\neq 0$ deux cercles distincts, de rayon nul; pour $m=0$ ces deux cercles de rayon nul se confondent. Un autre exemple encore plus simple est obtenu par le faisceau de cercles concentriques $x^2+y^2-\lambda=0$, étudié du point de vue du groupe des homothéties réelles ou non de pôle O; ces cercles sont tous égaux, mais $\lambda=0$ donne un cercle de rayon nul non égal aux autres.

Reprenons les tores d'axe Oz, de centre O, les notations a, b employées à l'instant; T′ est supposée être la translation $i\lambda$, parallèle à Oz, T″ la translation opposée. Cherchons ce que deviennent les cercles de Villarceau d'une même famille : on a supposé $a>b>0$; posons $b=a\cos\omega\left(0<\omega<\frac{\pi}{2}\right)$ et remarquons que l'un des cycles de Villarceau contenus dans le plan $z=x\cot\omega$ a pour foyers les points

$$\mathrm{F}'(-ib,\ b,\ ia\sin\omega),\quad \mathrm{F}''(ib,\ b,\ -ia\sin\omega).$$

Les foyers du cercle transformé sont

$$\Phi'[-ib,\ b,\ i(\lambda+a\sin\omega)],\qquad \Phi''[ib,\ b,\ -i(\lambda+a\sin\omega)].$$

Donc, par rotation autour de Oz, le cycle transformé engendre un tore analogue au tore initial, où les éléments a_1, b_1, ω_1 se définissent par les équations

$$b_1=b,\qquad a\cos\omega=a_1\cos\omega_1,\qquad \lambda+a\sin\omega=a_1\sin\omega_1.$$

On a ainsi

$$a_1=\sqrt{a^2+2a\lambda\sin\omega+\lambda^2},\qquad \operatorname{tang}\omega_1=\frac{\lambda+a\sin\omega}{a\cos\omega}.$$

Les angles ω, ω_1 sont les angles de parataxie de Oz (qui est lui-même son transformé à titre de cycle) avec les cycles de Villarceau du tore initial ou du tore transformé. *Nous avons ainsi vérifié que l'angle de parataxie change en général.*

Une valeur remarquable de λ est $(-a\sin\omega)$; l'axe anallagmatique circulaire du tore a pour rayon $a\sin\omega$ et il s'est transformé en le point O; Φ' est alors le point $(-ib,\ b,\ 0)$; on a donc un cycle tracé dans xOz, de rayon b, tangent en O à Oz; le tore transformé est alors ce tore exceptionnel qui marque la séparation entre les tores sans point conique et ceux à points coniques; les méridiens de ce tore spécial appartiennent à une congruence paratactique dégénérée; *toute famille de Villarceau, tracée sur un tore ou une cyclide de Dupin, est égale à cette famille spéciale, vis-à-vis du groupe* G, *ou encore, grâce à une inversion de pôle* O, *à la famille des génératrices d'un cylindre de révolution* (¹).

(¹) Les métamorphoses que nous avons indiquées pour une famille de cercles méridiens ou de parallèles des tores quelconques doivent être complétées par les courbes de contact d'une cyclide de Dupin avec l'une des deux familles de sphères à un paramètre dont la cyclide est l'enveloppe.

Rappelons que les parallèles d'un tore (a, b) se sont transformés en les parallèles d'un tore $(a+\lambda, b)$ qui a un cercle méridien égal à celui du tore primitif; ici les cercles de Villarceau se sont transformés en les cercles de Villarceau d'*un autre tore* (qui a encore même rayon du cercle méridien); les méridiens du tore primitif sont conjugués au cercle Γ de centre O, tracé dans xOy, de rayon $\sqrt{a^2-b^2}$: ils se transforment en une série de cercles paratactiques aux deux cycles concentriques à Γ dans xOy, de rayons respectifs $\sqrt{a^2-b^2}+\lambda$ et $\sqrt{a^2-b^2}-\lambda$; leur support est une surface cyclide, qui n'est plus cyclide de Dupin.

Terminons en indiquant une autre transformation simple contenue dans G : T′ serait la rotation d'amplitude $i\alpha$ d'axe Oz, T″ la rotation conjuguée; les méridiens du tore sans point conique ont leurs foyers sur le cercle Γ signalé à l'instant; les foyers des cercles transformés de ces méridiens sont encore sur ce cercle Γ, de sorte que les méridiens transformés ont pour support un nouveau tore; si α est calculé par la relation $\tan g\alpha = \frac{ib}{a} = i\cos\omega$ ou $\mathrm{Th}\,\alpha = -\cos\omega$, les deux foyers d'un méridien transformé se confondent avec le point où Γ coupe le méridien initial : autrement dit chaque méridien se transforme en un point de Γ et nous avons ainsi démontré ce résultat signalé précédemment, à savoir que les méridiens d'un tore quelconque constituent une famille égale, vis-à-vis de notre groupe G, aux points réels d'un cercle ou d'une droite.

4. *Transformations générales conservant les cycles et la parataxie.* — Le groupe G à 20 paramètres que nous venons d'étudier doit être complété par *la transformation qui consiste à renverser le sens de tous les cycles, c'est-à-dire par l'opération qui échange chaque point de l'espace anallagmatique complexe avec son conjugué;* l'adjonction de cette transformation fournit un nouveau groupe G_1 à 20 paramètres réels : c'est l'analogue de ce qui se produit en passant du groupe des déplacements de l'espace euclidien à trois dimensions au groupe des transformations qui conservent les distances.

Réciproquement, démontrons que toute transformation continue remplaçant un cycle réel par un cycle réel, avec conservation de la parataxie, est contenue dans le groupe G_1 : la démonstration qui suit est due à M. E. Cartan. Il suffit de raisonner sur l'espace des foyers prime et la transformation effectuée sur cet espace; nous n'avons besoin que des hypothèses suivantes :

La transformation est continue, change deux points distincts en deux points distincts, deux points situés sur une droite isotrope en deux points analogues, deux points non situés sur une droite isotrope en deux points eux aussi non situés sur une droite isotrope. Nous devons arriver à la conclusion : *cette transformation est une transformation conforme;* nous nous appuyons sur le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Il existe une correspondance biunivoque entre les droites isotropes de l'espace anallagmatique complexe* A *et les points de l'espace projectif complexe* P.

En effet, dans l'espace A supposé d'abord rapporté à un trièdre trirectangle (OXYZ), nous pouvons substituer aux coordonnées (X, Y, Z) les coordonnées anallagmatiques x_1, x_2, y_1, y_2, z définies par les équations

$$(1) \qquad \frac{z}{Z} = \frac{x_1}{X+iY} = \frac{y_1}{X-iY} = \frac{x_2}{-1} = \frac{y_2}{X^2+Y^2+Z^2}.$$

Ces coordonnées anallagmatiques homogènes satisfont à la relation quadratique

$$(E) \qquad x_1y_1 + x_2y_2 + z^2 = 0.$$

D'autre part, une droite isotrope est définie par les équations

$$(2) \qquad X+iY = aZ+b, \qquad X-iY = -\frac{Z}{a}+c,$$

où a, b, c sont des constantes arbitraires; afin de ne pas exclure les valeurs $0, \infty$ de a, écrivons

$$(3) \qquad a = -\frac{\xi_0}{\xi_1}, \qquad b = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \qquad c = \frac{\xi_3}{\xi_0},$$

et nous obtenons les deux équations linéaires

$$(4) \qquad \begin{cases} \xi_0 Z + \xi_1 (X+iY) - \xi_2 = 0, \\ \xi_0 (X-iY) - \xi_1 Z - \xi_3 = 0, \end{cases}$$

qui établissent une correspondance biunivoque entre toute droite isotrope de A et tout point $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ de P. Nous remarquons les relations

$$\begin{aligned} X^2+Y^2+Z^2 &= (X+iY)(X-iY)+Z^2 \\ &= (aZ+b)\left(\frac{-Z}{a}\right)+Z^2+c(X+iY) = c(X+iY)-b\frac{Z}{a}, \end{aligned}$$

ou encore, échangeant a et $\frac{-1}{a}$, b et c, i et $-i$,

$$X^2+Y^2+Z^2 = acZ+b(X-iY).$$

Cela nous permet donc d'écrire entre les coordonnées anallagmatiques les quatre équations linéaires

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi_0 z + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \qquad \star = 0, \\ \xi_0 y_1 - \xi_1 z \qquad \star + \xi_2 x_2 = 0, \\ \xi_0 y_2 \qquad \star - \xi_2 z - \xi_3 x_1 = 0, \\ \star \qquad \xi_1 y_2 - \xi_2 y_1 + \xi_3 z = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont un cas particulier de formules plus générales (¹); elles se réduisent à trois d'après la façon même dont nous les avons obtenues, puisqu'elles sont la conséquence des deux premières et de la relation quadratique (E); *elles sont, sous une forme plus précise et plus complète, les équations directrices de la célèbre transformation de contact de Lie entre les figures de l'espace anallagmatique et celles de l'espace projectif.* La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites isotropes concourent est, en appelant (ξ), (η) les points représentatifs

$$\xi_0\eta_3 - \xi_3\eta_0 = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \tag{6}$$

et alors les coordonnées du point commun sont

$$\begin{cases} z = \xi_0\eta_3 - \xi_3\eta_0, \qquad x_1 = \xi_2\eta_0 - \xi_0\eta_2, \qquad x_2 = \xi_0\eta_1 - \xi_1\eta_0, \\ \qquad\qquad y_1 = \xi_1\eta_3 - \xi_3\eta_1, \qquad y_2 = \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2. \end{cases} \tag{7}$$

L'équation (6) définit un complexe linéaire K de l'espace projectif complexe P, engendré par les droites $[(\xi), (\eta)]$ réunissant les points représentatifs des droites isotropes concourantes; ce complexe K peut se définir au moyen des équations (4) : à un point (X, Y, Z) donné correspond une droite lieu du point $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, et cette droite appartient au complexe linéaire K dont le rôle dans la transformation de Lie est classique.

Cela posé, toute transformation $\mathfrak{T}$ de l'espace anallagmatique A satisfaisant aux conditions énoncées plus haut se traduit, dans l'espace projectif P par une transformation ponctuelle Π, continue, transformant un point en point, deux points distincts en deux points distincts, trois points alignés en trois points alignés, trois points non alignés en trois points non alignés (on commence par le cas de trois points alignés sur une droite du complexe linéaire K). Le théorème fondamental de la géométrie projective montre alors que Π est une transformation homographique conservant le complexe linéaire K, d'où résulte en utilisant les formules (7) une substitution linéaire sur z, x_1, x_2, y_1, y_2 laissant invariante la relation quadratique $z^2 + x_1y_1 + x_2y_2 = 0$.

C. Q. F. D.

5. *Configuration des* 10 *cycles de Barbilian-Tzitzéica.* — Ces deux géomètres ont obtenu (*loc. cit.*) la proposition suivante : soient $\vec{\Omega}$ un cycle du plan xOy et 4 cycles $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$, $\vec{A}_4$ tangents à $\vec{\Omega}$; les 3 cycles $\vec{A}_i$, $\vec{A}_j$, $\vec{A}_k$ admettent, outre $\vec{\Omega}$, un nouveau cycle tangent commun $\vec{B}_l$ (i, j, k, l sont les 4 nombres 1, 2, 3, 4 dans un ordre arbitraire); en général, il n'existe pas de cycle tangent

(¹) E. Cartan, *Leçons sur la théorie des spineurs* (*Actualités*, 701, 1938, n° 92, p. 3-5).

à $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$, $\vec{B}_3$, $\vec{B}_4$; en restant dans ce cas général, il y a de même un cycle $\vec{C}_l$, distinct de $\vec{A}_l$, tangent à $\vec{B}_i$, $\vec{B}_j$, $\vec{B}_k$; le théorème est le suivant :

Les 4 cycles $\vec{C}_1$, $\vec{C}_2$, $\vec{C}_3$, $\vec{C}_4$ *sont tangents à un même cycle* $\vec{\Phi}$.

Le cas exceptionnel réservé qui se présente exige, comme condition nécessaire et suffisante, que les 4 points de contact des $\vec{A}_i$ *avec* $\vec{\Omega}$ *forment une division équianharmonique. Dans ce cas, les* 10 *cycles,* $\vec{\Omega}$, $\vec{A}_i (i=1, 2, 3, 4)$, $\vec{B}_j (j=1, 2, 3, 4)$, $\vec{\Phi}$ *forment une configuration symétrique de* 10 *cycles dont chacun touche 4 autres.*

Nous allons donner, pour le cas général, une démonstration que M. Robert a imaginée : soient, dans l'espace anallagmatique complexe, un point Ω' et 4 points A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 choisis au hasard sur la sphère de rayon nul Ω'; les sphères de rayon nul A'_2, A'_3, A'_4 se coupent en deux points, dont l'un est Ω', et l'autre est un point que nous appelons B'_1; on définit de même les points B'_2, B'_3, B'_4; *dans le cas général, les 4 points* B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 *ne sont pas sur une même sphère de rayon nul;* restons dans ce cas général; les 3 sphères de rayon nul B'_2, B'_3, B'_4 se coupent en A'_1 et en un nouveau point C'_1 tel que A'_1 et C'_1 sont les foyers du cercle circonscrit à B'_2, B'_3, B'_4; A'_1, C'_1 sont donc inverses l'un de l'autre par rapport à la sphère S circonscrite aux 4 points B'_i, sphère dont le rayon est supposé non nul; on définit de même C'_2, C'_3, C'_4; mais alors la sphère *de rayon nul* Ω', qui contient A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 a pour inverse par rapport à la sphère S une autre sphère *de rayon nul*, qui contient C'_1, C'_2, C'_3, C'_4; soit Φ' le centre de cette sphère.

Il suffit maintenant que nous prenions les traces sur xOy des sphères de rayon nul que nous avons indiquées pour obtenir la proposition étudiée; pour que les 14 cycles obtenus soient tous réels, il est nécessaire et suffisant que $\vec{\Omega}$ et les 4 cycles $\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$, $\vec{A}_3$, $\vec{A}_4$ soient réels.

J'ai refait moi-même (*loc. cit.*), par une autre voie que les géomètres roumains, le calcul prouvant que le seul cas où B'_1, B'_2, B'_3, B'_4 sont sur une sphère de rayon nul est celui où les quatre génératrices $\Omega' A'_i$ de la sphère de rayon nul Ω' forment, sur ce cône isotrope, une division équianharmonique. Dans ce cas la configuration des cycles du plan xOy est nécessairement imaginaire et nous pourrions nous demander quel intérêt elle offre, si nous ne songions pas à la réunir à la configuration conjuguée.

Sans qu'il soit utile d'insister, nous voyons alors que nous pouvons énoncer la proposition, du cas général ou du cas exceptionnel, en remplaçant les mots *cycles tangents* par *cycles paratactiques* et cette fois, nous avons une configuration *réelle*, à 14 cycles dans le cas général, à 10 cycles dans le cas exceptionnel.

De combien de paramètres dépendent ces configurations ? Combien ont-elles

d'invariants vis-à-vis du groupe conforme ou vis-à-vis du groupe G_1 étudié au paragraphe qui précède ?

Dans le cas général, Ω' dépend de 3 paramètres et chaque point A'_i de 2; au total 11 paramètres, *complexes*, il ne faut pas l'oublier; les 14 cycles réels qui offrent les circonstances de parataxie signalées donnent *deux* invariants vis-à-vis du groupe G_1, *douze* vis-à-vis du groupe conforme; ces nombres, deux ou douze, obtenus par soustraction de 20 ou 10 au nombre 22 sont exacts parce qu'il n'existe, dans l'espace des foyers prime, aucune série continue de transformations conformes transformant en lui-même l'ensemble des 14 foyers prime. Pour ce qui concerne la configuration exceptionnelle de 10 cycles paratactiques, il n'y a plus que 10 paramètres complexes, puisque cette fois le birapport des 4 droites isotropes $\Omega' A'_i$ est déterminé sur le cône isotrope Ω'; vis-à-vis de G_1, il n'y a aucun invariant, pour la même raison que plus haut; vis-à-vis du groupe conforme, il en existe dix et deux quelconques de ces configurations sont, vis-à-vis de G_1, mais non du groupe conforme, égales entre elles (1).

6. *Foyers d'une droite.* — M. E. Cartan m'a suggéré, à propos de mon fascicule déjà cité du Mémorial relatif à la parataxie, quelques résultats que je vais exposer d'après lui.

A la page 85 de ce fascicule, je n'ai pas rappelé que l'espace engendré par les foyers des cycles réels est un espace anallagmatique complexe et non un espace projectif complexe; il n'y a donc qu'un point à l'infini et l'on ne peut parler de conique ombilicale, de sorte que cinq lignes de la page 85 ont besoin d'une retouche; je les recopie :

« Dans une inversion un foyer se transforme en un foyer du nouveau cercle; toutefois, si le cercle devient une droite, les foyers sont les points cycliques communs à tous les plans perpendiculaires à la droite, et, cette fois, deux foyers de cette espèce correspondent non à une seule droite, mais à ∞^2 droites parallèles ».

M. E. Cartan m'écrit : « *Dans le cas d'une droite, il existe deux foyers parfaitement déterminés qui sont des sphères-points.* Mais alors qu'en géométrie anallagmatique réelle, les points sont les points à distance finie de la géométrie élémentaire complétés par *un* point impropre, *le* point à l'infini, le résultat est moins simple en *géométrie anallagmatique complexe. Aux points complexes ordinaires à distance finie, et au point à l'infini, il faut ajouter les sphères-points*

(1) Dans le Mémoire déjà cité que j'ai rédigé sur cette configuration, j'avais écrit, par distraction, qu'elle n'avait aucun invariant vis-à-vis du groupe conforme. M. B. Segre avait, sans songer lui non plus à la parataxie, généralisé la configuration de Barbilian-Tzitzeica, en indiquant 30 cycles dont chacun est paratactique à 8 autres (*Memorie della R. Academia dei Lincei*, Classe di scienze fisiche, mathematiche et naturali, serie sesta, vol. II, 1927, p. 204-229).

constituées par ce que l'on appelle dans le langage courant les plans isotropes, car, puisqu'il n'existe pas de plan de l'infini, on ne peut parler de l'ombilicale. Cela posé, *les foyers d'une droite sont les plans isotropes contenant cette droite.* Si un cycle et une droite sont paratactiques, le foyer prime du cycle est situé dans le plan isotrope qui constitue le foyer prime de la droite orientée. Le théorème d'après lequel toute transformation anallagmatique change les foyers d'un cercle en les foyers du cercle transformé est vrai sans aucune exception.

« *La notion classique de droite isotrope doit être précisée et complétée en géométrie anallagmatique.* Aux droites isotropes classiques, dont chacune est *fermée* par la sphère-point constituée par le plan isotrope qui la contient, il convient d'ajouter *les familles à un paramètre complexe de plans isotropes parallèles entre eux*, chaque famille étant *fermée* par le point à l'infini; ces droites isotropes contiennent un point réel, le point à l'infini, et donnent naissance à *des congruences paratactiques dégénérées, qui sont les congruences de droites parallèles à une direction fixe*, à savoir la direction réelle commune aux plans isotropes qui constituent cette droite isotrope et à leurs conjugués. Quand on fait une inversion, une telle congruence paratactique devient la congruence paratactique dégénérée, déjà signalée au paragraphe 3, formée des cercles ayant en un point donné la même tangente.

« Les foyers des ∞^6 cycles réels remplissent l'espace anallagmatique complexe, formé des points complexes à distance finie de l'espace euclidien, complétés par le point à l'infini et les plans isotropes-points. *C'est un espace homéomorphe à la quadrique complexe de l'espace à 4 dimensions. Cet espace n'est pas homéomorphe à l'espace projectif complexe.* Cependant ce dernier espace intervient (¹) si l'on considère la variété des droites isotropes de l'espace anallagmatique complexe, ou la variété des congruences paratactiques propres ou dégénérées de l'espace anallagmatique réel. »

M. E. Cartan définit les points (y compris les sphères-points et les plans-points isotropes) par un procédé purement analytique. Considérons par exemple la sphère

$$a_0(x^2+y^2+z^2) - 2a_1x - 2a_2y - 2a_3z + a_4 = 0. \tag{1}$$

dont nous pouvons dire qu'elle a pour coordonnées homogènes $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$: l'équation, écrite sous forme équivalente,

$$(a_0x - a_1)^2 + (a_0y - a_2)^2 + (a_0z - a_3)^2 + a_0a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0. \tag{2}$$

montre que, si l'on suppose $a_0a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, on a une sphère de rayon nul; or, on peut caractériser d'une façon parfaite une sphère de rayon nul par son centre et dire que ce centre est défini par les coordonnées *homogènes*

(¹) C'est ce qui a été expliqué au paragraphe 4 de ce travail.

$(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ liées par la relation $a_0a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0$, qui représente, dans l'espace projectif complexe à quatre dimensions, une quadrique; $\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}$ sont les coordonnées cartésiennes du centre, (a_0, a_1, a_2, a_3) ses coordonnées homogènes, la variable d'homogénéité étant placée en tête; la coordonnée surabondante a_4 est précieuse pour généraliser, par exemple pour définir les sphères de rayon non nul, par leurs coordonnées pentasphériques. *Nous regardons tout système réel ou complexe* $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ *satisfaisant à la relation*

$$a_0a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = 0, \tag{E}$$

comme définissant un point; le passage de l'équation (1) à l'équation (2) n'est légitime que si a_0 est non nul; mais si nous supposons a_0, d'abord non nul, variant et tendant vers zéro, nous obtenons à la limite l'équation linéaire, que nous rendrons homogène

$$-2a_1x - 2a_2y - 2a_3z + a_4 = 0, \tag{3}$$

qui représente un plan isotrope, en vertu de $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, et ce plan contient le point $(0, a_1, a_2, a_3, a_4)$: ce point, qui appartient encore à la quadrique définie par (E), caractérise parfaitement le plan.

Si l'on effectue une inversion sur une sphère de rayon nul, on obtient encore une sphère de rayon nul, si le pôle n'est pas situé sur la sphère en jeu; si le pôle est sur cette sphère et distinct du centre, on obtient comme transformée un plan isotrope; si le pôle est au centre, on obtient le point à l'infini.

L'inversion de pôle O et puissance 1 remplace le point $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ par le point $(a_4, a_1, a_2, a_3, a_0)$, en supposant, bien entendu, $a_0a_4 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$ nul; le plan isotrope $(0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ est, dans les mêmes conditions, remplacé par la sphère-point $(a_4, a_1, a_2, a_3, 0)$ qui passe par l'origine. En comparant avec le paragraphe 1, nous voyons qu'il est beaucoup plus avantageux, pour définir un cercle effectif, de prendre ses éléments focaux (sphères-points focales) au lieu des foyers; s'il s'agit d'une droite, nous avons aussi les deux plans-points isotropes, et nous constatons que les éléments focaux se correspondent toujours après un nombre quelconque d'inversions.

Nous pouvons maintenant *définir avec précision, sans omission, les diverses droites isotropes.* La sphère d'équation

$$(\lambda a_0 + \mu A_0)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(\lambda a_1 + \mu A_1)x - 2(\lambda a_2 + \mu A_2)y - 2(\lambda a_3 + \mu A_3)z + \lambda a_4 + \mu A_4 = 0;$$

n'est constamment de rayon nul que si l'on a, en supposant $a_0A_0 \neq 0$

$$\left(\frac{A_1}{A_0} - \frac{a_1}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{A_2}{A_0} - \frac{a_2}{a_0}\right)^2 + \left(\frac{A_3}{A_0} - \frac{a_3}{a_0}\right)^2 = 0, \tag{4}$$

$$a_0a_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \qquad A_0A_4 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \tag{5}$$

et *nous obtenons alors une droite isotrope ordinaire* I. Si nous reprenons, pour un instant, le langage de la géométrie positive, les deux cônes isotropes, l'un de sommet $\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \frac{a_3}{a_0}\right)$, l'autre de sommet $\left(\frac{A_1}{A_0}, \frac{A_2}{A_0}, \frac{A_3}{A_0}\right)$, ont leurs sommets sur une même droite isotrope; leur intersection se compose donc de cette droite prise deux fois et du cercle de l'infini; c'est cette disposition qu'offrent les foyers de même espèce de deux cycles paratactiques ou tangents. Les relations (4), (5) étant vérifiées, pour $\frac{\lambda}{\mu} \neq -\frac{A_0}{a_0}$, nous trouvons ∞^1 sphères-points dont le centre est à distance finie, et, en plus, pour $\lambda = -A_0$, $\mu = a_0$, nous obtenons le plan-point isotrope

$$(6) \quad -2(a_0A_1 - A_0a_1)x - 2(a_0A_2 - A_0a_2)y - 2(a_0A_3 - A_0a_3)z + a_0A_4 - A_0a_4 = 0,$$

qui *ferme* la droite isotrope étudiée.

Par conséquent, *la droite isotrope classique peut être définie par une sphère-point à distance finie* $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, *où* a_0 *est non nul, et par le plan isotrope* $(0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ *qui contient la droite :* les notations ne sont plus celles qui précèdent immédiatement, car nous avons, pour obtenir les nouvelles notations, dû faire une substitution homographique sur le paramètre $(\lambda:\mu)$ qui définit les coordonnées $(\lambda a_i + \mu A_i)$ des diverses sphères-points qui engendrent la droite isotrope en jeu; nous retrouvons un cône isotrope, un plan tangent à ce cône et la génératrice de contact.

Si maintenant nous supposons $a_0 = A_0 = 0$, nous devons avoir

$$(7) \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0, \qquad A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 0, \qquad a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 = 0.$$

Ces relations entraînent que (A_1, A_2, A_3) soient proportionnels à (a_1, a_2, a_3) et alors nous trouvons finalement la droite isotrope lieu du point de coordonnées $(0, a_1, a_2, a_3, \lambda)$ où λ est variable; le plan isotrope

$$-2a_1x - 2a_2y - 2a_3z + \lambda = 0$$

se déplace parallèlement à lui-même; en réunissant les points attachés à chacun des plans parallèles isotropes obtenus, nous avons une infinité de points, dépendant linéairement du paramètre *complexe* unique λ; *nous devons les considérer comme engendrant une droite isotrope* J *fermée par le point à l'infini.*

Si nous comparons ce résultat aux explications que fournirait un géomètre ne voulant employer que l'espace projectif, nous pouvons porter notre attention sur la conique ombilicale et un point A de cette conique; toutes les droites passant par A sont des droites isotropes I au sens ordinaire; mais la tangente en A à l'ombilicale est une droite isotrope complémentaire, et c'est celle-là que nous venons de signaler comme droite J. Avec les formules (5) du para-

graphe 4, ces droites s'obtiennent en supposant $\xi_0 = \xi_1 = 0$, et l'on a les droites, dépendant du paramètre complexe $\xi_2 : \xi_3$, définies par les équations

$$x_2 = 0, \qquad \xi_2 z + \xi_3 x_1 = 0, \qquad \xi_2 y_1 - \xi_3 z = 0.$$

En nous reportant à ce qui a été expliqué sur les congruences paratactiques dégénérées, nous voyons qu'une inversion, dont le pôle est sur une droite isotrope ordinaire I, transforme cette droite en une droite isotrope exceptionnelle J qui vient d'être signalée; si nous nous bornons aux congruences dégénérées *réelles*, la droite isotrope I devra être l'une de celles qui ont un point réel, et c'est ce point que nous prendrons comme pôle d'inversion.

Ces précisions sur la notion de foyer ayant été données, le procédé employé pour représenter un cyle de l'espace par deux cycles du plan xOy, puis chaque cycle du plan xOy par son foyer met en évidence le résultat suivant :

La géométrie des sphères orientées de Lie de l'espace à n dimensions se ramène à la géométrie anallagmatique de l'espace à $(n+1)$ *dimensions; le groupe de la première géométrie est formé des transformations portant sur les sphères orientées et conservant le contact de deux sphères orientées; si* $n = 2$, *il s'agit des cycles du plan.*

7. *Ordre anallagmatique d'une courbe ou d'une surface* [1]. — L'*ordre anallagmatique* d'une surface algébrique peut être défini comme *le nombre de points d'intersection de la surface avec une droite isotrope arbitraire :* le mot *point* doit être pris dans le sens anallagmatique qui a été précisé au paragraphe précédent. Il est facile de s'assurer qu'une droite isotrope coupe une sphère en un point et un seul. L'ordre peut encore être défini analytiquement comme le degré minimum de l'équation en coordonnées pentasphériques susceptible de représenter la surface. Quant à l'ordre anallagmatique d'une courbe algébrique, c'est le nombre des points d'intersection de cette courbe avec une sphère arbitraire; la droite isotrope est d'ordre 1, le cercle est d'ordre 2. Il existe des formules analogues à celles de Bezout, mais distinctes. Le nombre des points communs à une courbe d'ordre p et à une surface d'ordre n est égal à pn; la courbe d'intersection de deux surfaces d'ordre p et p' est égal à $2pp'$, au lieu de pn'; exemple : deux sphères. L'intersection de deux cyclides est donc d'ordre 8 et par suite trois cyclides ont 16 points communs [2].

Ces résultats mettent en évidence une différence *qualitative* entre l'espace anallagmatique complexe et l'espace projectif complexe. La droite et le plan, qui, en géométrie projective, permettent de définir l'ordre d'une courbe et

---

[1] Ce paragraphe reproduit une lettre de M. É. Cartan.

[2] Élie Cartan, *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes* (*Publications mathematiques de l'Université de Belgrade*, 1, 1932, p. 1-20).

d'une surface, sont, en géométrie anallagmatique, remplacés par la droite isotrope et la sphère; ce sont, dans l'un et l'autre cas, les *bases d'homologie* de l'espace dont il est question en *analysis situs*. La non-homéomorphie des deux espaces est mise en évidence par la non-identité des formules de Bezout, bien que les nombres de Betti soient les mêmes pour les deux espaces.

8. *Orientation* (¹). — Voici une autre remarque, de nature très élémentaire, qui ne semble pas avoir été signalée. En géométrie anallagmatique réelle, on peut orienter les sphères réelles (à centre réel, de rayon réel) : on donne un signe au rayon ou encore, ce qui revient au même, on choisit une des deux régions de l'espace séparées par la surface de la sphère. Considérons deux sphères extérieures l'une à l'autre, orientées toutes les deux vers l'intérieur (au sens vulgaire du mot); ces deux sphères ont un invariant unique, ici > 1, à savoir $\frac{d^2 - R^2 - R'^2}{2RR'}$; si l'on change leur orientation à toutes deux, R et R' deviennent négatifs, mais l'invariant n'a pas changé; cependant il est impossible de passer, au moyen d'une transformation anallagmatique, de la figure constituée par les deux sphères orientées vers l'intérieur à la figure formée par ces deux mêmes sphères orientées vers l'intérieur : en effet les deux régions intérieures n'ont aucun point commun, les deux régions extérieures en ont une infinité.

Plus généralement on peut se poser la question de savoir s'il existe p sphères réelles orientées indépendantes admettant deux à deux des invariants donnés : pour $p = 3$, il y a trois invariants distincts, pour $p \geq 4$, il existe $4p - 10$ invariants distincts; les conditions de possibilité peuvent se ramener à la recherche du nombre de carrés positifs et de carrés négatifs auxquels on peut réduire une certaine forme quadratique à p variables; si les conditions de possibilité sont réalisées, il arrive, ou bien que les solutions se déduisent toutes, par une transformation anallagmatique arbitraire, d'une solution particulière, ou bien, au contraire, qu'il y ait deux familles distinctes de solutions non anallagmatiquement égales entre elles, les solutions de la seconde famille se déduisant des solutions de la première famille par renversement de toutes les orientations. Le premier cas se produit quand le système linéaire des p sphères ne contient aucune sphère de rayon nul et le second quand il en contient.

Dans le même ordre d'idées, on peut se poser la question de savoir si l'on peut transformer une sphère orientée en une autre, orientée aussi, par une inversion de module positif ou négatif : il y a, suivant les cas, deux possibilités, une ou zéro; il y en a une seule si les sphères sont sécantes, deux ou zéro si elles sont non sécantes.

Dans le domaine complexe, les singularités relatives aux invariants d'une

(¹) Ce paragraphe reproduit aussi une lettre de M. É. Cartan.

figure ne se produisent pas. Dans le domaine réel, elles seraient également évitées si, comme le fait le géomètre Blaschke, on adjoignait aux transformations anallagmatiques proprement dites une autre consistant à remplacer chaque sphère réelle orientée par la même, orientée en sens inverse : le nouveau groupe de transformations ainsi obtenu contiendrait donc quatre familles distinctes au lieu de deux.

9. *Une question de topologie* (1). — On peut se demander s'il est possible de regarder l'espace à 3 dimensions complexes des cycles réels comme le produit topologique de deux autres espaces à 3 dimensions réelles, un cycle réel pouvant (en cas de possibilité) être représenté comme l'ensemble ordonné de deux points appartenant le premier à un espace $\mathscr{E}_1$, le second à un espace $\mathscr{E}_2$, $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ étant tous deux à 3 dimensions réelles.

La réponse est négative : en voici une raison topologique. Considérons les couples de points obtenus en associant successivement tous les points de $\mathscr{E}_1$ à un point de $\mathscr{E}_2$: il leur correspondra dans l'espace anallagmatique complexe une variété fermée à 3 dimensions réelles, qui ne pourra jamais être réduite à un point par déformation continue, car une telle déformation ferait toujours intervenir tous les points de $\mathscr{E}_1$, Or, dans l'espace anallagmatique complexe, qui est au fond une quadrique à 6 dimensions réelles de l'espace projectif complexe à 4 dimensions complexes, toute variété fermée à un nombre impair de dimensions est réductible à un point par déformation continue : il y aurait donc contradiction.

Une autre raison d'ordre analytique est que le polynome de Poincaré $t^6 + t^4 + t^2 + 1$ de l'espace anallagmatique complexe ne peut être décomposé en le produit de deux polynomes de degré 3 à coefficients positifs ou nuls, ces coefficients étant les nombres de Betti des espaces $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$.

On peut encore ajouter que le groupe à 6 paramètres des transformations anallagmatiques réelles qui laissent invariante une inversion négative se décompose en deux sous-groupes invariants isomorphes au groupe des rotations réelles de l'espace ordinaire; il n'existe rien de semblable pour le groupe à 10 paramètres complexes des transformations anallagmatiques complexes.

(1) Ce paragraphe est encore emprunté à une lettre de M. É. Cartan.

SUR LE RATTACHEMENT

DE

CERTAINES QUESTIONS D'ARITHMÉTIQUE

A UN PRINCIPE D'EXTREMUM

Par M. André ROUSSEL.

1. On peut rattacher de nombreux problèmes d'arithmétique à un principe d'extremum.

Nous nous proposons dans cet article de donner une application de cette méthode qui semble encore inédite.

Ce premier travail sera consacré à l'obtention de théorèmes traduisant sous une forme analytique relativement simple, des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un entier p soit premier. Notre point de départ sera le suivant :

Pour que p entier soit premier, il faut et il suffit que pour tout x appartenant à l'intervalle fermé $(2, p-1)$, on ait

$$u = \cos^2 \pi x \cos^2 \frac{\pi p}{x} < 1, \tag{1}$$

car on ne pourrait avoir

$$u = 1$$

que si les équations

$$\cos^2 \pi x = 1, \qquad \cos^2 \frac{\pi p}{x} = 1$$

avaient une solution commune en x; d'après la première des conditions précédentes, cette solution commune, x, serait un entier compris entre 2 et $p-1$ qui diviserait p d'après la seconde.

Soit alors $M(p)$ le maximum absolu de u quand x varie dans l'intervalle fermé $(2, p-1)$. La fonction u étant continue, la condition (1) équivaut à

$$M(p) < 1, \tag{1'}$$

et (1') exprime la condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier.

Or il est clair que la méthode classique pour calculer M, ou pour traduire (1) par une condition ne dépendant que de p seul ne saurait aboutir ici. Ce procédé consisterait, en effet, à résoudre l'équation

$$u' = 0,$$

et à comparer entre elles les valeurs de u correspondant à ses racines. Il aboutirait finalement à réintroduire la définition purement arithmétique du nombre premier, à savoir que de tous les quotients $\frac{p}{k}(k \neq 1, p)$ aucun ne doit être entier et ne nous avancerait donc à rien.

Nous sommes ainsi conduit, à propos de la question que nous examinons, à poser le problème général suivant :

Existe-t-il d'autres procédés, en dehors de la méthode élémentaire classique que nous venons de rappeler, pour déterminer l'extremum absolu d'une fonction ?

Cette question ne semble par avoir été étudiée et nous ne connaissons dans cet ordre d'idées, qu'un théorème de Riesz qui soit antérieur à nos travaux actuels sur ce sujet.

Voici l'énoncé de cette proposition qui est très intéressante.

Soit $f(x)$ une fonction continue, non négative dans un intervalle fini (a, b). On a

$$\max f(x) = \lim_{m=\infty} \left\{ \int_a^b [f(x)]^m \, dx \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Ce théorème fournit ce que l'on pouvait appeler *un moyen direct* de calculer le maximum absolu de $f(x)$ et l'obtention de propositions analogues serait très importante à divers titres, et en particulier par le fait qu'elle auraient de nombreuses applications en théorie des nombres comme nous le montrerons dans ce travail et dans d'autres en préparation (1).

Nous avons d'ailleurs obtenu d'autres résultats dans cet ordre d'idées (*voir* la note citée), mais dans ce premier Mémoire nous utiliserons le théorème de Riesz, ou plutôt nous nous en inspirerons en nous bornant ici à mentionner le problème général ci-dessus.

Pour être complet, nous allons donner la démonstration de ce théorème de Riesz, quoique ce ne soit pas strictement nécessaire à l'exposé qui va suivre et qui contient tout ce qui est nécessaire à son intelligence, mais l'intérêt de cette proposition peu connue et le caractère très simple de sa démonstration nous paraissent justifier ce rappel.

---

(1) A. ROUSSEL, *Sur un procédé de traduction analytique de propriétés arithmétiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 219, 1944, p. 568.

Soit donc $f(x)$ continue, non négative et non identiquement nulle dans l'intervalle (a, b). On supposera $a < b$. A tout ε positif on peut faire correspondre un sous-intervalle (α, β) de (a, b) tel que dans (α, β) ou $(\alpha < \beta)$ on ait

$$f(x) \geq M - \frac{\varepsilon}{2},$$

M étant le maximum absolu de f dans (a, b).

Il vient donc

$$\int_\alpha^\beta \left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^m dx < \int_\alpha^\beta [f(x)]^m dx < \int_a^b [f(x)]^m dx < \int_a^b M^m dx.$$

Posons, pour simplifier,

$$I_m = \int_a^b [f(x)]^m dx,$$

on a donc

$$(\beta - \alpha)\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right)^m < I_m < (b - a) M^m,$$

d'où

$$(\beta - \alpha)^{\frac{1}{m}}\left(M - \frac{\varepsilon}{2}\right) < I^{\frac{1}{m}} < (b - a)^{\frac{1}{m}} M.$$

α et β dépendant en général de ε, mais non de m, quand m tend vers $+\infty$, les quantités

$$(\beta - \alpha)^{\frac{1}{m}} \qquad \text{et} \qquad (b - a)^{\frac{1}{m}}$$

tendent vers un.

On peut alors trouver un nombre m_0 assez grand, tel que l'inégalité

$$m \geq m_0$$

entraîne

$$M - \varepsilon < I_m^{\frac{1}{m}} < M + \varepsilon,$$

ε étant arbitraire, cela revient à dire que si m tend vers $+\infty$, $I_m^{\frac{1}{m}}$ a une limite et que cette limite est égale à M.

Le théorème dont nous venons de rappeler la démonstration est susceptible de diverses généralisations. Il s'étend ainsi sans peine aux fonctions de plusieurs variables. En outre f peut être supposée seulement intégrable au sens de Lebesgue, M désignant alors sa borne supérieure dans (a, b). On établirait, de même, la proposition un peu plus générale

$$M = \lim_{m = +\infty} \left\{ \frac{\int_a^b [f(x)]^m g(x)\, dx}{\int_a^b g(x)\, dx} \right\}^{\frac{1}{m}} \qquad (g \geq 0),$$

mais nous n'insisterons pas ici sur ces propositions que ne constituent pas des généralisations essentielles du théorème, et nous ne parlerons pas des modifications à peu près évidentes qu'il y a lieu de faire subir à son énoncé pour en déduire un procédé de détermination du *minimum absolu* de f.

Ces préliminaires étant posés, nous allons maintenant aborder le sujet de cette étude.

2. Revenons au problème posé au début du paragraphe précédent. Soit p *un entier que nous supposerons premier.* Considérons la fonction u définie par la relation (1). Son maximum M est alors inférieur à 1 au sens strict. Nous allons trouver d'abord une limite supérieure de M, elle-même inférieure à 1.

Nous commencerons par préciser la valeur maximum de

$$\cos^2 \frac{\pi p}{x}$$

quand x varie dans un intervalle $\left(k-\frac{\alpha}{p}, k+\frac{\alpha}{p}\right)$, k désignant un entier appartenant à l'intervalle fermé $(2, p-1)$ et α un nombre compris entre 0 et 1 qui sera précisé dans la suite.

Pour k égal à 2, on ferait varier x seulement dans l'intervalle $\left(2, 2+\frac{\alpha}{p}\right)$ et pour $k=p-1$, dans l'intervalle $\left(p-1-\frac{\alpha}{p}, p-1\right)$.

Effectuons la division de p par k

$$p = kq + r \qquad \text{avec } 1 \leq r \leq k-1,$$

d'où

$$\cos^2 \frac{\pi p}{k} = \cos^2 \frac{\pi r}{k}.$$

Or

$$\frac{1}{p} < \frac{1}{p-1} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{r}{k} \leq \frac{k-1}{k} = 1 - \frac{1}{k} \leq 1 - \frac{1}{p-1} < 1 - \frac{1}{p},$$

et l'arc

$$\frac{\pi r}{k}$$

est compris entre les arcs supplémentaires

$$\frac{\pi}{p-1} \quad \text{et} \quad \pi - \frac{\pi}{p-1}.$$

Donc

$$\cos^2 \frac{\pi r}{k} < \cos^2 \frac{\pi}{p-1} < \cos^2 \frac{\pi}{p}.$$

Par conséquent pour k compris entre 2 et $p-1$, on a

$$\cos^2 \frac{\pi p}{k} \leq \cos^2 \frac{\pi}{p-1} < \cos^2 \frac{\pi}{p}. \tag{2}$$

Ce résultat appelle deux remarques :

1° il subsiste si p n'est pas premier pourvu que k ne divise pas p;

2° si N désigne un nombre au moins égal à p, on a, dans les mêmes conditions,

$$\cos^2\frac{\pi p}{k} < \cos^2\frac{\pi}{N}. \tag{2'}$$

Soit maintenant la fonction

$$y = \cos^2\frac{\pi p}{x}.$$

On a

$$y' = \frac{2\pi p}{x^2}\sin\frac{2\pi p}{x},$$

d'où

$$|y'| \leq \frac{2p\pi}{x^2} \leq \frac{2p\pi}{4} < 2p$$

Quand x varie dans l'intervalle $\left(k-\frac{\alpha}{p},\ k+\frac{\alpha}{p}\right)$, on a sûrement

$$\cos^2\frac{\pi p}{x} \leq \cos^2\frac{\pi p}{k} + 2p\frac{2\alpha}{p},$$

d'où

$$\cos^2\frac{\pi p}{x} \leq \cos^2\frac{\pi}{p-1} + 4\alpha. \tag{3}$$

Dans le second membre de (3), on peut d'ailleurs remplacer $\cos^2\frac{\pi}{p-1}$ par une quantité supérieure, $\cos^2\frac{\pi}{p}$ ou $\cos^2\frac{\pi}{N}$, par exemple.

Nous allons chercher à déterminer α de façon que

$$\cos^2\frac{\pi}{p-1} + 4\alpha < 1-\lambda, \tag{4}$$

λ étant un nombre compris entre 0 et 1 que nous préciserons prochainement. L'inégalité (4) peut s'écrire

$$4\alpha < \sin^2\frac{\pi}{p-1} - \lambda. \tag{5}$$

Or on voit facilement que, pour $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin x > \frac{2}{\pi}x,$$

la portion correspondante de la courbe $y = \sin x$ restant au-dessus de la droite de coefficient angulaire égal à $\frac{2}{\pi}$. Donc, pour les mêmes valeurs de x,

$$\sin^2 x > \frac{4}{\pi^2}x^2.$$

Par conséquent

$$\sin^2\frac{\pi}{p-1} > \frac{4}{(p-1)^2} > \frac{4}{p^2}.$$

L'inégalité (5) sera vraie, *a fortiori*, si

$$4\alpha < \frac{4}{(p-1)^2} - \lambda.$$

Nous prendrons alors

$$\lambda = \frac{2}{(p-1)^2};$$

(5) et (6) seront alors vraies en prenant

$$\alpha \leq \frac{1}{2(p-1)^2}.$$

Finalement, si x varie dans l'intervalle $\left(k-\frac{\alpha}{p}, k+\frac{\alpha}{p}\right)$ avec

$$\alpha = \frac{1}{2(p-1)^2},$$

on aura

$$\cos^2\frac{\pi p}{x} \leq 1 - \frac{2}{(p-1)^2}, \tag{6}$$

ou encore, N désignant un nombre supérieur ou égal à p,

$$\cos^2\frac{\pi p}{x} < 1 - \frac{2}{N^2}. \tag{6'}$$

Si p n'est pas premier ces résultats subsistent pourvu que k ne soit pas un de ses diviseurs (autre que 1 et p).

Ceci posé, il est facile de trouver, pour p premier, une limite supérieure $M(p)$, inférieure à 1 quand x varie dans tout l'intervalle $(2, p-1)$.

Soient deux entiers consécutifs k et $k+1$ de cet intervalle; prenons autour de chacun d'eux un intervalle d'amplitude δ telle que

$$\frac{\delta}{2} = \frac{\alpha}{p} = \frac{1}{2p(p-1)^2}.$$

Quand x varie dans l'intervalle (x_1, x_2) où

$$x_1 = k + \frac{\delta}{2}, \qquad x_2 = k + 1 - \frac{\delta}{2}.$$

On a

$$\cos^2\pi x < \cos^2\frac{\pi\delta}{2} = \cos^2\frac{\pi}{2p(p-1)^2}.$$

Or

$$\cos^2\frac{\pi}{2p(p-1)^2} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{2p(p-1)^2} < 1 - \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{4p^2(p-1)^4},$$

donc quand x varie dans (x_1, x_2), on a

$$\cos^2 \pi x < 1 - \frac{1}{p^2(p-1)^4}$$

et, *a fortiori*

$$(7) \qquad u = \cos^2 \pi x \cos^2 \frac{\pi p}{x} < 1 - \frac{1}{p^2(p-1)^4}.$$

Ce résultat reste valable quand x varie dans tout l'intervalle fermé $(k, k+1)$, car dans les parties de ce dernier intervalle non comprises dans (x_1, x_2), c'est-à-dire dans les intervalles $\left(k, k+\frac{2}{p}\right)$ et $\left(k+1-\frac{2}{p}, k+1\right)$, on a, d'après (6),

$$u \leq \cos^2 \frac{\pi p}{x} < 1 - \frac{2}{(p-1)^2} < 1 - \frac{1}{p^2(p-1)^4},$$

car, pour $p \geq 3$,

$$\frac{2}{(p-1)^2} > \frac{1}{p^2(p-1)^4}.$$

Le nombre k étant un entier quelconque compris entre 2 et $p-1$, l'inégalité (7) est vraie dans *tout* l'intervalle fermé $(2, p-1)$. On voit donc que :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'entier p soit premier est que pour toute valeur de x appartenant à l'intervalle fermé $(2, p-1)$, on ait

$$(7') \qquad u = \cos^2 \pi x \cos^2 \frac{\pi p}{x} < 1 - \frac{1}{p^2(p-1)^4}.$$

Nous venons de démontrer que la condition était nécessaire.

Elle est évidemment suffisante, car si elle est vraie, p est sûrement premier, sinon u atteindrait la valeur un et ne resterait donc pas toujours inférieur à un nombre inférieur à l'unité.

On peut remplacer dans le second membre de (7') la fraction

$$\frac{1}{p^2(p-1)^4}$$

par une quantité plus petite, par exemple

$$\frac{1}{p^6} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{N^6},$$

cette dernière comportant la supposition $p \leq N$, et la condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier peut se traduire par

$$(8) \qquad u = \cos^2 \pi x \cos^2 \frac{\pi p}{x} < 1 - \frac{1}{p^6} \qquad (2 \leq x \leq p-1).$$

ou, si $p \leq N$,

$$(8') \qquad u = \cos^2 \pi x \cos^2 \frac{\pi p}{x} < 1 - \frac{1}{N^6} \qquad (2 \leq x \leq p-1).$$

On peut encore remplacer les premiers membres de (7′), (8) et (8′) par $M(p)$, cette notation désignant, comme nous l'avons déjà indiqué, le maximum absolu de la fonction u quand x varie de 2 à $p-1$.

Terminons ce paragraphe en indiquant une limite inférieure de $M(p)$. Faisons $x=3$, dans u. Alors

$$\frac{p}{3}=q+\frac{r}{3}, \qquad r=1 \text{ ou } 2,$$

d'où

$$u(3)=\cos^2 3\pi \cos^2\frac{\pi p}{3}=\frac{1}{4}.$$

Donc

$$M(p)\geqq\frac{1}{4}. \tag{9}$$

3. Considérons maintenant la fonction

$$u=\cos^2\pi x\cos^2\frac{\pi p}{x} \qquad (2\leqq x\leqq p-1), \tag{10}$$

p étant, pour le moment du moins, un entier quelconque. Nous avons

$$u'=-2\pi\sin\pi x\cos\pi x\cos^2\frac{\pi p}{x}+2\pi\frac{p}{x^2}\cos^2\pi x\cos\pi\frac{p}{x}\sin\pi\frac{p}{x}$$

ou

$$u'=-\pi\sin 2\pi x\cos^2\frac{\pi p}{x}+\frac{\pi p}{x^2}\cos^2\pi x\sin\frac{2\pi p}{x},$$

$$|u'|<\pi+\frac{\pi p}{4}=\pi\frac{p+4}{4}<p+4\leqq 2p, \tag{11}$$

car nous pouvons sans inconvénients supposer $p\geqq 4$.

Considérons la courbe (C) représentant les variations de la fonction définie par (10). Soient toujours M le maximum absolu de u dans l'intervalle fermé $(2, p-1)$ et μ un nombre positif arbitraire mais inférieur à M. Cette dernière condition sera certainement satisfaite si l'on prend $\mu<\frac{1}{4}$, d'après l'inégalité (9). Il existe au moins un intervalle compris dans $(2, p-1)$ où l'on a

$$M-\mu\leqq u\leqq M, \tag{12}$$

soient (x_0, M) les coordonnées du point K de C correspondant au maximum de u. Par K menons la droite D de coefficient angulaire $2p$. Elle ne rencontre C qu'au seul point K et sa portion comprise entre K et l'axe des x est tout entière au-dessous de C. Si nous considérons alors le triangle rectangle déterminé par les trois droites

$$x=x_0; \qquad y=M-\mu, \tag{D}$$

la base ν de ce triangle est telle que

$$\nu = \frac{\mu}{2p} \tag{13}$$

(c'est de la base parallèle à Ox dont il est question). Il est alors clair que les inégalités (12) sont satisfaites au moins pour un intervalle de Ox d'amplitude supérieure à ν. (Ceci suppose le maximum M_1 atteint pour une valeur $x_0 \neq 2$, mais dans ce cas la même conclusion subsisterait en remplaçant D par une droite analogue mais de pente $-2p$.)

4. Soit maintenant l'expression

$$I_m = \left\{ \int_2^{p-1} \cos^{2m} \pi x \cos^{2m} \frac{\pi p}{x} \, dx \right\}^{\frac{1}{m}}. \tag{14}$$

On a

$$I_m \leq \left\{ \int_2^{p-1} M^m \, dx \right\}^{\frac{1}{m}} = (p-3)^{\frac{1}{m}} M;$$

d'autre part, μ étant un nombre positif quelconque, inférieur à M, on a

$$\cos^{2m} \pi x \cos^{2m} \frac{\pi p}{x} > (M - \mu)^m$$

sur un intervalle au moins égal à $\frac{\mu}{2p}$ d'après (13). Il vient donc

$$\int_2^{p-1} \cos^{2m} \pi x \cos^{2m} \frac{\pi p}{x} \, dx > (M - \mu)^m \frac{\mu}{2p}.$$

On a finalement la double inégalité

$$(M - \mu) \left(\frac{\mu}{2p} \right)^{\frac{1}{m}} < I_m < M (p-3)^{\frac{1}{m}},$$

ou encore

$$(M - \mu) \left(\frac{\mu}{2p} \right)^{\frac{1}{m}} - M < I - M < M (p-3)^{\frac{1}{m}} - M. \tag{15}$$

Occupons-nous d'abord de la seconde des inégalités (15). Cherchons à déterminer m de façon que

$$M (p-3)^{\frac{1}{m}} - M < 2\mu, \tag{16}$$

la valeur de μ devant être précisée ultérieurement. Posons

$$(p-3)^{\frac{1}{m}} = 1 + \beta \qquad (\beta > 0),$$

(16) équivaut à

$$p < \frac{2\mu}{M}. \tag{17}$$

On a toujours $M \leq 1$, donc

$$\frac{2\mu}{M} \geq 2\mu.$$

Pour satisfaire à (17) et par suite à (16), il suffira de prendre

$$3 < 2\mu,$$

ou

$$(p-3)^{\frac{1}{m}} - 1 < 2\mu; \tag{18}$$

Or

$$(p-3)^{\frac{1}{m}} - 1 = e^{\frac{\operatorname{Log}(p-3)}{m}} - 1 < \frac{1}{m}\operatorname{Log}(p-3)\, e^{\frac{\operatorname{Log}(p-3)}{m}}. \tag{19}$$

Prenons

$$m > \operatorname{Log} p > \operatorname{Log}(p-3). \tag{20}$$

Alors

$$e^{\frac{\operatorname{Log}(p-3)}{m}} < e^{1} < 3,$$

et (19) donne, d'après (20),

$$(p-3)^{\frac{1}{m}} - 1 < \frac{3\operatorname{Log} p}{m};$$

pour satisfaire à (16), il suffira de prendre

$$\frac{3\operatorname{Log} p}{m} < 2\mu$$

ou

$$m > \frac{3}{2}\frac{\operatorname{Log} p}{\mu}; \tag{21}$$

(21) entrainera (20) puisque μ est inférieur à 1 et par conséquent entrainera aussi (16).

Nous prendrons

$$2\mu = \frac{1}{2p^6}. \tag{22}$$

De sorte que, si

$$m = 6p^6 \operatorname{Log} p, \tag{23}$$

On aura, d'après (15),

$$L_m < M + \frac{1}{2p^6}. \tag{24}$$

Remarquons que si l'on supposait

$$p < N,$$

et si l'on remplaçait la valeur (22) de μ par

$$\frac{1}{2N^6},$$

(16) sera alors satisfaite, à condition de prendre

$$m \geq 6N^6 \operatorname{Log} N, \tag{25}$$

et (24) deviendrait (pour $p \leq N$)

$$I_m < M + \frac{1}{2N^6}. \tag{26}$$

Si p est maintenant supposé premier, (24) et (26) donnent, pour m satisfaisant aux inégalités (23) ou (25),

$$I_m < 1 - \frac{1}{2p^6} \tag{27}$$

ou

$$I_m < 1 - \frac{1}{2N^6}. \tag{28}$$

Il suffit pour le voir de se reporter aux inégalites (8) et (8'). Il y a lieu de noter que les inégalités (27) et (28) ont lieu au sens strict.

Nous allons maintenant montrer que, si p n'est pas premier, on peut prendre m assez grand pour que l'on ait

$$I_m > 1 - \frac{1}{2p^6}. \tag{29}$$

Pour cela, considérons la première des inégalités (15) et cherchons à partir de quelles valeurs de m on a

$$-2\mu_1 < (M - \mu_1)\left(\frac{\mu_1}{2p}\right)^{\frac{1}{m}} - M, \tag{30}$$

μ_1 étant un nombre positif inférieur à M (cette condition étant sûrement remplie si $\mu_1 < \frac{1}{4}$), qui sera précisé par la suite.

Posons

$$\left(\frac{\mu_1}{2p}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 - z \qquad (z > 0),$$

l'inégalité (30) équivaut à

$$z < \frac{\mu_1}{M - \mu_1}, \tag{31}$$

et (31) sera satisfaite si l'on a

$$z < \mu_1. \tag{32}$$

Car le dénominateur du second membre de (31) est inférieur à un. Nous avons alors, en vertu de la première inégalité (15),

$$I_m > M - 2\mu_1 = 1 - 2\mu_1, \tag{33}$$

puisque nous supposons actuellement p non premier, ce qui entraine $M = 1$. Prenons

$$2\mu_1 = \frac{1}{2p^6},$$

il faut déterminer m de façon que

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{8p^7}\right)^{\frac{1}{m}} < \frac{1}{4p^6}. \tag{34}$$

Or

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{8p^7}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 - e^{\frac{1}{m}\operatorname{Log}\frac{1}{8p^7}} < \frac{1}{m}\left|\operatorname{Log}\frac{1}{8p^7}\right| e^{\left|\frac{1}{m}\operatorname{Log}\frac{1}{8p^7}\right|}.$$

Prenons

$$\frac{1}{m}\left|\operatorname{Log}\frac{1}{8p^7}\right| < 1,$$

c'est-à-dire

$$m > \operatorname{Log}(8p^7), \tag{35}$$

d'où

$$\alpha < \frac{1}{m}\left|\operatorname{Log}\frac{1}{8p^7}\right| e^1 < \frac{3}{m}\operatorname{Log}(8p^7);$$

(35) étant supposée satisfaite, il suffira pour satisfaire à (34) de prendre

$$\frac{3}{m}\operatorname{Log}(8p^7) < \frac{1}{4p^6}$$

ou

$$m > 4p^6 \operatorname{Log}(8p^7). \tag{36}$$

Or (36) entraine (34). Donc, si m satisfait à l'inégalité (36), l'inégalité (33) sera satisfaite et l'on aura

$$I_m > 1 - \frac{1}{2p^6}.$$

Si, nous plaçant toujours dans le cas où p n'est pas premier, on prenait

$$2\mu_1 = \frac{1}{2N^6},$$

l'inégalité

$$m > 4N^6 \operatorname{Log}(8N^7) \tag{37}$$

entrainerait

$$I_m > 1 - \frac{1}{2N^6}.$$

D'autre part

$$4p^6 \operatorname{Log}(8p^7) > 6p^6 \operatorname{Log} p;$$

le second membre de cette dernière inégalité n'est autre que le second membre de (23).

Donc, finalement, si l'on prend pour m un nombre satisfaisant à la condition (36), on aura, si p est premier,

$$I_m < 1 - \frac{1}{2p^6}$$

et si p n'est pas premier

$$I_m > 1 - \frac{1}{2p^6}.$$

Si l'on considère les entiers p inférieurs à un même nombre fixe N, d'ailleurs quelconque, la condition (37) entrainerait, si p est premier,

$$I_m < 1 - \frac{1}{2N^6}$$

et, dans le cas contraire,

$$I_m > 1 - \frac{1}{2N^6}.$$

Nous sommes ainsi conduit à énoncer les deux théorèmes suivants

Pour que le nombre entier p soit premier, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_2^{p-1} \cos^{2m} \pi x \cos^{2m} \frac{\pi p}{x}\, dx < \left(1 - \frac{1}{2p^6}\right)^m, \tag{38}$$

où m désigne un nombre fixe, puis arbitrairement une fois pour toutes parmi ceux qui satisfont à la condition

$$m \geq 4p^6 \operatorname{Log}(8p^7).$$

Si l'on considère seulement les nombres entiers inférieurs à un nombre donné N, d'ailleurs arbitraire, on obtient l'énoncé suivant :

Pour que l'entier $p \leq N$ *soit premier, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_2^{p-1} \cos^{2m} \pi x \cos^{2m} \frac{\pi p}{x}\, dx < \left(1 - \frac{1}{2N^6}\right)^m, \tag{39}$$

m désignant un nombre fixe, choisi arbitrairement une fois pour toutes parmi ceux qui satisfont à la condition

$$m \geq 4N^6 \operatorname{Log}(8N^7).$$

L'intérêt du second énoncé consiste en ce que l'exposant m peut être pris indépendant de p. Insistons sur le fait qu'il suffit de savoir que (38) ou (39)

est vraie pour *une seule valeur de* m [pourvu que celle-ci satisfasse à la condition appropriée, (36) ou (37) suivant qu'il s'agit du premier énoncé ou du second] pour pouvoir affirmer que p est premier.

Remarque. — Si $p = 4$, on a

$$\operatorname{Log}(8p^7) = \operatorname{Log}8 + 7\operatorname{Log}p < 4p;$$

cette inégalité est vraie pour $p = 4$. En effet

$$\operatorname{Log}8 + 7\operatorname{Log}4 < 13 < 4 \times 4.$$

La dérivée du premier membre de la relation à démontrer est égale à $\frac{7}{p}$ et reste inférieure à celle du second membre qui est 4. Il en résulte que ce premier membre reste inférieur au second pour $p > 4$, puisque cette circonstance se présente pour $p = 4$ et en vertu de la relation entre leurs dérivées.

On pourra donc, dans les énoncés précédents, remplacer m par une quantité plus grande et prendre ainsi

$$m = 16p^7$$

dans le premier énoncé et

$$m = 16\,\mathrm{N}^7$$

dans le second. On pourrait même se borner à prendre

$$m = p^9 \qquad \text{ou} \qquad m > \mathrm{N}^9$$

car, pour $p = 4$, on a

$$p^2 = 16 \qquad \text{et} \qquad p^9 > 16p^7.$$

5. Il est facile de généraliser les considérations précédentes et d'en tirer une condition nécessaire et suffisante pour que deux entiers r et s ($r < s$) soient premiers entre eux.

En effet, pour que r et s soient premiers entre eux, il faut et il suffit que l'on ait

$$(40) \qquad \varepsilon = \cos^2\pi x \cos^2\frac{\pi r}{x}\cos^2\frac{\pi s}{x} < 1,$$

quand x varie dans l'intervalle $(2, s)$, intervalle qu'on pourrait d'ailleurs réduire à $(2, r)$; mais nous conserverons le premier intervalle, ce qui permet d'obtenir un peu plus de simplicité.

Nous allons développer l'étude de la condition (40). Supposons r et s premiers entre eux. On démontre d'abord, comme au paragraphe 2, que si k est un entier quelconque, on a toujours dans cette hypothèse

$$(41) \qquad \cos^2\frac{\pi r}{k}\cos^2\frac{\pi s}{k} < \cos^2\frac{\pi}{s}.$$

soit alors la fonction

$$\varphi = \cos^2 \pi \frac{r}{x} \cos^2 \pi \frac{s}{x}.$$

On a

$$|\varphi'| < \pi \frac{r+s}{4} < 2s,$$

et l'on voit facilement, comme plus haut, que, si x varie dans l'intervalle

$$\left(k - \frac{\alpha}{s}, k + \frac{\alpha}{s}\right) \qquad \text{avec } \alpha = \frac{1}{2s^2},$$

on aura, au sens strict,

$$\cos^2 \frac{\pi r}{x} \cos^2 \frac{\pi s}{x} < 1 - \frac{2}{s^2}, \tag{42}$$

et, en achevant le raisonnement comme au paragraphe 3, on voit facilement que, dans *tout l'intervalle* $(2, s)$, *on aura*

$$\varphi = \cos^2 \pi x \cos^2 \frac{\pi r}{x} \cos^2 \frac{\pi s}{x} < 1 - \frac{1}{s^6}. \tag{43}$$

On peut dire que cette condition (43) exprime une condition nécessaire et suffisante pour que r et s soient premiers entre eux : elle est bien nécessaire d'après ce que nous venons de voir et elle est suffisante, car si r et s n'étaient pas premiers entre eux, φ atteindrait au moins une fois la valeur 1.

Remarquons enfin que le maximum de φ, *a priori* non nul, est supérieur à $\frac{1}{16}$. Il suffit pour le voir de remplacer x par 3 dans l'expression de φ. Ceci posé, un calcul facile montre que

$$\varphi' < 3s. \tag{44}$$

Si M désigne alors le maximum de φ quand x varie dans $(2, s)$ et μ un nombre positif inférieur à M $\left(\text{ce qui aura lieu si l'on prend } \mu < \frac{1}{16}\right)$, la double inégalité

$$\mathrm{M} - \mu \leq \varphi \leq \mathrm{M} \tag{45}$$

sera, en vertu de (44), satisfaite sur un intervalle de Ox d'amplitude au moins égale à

$$\lambda = \frac{\mu}{3s}.$$

Posons alors

$$J_m = \left\{ \int_2^s \cos^{2m} \pi x \cos^{2m} \frac{\pi r}{x} \cos^{2m} \frac{\pi s}{x} dx \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

On a

$$(\mathrm{M} - \mu)^{\frac{1}{m}} \left(\frac{\mu}{3s}\right)^{\frac{1}{m}} < \mathrm{M} - J_m < \mathrm{M} - \mathrm{M}(s-2)^{\frac{1}{m}} < \mathrm{M}. \tag{46}$$

Raisonnons comme au paragraphe 4, et considérons d'abord la seconde des inégalités (46). On montre que, si

$$m \geqq 6s^6 \operatorname{Log} s, \tag{47}$$

on aura

$$\mathcal{I}_m < \mathrm{M} + \frac{1}{2s^6}.$$

De sorte que, si r et s sont premiers entre eux,

$$\mathcal{I}_m < 1 - \frac{1}{2s^6}; \tag{48}$$

si maintenant r et s ne sont pas premiers entre eux, on montre, comme au paragraphe 4 que l'on peut prendre m assez grand pour que

$$\mathcal{I}_m > 1 - \frac{1}{2s^6}. \tag{49}$$

Il suffit pour cela, de reprendre le raisonnement employé pour démontrer l'inégalité (29) en observant que $2p$ doit être maintenant remplacé par $3s$.

r et s n'étant pas premiers entre eux, l'inégalité (49) sera satistaite à condition de faire

$$m \geqq 4\left(\frac{3s}{2}\right)^6 \operatorname{Log}\left[8\left(\frac{3s}{2}\right)^7\right],$$

ou, plus simplement,

$$m \geqq 30s^6 \operatorname{Log}(70s^7). \tag{50}$$

Remarquons que (50) entraîne (47). On peut donc résumer ainsi les résultats obtenus :

Pour que r et s soient premiers entre eux, il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_2^s \cos^{2m}\pi x \cos^{2m}\frac{\pi r}{x} \cos^{2m}\frac{\pi s}{x}\, dx < \left(1 - \frac{1}{2s^6}\right)^m, \tag{51}$$

m désignant un nombre fixe, astreint seulement à satisfaire à la condition

$$m \geqq 30s^6 \operatorname{Log}(70s^7);$$

s est ici supposé désigner le plus grand des deux nombres r et s.

Si l'on considère les nombres r, s inférieurs à un nombre N d'ailleurs quelconque, on pourrait encore, en raisonnant toujours comme dans les 4 premiers paragraphes, remplacer cet énoncé par le suivant :

Pour que les entiers r et s, inférieurs à N, *soient premiers entre eux, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_2^N \cos^{2m}\pi x \cos^{2m}\frac{\pi r}{x} \cos^{2m}\frac{\pi s}{x}\, dx < \left(1 - \frac{1}{2\mathrm{N}^6}\right)^m, \tag{52}$$

m désignant un nombre fixe choisi arbitrairement une fois pour toutes parmi les valeurs de m qui vérifient l'inégalité

$$m \geqq 30\,N^6 \operatorname{Log}(70\,N^7).$$

On pourrait faire sur ces énoncés des remarques analogues à celles qui terminent le paragraphe 4.

Insistons sur le fait qu'il suffit pour la validité des théorèmes que (51) et (52) soient vraies pour *une seule valeur de m*, à condition que celle-ci satisfasse aux inégalités convenables figurant dans leurs énoncés.

Il y a lieu de noter ici que la limite supérieure de l'intégrale (52) peut être prise égale à N, donc indépendante de r et de s, alors que, dans l'énoncé analogue du paragraphe 4 l'intégrale correspondante (39) avait sa limite supérieure égale à $p-1$. Cela provient du fait que si r et s sont premiers entre eux, il n'existe aucune valeur de x (sauf 1) qui soit entière et divise à la fois r et s, tandis qu'un nombre premier est divible par lui-même et l'unité, d'où la nécessité de prendre dans (39) la limite supérieure de l'intégrale inférieure à p.

Il n'est pas difficile d'étendre les résultats précédents au cas de n nombres entiers $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Soit à exprimer que n entiers distincts $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Désignons, pour simplifier, par N un nombre supérieur à tous les précédents.

Pour que $r_1, r_2, \ldots, r_n$ soient premiers entre eux dans leur ensemble, il faut et il suffit que

$$(53) \qquad w = \cos^2\pi x \cos^2\frac{\pi r_1}{x}\cos^2\frac{\pi r_2}{x}\cdots\cos^2\frac{\pi r_n}{x} < 1,$$

quand x varie dans l'intervalle (2, N).

En appliquant les méthodes précédentes, on voit d'abord que la condition (53) peut se remplacer par

$$w < 1 - \frac{1}{N^6}.$$

Soit alors

$$(54) \qquad K_m = \left\{\int_2^N \cos^{2m}\pi x \cos^{2m}\frac{\pi r_1}{x}\cdots\cos^{2m}\frac{\pi r_n}{x}\,dx\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

On démontrerait ici, en reprenant nos raisonnements antérieurs, que μ désignant un nombre positif quelconque, inférieur au maximum M de w dans (2, N), on a

$$(55) \qquad (M-\mu)\left[\frac{\mu}{(n+1)N}\right]^{\frac{1}{m}} - M < K_m - M < M(N-2)^{\frac{1}{m}} - M.$$

On verrait d'ailleurs immédiatement que

$$M > \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

en faisant $x = 3$ dans l'expression de w. Mais il y a lieu de noter que la première des équations (55) ne sera utilisée que dans le cas où M est égal à 1, de sorte qu'il suffira de prendre toujours

$$p < 1.$$

Remarquons que (55) se déduit de (15) en y remplaçant, à droite $2p$ par $(n+1)N$, et, à gauche $p-1$ par N. On voit alors facilement qu'il suffit de remplacer dans (36), $2p$ par $(n+1)N$, ce qui donne

$$m \geq \frac{1}{2^4}(n+1)^6 N^6 \operatorname{Log} \frac{(n+1)^7 N^7}{2^4} \tag{56}$$

pour obtenir le théorème suivant :

Pour que n entiers $r_1, r_2, \ldots, r_n$ inférieurs à un même nombre N *soient premiers entre eux dans leur ensemble, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_2^N \cos^{2m} \pi x \cos^{2m} \frac{\pi r_1}{x} \cdots \cos^{2m} \frac{\pi r_n}{x} dx < \left(1 - \frac{1}{2N^6}\right)^m,$$

m désignant un nombre pris une fois pour toutes d'une façon arbitraire parmi ceux qui satisfont à la condition

$$m \geq \frac{1}{2^4}(n+1)^6 N^6 \operatorname{Log} \frac{(n+1)^7 N^7}{2^4}.$$

6. L'idée qui nous a guidé et consistant à rattacher à un principe d'extremum la question étudiée peut être appliquée de bien des façons. Nous en indiquerons ici quelques-unes, en nous bornant toujours au problème qui consiste à traduire analytiquement la propriété pour un entier d'être un nombre premier. Il existe un théorème fini correspondant au théorème de Riesz et qui est le suivant :

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un nombre *fini* quelconque de quantités *positives*. L'expression

$$\left\{\sum_{k=1}^{k=n} a_k^m\right\}^{\frac{1}{m}}$$

tend vers une limite quand m augmente indéfiniment, et cette limite est égale au plus grand des nombres a_k.

La démonstration de cette proposition est très simple. Nous reviendrons sur celle-ci dans le paragraphe suivant. L'exposé que nous allons donner actuellement, tout en s'inspirant du théorème cité, se suffira entièrement à lui-même.

Soit p un entier quelconque. Posons

$$S_m = \cos^{2m}\frac{\pi p}{2} + \cos^{2m}\frac{\pi p}{3} + \dots \cos^{2m}\frac{\pi p}{p-1} \tag{56}$$

ou

$$S_m = \sum_{k=2}^{k=p-1} \cos^{2m}\frac{\pi p}{k}.$$

D'après ce que nous avons vu au début [inégalité (2)], si k ne divise pas p, on a

$$\cos^2\frac{\pi p}{k} < \cos^2\frac{\pi}{p} = 1 - \sin^2\frac{\pi}{p} < 1 - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{p}\right)^2 = 1 - \frac{4}{p^2}.$$

Supposons p premier. Il vient alors

$$S_m < (p-2)\cos^{2m}\frac{\pi}{p} < (p-2)\left(1 - \frac{4}{p^2}\right)^m,$$

d'où

$$S^{\frac{1}{m}} < (p-2)^{\frac{1}{m}}\left(1 - \frac{4}{p^2}\right). \tag{57}$$

Je me propose de déterminer m de façon que

$$(p-2)^{\frac{1}{m}}\left(1 - \frac{4}{p^2}\right) < 1 - \frac{2}{p^2}. \tag{58}$$

Il suffit de prendre m tel que

$$(p-2)^{\frac{1}{m}} < \frac{1 - \frac{2}{p^2}}{1 - \frac{4}{p^2}} < 1 + \frac{2}{p^2 - 4} \tag{59}$$

ou

$$e^{\frac{\operatorname{Log}(p-2)}{m}} - 1 < \frac{2}{p^2 - 4}. \tag{60}$$

Or, si x est un nombre positif quelconque, on a

$$e^x - 1 < x e^x.$$

Donc (60) et (59) seront satisfaites si l'on a

$$\frac{\operatorname{Log}(p-2)}{m} e^{\frac{\operatorname{Log}(p-2)}{m}} < \frac{2}{p^2 - 4}. \tag{61}$$

Prenons déjà

$$\frac{\operatorname{Log}(p-2)}{m} < 1 \tag{62}$$

et (61), donc (59) seront satisfaites en prenant

$$\frac{\mathrm{Log}(p-2)}{m}\times 3<\frac{2}{p^2-4},$$

car alors

$$e^{\frac{\mathrm{Log}(p-2)}{m}}<e<3,$$

ce qui donne :

$$m>\frac{3}{2}(p^2-4)\,\mathrm{Log}(p-2). \tag{63}$$

Or, p étant supposé supérieur à 2, l'inégalité (63) entraîne (62) et finalement (58). On voit donc que si m vérifie l'inégalité (63), on aura, d'après (57) et (58),

$$S_m^{\frac{1}{m}}<1-\frac{2}{p^2}<1. \tag{64}$$

Supposons maintenant que p ne soit pas premier, il vient alors

$$S_m\geq 1, \tag{65}$$

d'où

$$S_m^{\frac{1}{m}}\geq 1. \tag{65'}$$

Ainsi, la condition (64) *qui peut s'écrire*

$$S_m<\left(1-\frac{2}{p^2}\right)^m \tag{66}$$

exprime la condition nécessaire et suffisante pour que p soit un nombre premier, l'exposant m étant pris arbitrairement parmi les nombres qui satisfont à l'inégalité :

$$m>\frac{3}{2}(p^2-4)\,\mathrm{Log}(p-2). \tag{63}$$

On peut encore dire :

Pour que p soit premier, il faut et il suffit que l'inégalité (63) *entraîne*

$$S_m<1; \tag{67}$$

cette dernière condition étant entendue au sens strict [égalité des deux membres de (67) exclu].

La validité de cette conclusion suppose seulement que (67) *ait lieu pour une seule valeur de m pourvu que celle-ci satisfasse à* (63).

Supposons p premier : il est clair alors que (66) entraîne (67) et la condition est bien nécessaire. Elle est suffisante. Supposons (67) vérifiée pour une valeur de m satisfaisant à (63). Le nombre p est premier, sinon (65) aurait lieu, ce qui est contradictoire avec la supposition précédente.

Remarque. — Si, comme nous l'avons fait dans les paragraphes précédents, nous considérons seulement les entiers p inférieurs à un même nombre N pouvant d'ailleurs être pris arbitraire, on montrerait facilement, en reprenant les raisonnements ci-dessus que, *pour que le nombre entier p satisfaisant à*

$$p \leq N$$

soit premier, il faut et il suffit que

$$S_m < \left(1 - \frac{2}{N^2}\right)^m, \tag{68}$$

m étant un nombre fixe pouvant être pris arbitrairement parmi ceux qui satisfont à

$$m > \frac{3}{2}(N^2 - 4)\,\mathrm{Log}(N - 2). \tag{69}$$

Les inégalités (68) et (69) sont respectivement les analogues des inégalités (66) et (63).

La condition (68) peut d'ailleurs être remplacée par

$$S_m < 1, \tag{70}$$

pourvu que m satisfasse toujours à (69). L'intérêt de l'inégalité (68) est d'être plus précise que l'inégalité (70).

7. Ceci posé, nous allons transformer l'expression de S_m. L'emploi de *formules sommatoires* permet de transformer de façons très diverses des expressions de ce type. Nous nous bornerons ici à indiquer comment une application simple des éléments de la théorie des fonctions de variables complexes permet d'obtenir une transformation intéressante de S_m. Le procédé que nous allons appliquer est étroitement apparenté d'ailleurs aux méthodes conduisant aux formules sommatoires.

Soit dans le plan complexe (z) un contour fermé C auquel on impose seulement de contenir à son intérieur les points de l'axe réel ayant pour abscisses les nombres entiers allant de 2 à $p-1$, à l'exclusion des autres points d'*abscisses entières de cet axe*. On a alors

$$S_m = \frac{1}{2i}\int_C \cos^{2m}\frac{\pi p}{z}\cot \pi z\, dz, \tag{71}$$

et l'on peut appliquer à cette expression de S_m les conclusions du paragraphe 6.

On a ainsi le théorème suivant :

Pour que le nombre entier p tel que

$$p \leq N$$

soit premier, il faut et il suffit que si m désigne un exposant fixe, pris arbitrairement parmi les nombres qui satisfont à l'inégalité

$$m > \frac{3}{2}(N^2 - 4)\,\mathrm{Log}(N - 2),$$

on ait

$$\frac{1}{2i}\int_C \cos^{2m}\frac{\pi p}{z}\cot \pi z\, dz < 1.$$

Nous nous bornerons actuellement à ces résultats, quoiqu'il soit manifeste, d'une part, qu'une intégrale telle que (71) soit susceptible d'une étude beaucoup plus poussée, et que d'autre part la méthode que nous employons dans ce paragraphe, pour exprimer qu'un nombre p est premier, soit, elle aussi, susceptible de s'étendre à beaucoup d'autres questions.

Remarque. — Reprenons l'expression (56) de S_m, c'est-à-dire

$$S_m = \sum_{k=2}^{k=p-1} \cos^{2m}\frac{\pi p}{k},$$

quand on fait tendre m vers $+\infty$, le terme

$$\cos^{2m}\frac{\pi p}{k}$$

tend vers zéro ou reste égal à 1 suivant que k ne divise pas ou divise p. Si donc n est le nombre des diviseurs de p, autres que 1 et p, on voit que S_m *tend vers n quand m tend vers* $+\infty$.

Soit C le contour fermé du plan complexe z défini antérieurement. On a

$$n = \lim_{m=\infty} \frac{1}{2i}\int_C \cos^{2m}\frac{\pi p}{z}\cot \pi z\, dz, \tag{72}$$

et la condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier deviendra donc

$$\lim_{m=+\infty} \frac{1}{2i}\int_C \cos^{2m}\frac{\pi p}{z}\cot \pi z\, dz = 0. \tag{73}$$

La supériorité de l'énoncé précédent sur cette dernière proposition provient de ce que m peut y recevoir une valeur fixe, évitant ainsi l'étude du passage à la limite dans (73).

8. Nous allons encore appliquer d'une manière différente le principe d'extremum dont nous indiquerons quelques applications dans le présent article.

Notre point de départ sera tout à fait élémentaire. Nous partirons en effet de la définition même des nombres premiers. Celle-ci peut s'énoncer de la façon suivante :

Pour que $p > 2$ soit premier, il faut et il suffit que le plus petit des nombres

$$A_{k,k'} = \left(\frac{p}{k} - k'\right)^2, \tag{74}$$

obtenus en donnant à k et k' toutes les valeurs entières allant de 2 à $p-1$ (valeurs extrêmes comprises), soit différent de zéro.

Précisons encore : Si p est premier, la division de p par k donne

$$\frac{p}{k} = q + \frac{r}{k} \tag{75}$$

et la fraction qui figure au second membre de (75) est au moins égale à

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{p},$$

car on a évidemment

$$1 \leq r \leq k-1 < p-1.$$

Il en résulte facilement alors

$$A_{k,k'} > \frac{1}{p^2}. \tag{76}$$

Pour que p soit premier, il est donc nécessaire que le plus petit des A soit supérieur au second membre de (76), et cette condition est suffisante, car si elle est satisfaite aucun des nombres

$$\left(\frac{p}{k} - k'\right)^2 \qquad (k, k' = 2, \ldots, p-1)$$

ne peut être nul.

On a, d'autre part,

$$A < 4p^2$$

et la condition (76) est équivalente à la suivante

$$0 < A'_{k,k'} = 4p^2 - A_{k,k'} < 4p^2 - \frac{1}{p^2}, \tag{76'}$$

où k et k' prennent indépendamment l'un de l'autre, toutes les valeurs entières allant de 2 à $p-1$. Cherchons alors, quel est, dans ces conditions, le plus grand des nombres $A'_{k,k'}$ dont nous désignerons la valeur par M. Remarquons, d'abord, que, pour que p soit premier, il faut et il suffit que

$$M < 4p^2 - \frac{1}{p^2}. \tag{77}$$

Cette condition (77) peut, d'ailleurs se remplacer par toute condition de la forme

$$M < 4p^2 - \alpha, \tag{78}$$

où α désigne un nombre quelconque tel que

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p^2}, \tag{79}$$

car (78), *prise au sens strict* équivaut à

$$A_{k,k'} > 0, \tag{80}$$

qui exprime que A ne peut s'annuler, donc que p est premier : l'inégalité (80), nécessaire pour que p soit premier est aussi suffisante.

Or, d'après ce que nous avons vu au paragraphe 6, relativement au théorème fini correspondant à celui de Riesz, on a

$$M = \lim_{m=\infty} \left\{ \sum_{k=2}^{k=p-1} \sum_{k'=2}^{p-1} A'^m \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Posons donc

$$S_m = \sum_{k=2}^{k=p-1} \sum_{k'=2}^{k'=p-1} \left[4p^2 - \left(\frac{p}{k} - k' \right)^2 \right]^m. \tag{81}$$

Pour que p soit premier, il faut et il suffit que

$$\lim S_m^{\frac{1}{m}} < 4p^2 - \alpha, \tag{82}$$

où

$$0 \leq \alpha \leq \frac{1}{p^2}.$$

Si l'on prend $\alpha = 0$ dans (82), il doit être bien entendu que l'on suppose cette inégalité vérifiée au sens strict.

Il est maintenant nécessaire, comme nous l'avons fait au paragraphe 6 pour une autre question, d'étudier de plus près la façon dont $S_m^{\frac{1}{m}}$ tend vers sa limite.

Nous allons envisager le problème d'une façon générale. Soient alors

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

un nombre quelconque, n, de quantités *positives*. Soit a la plus grande de celles-ci.

Nous avons

$$a^m < a_1^m + a_2^m + \ldots a_n^m < n a^m,$$

d'où

$$a < (a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m)^{\frac{1}{m}} < n^{\frac{1}{m}} a,$$

ou encore

$$0 < \left(\sum_i a_i^m \right)^{\frac{1}{m}} - a < \left(n^{\frac{1}{m}} - 1 \right) a.$$

Or

$$n^{\frac{1}{m}} - 1 = e^{\frac{\operatorname{Log} n}{m}} - 1 < \frac{\operatorname{Log} n}{m} e^{\frac{\operatorname{Log} n}{m}}.$$

Prenons déjà

$$m > \operatorname{Log} n$$

d'où

$$e^{\frac{\operatorname{Log} n}{m}} < e^1 < 3.$$

Il vient alors

$$0 < \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i^m \right)^{\frac{1}{m}} - a < 3 \frac{\operatorname{Log} n}{m} a,$$

soit K un nombre fixe tel que

$$a_i \leq K \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On a donc, *a fortiori*,

$$0 < \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i^m \right)^{\frac{1}{m}} - a < \frac{3K \operatorname{Log} n}{m}.$$

Soit ε un nombre positif arbitraire. Prenons à la fois

$$m > \operatorname{Log} a \qquad \text{et} \qquad m > \frac{3K \operatorname{Log} n}{\varepsilon}, \tag{83}$$

il viendra

$$0 < \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i^m \right)^{\frac{1}{m}} - a < \varepsilon.$$

Appliquons ceci à la question que nous étudions actuellement. Nous pouvons trouver un nombre m_0 tel que l'inégalité

$$m > m_0$$

entraîne

$$0 < S_m^{\frac{1}{m}} - M < \frac{1}{p^2}. \tag{84}$$

D'après ce que nous venons d'exposer, il suffira de prendre

$$m > m_0 > \frac{3 \times 4p^2 \operatorname{Log}(p-2)^2}{\frac{1}{p^2}} = 12 p^4 \operatorname{Log}(p-2), \tag{85}$$

car, ici, on peut faire dans les inégalités (83)

$$K = 4p^2; \qquad n = (p-2)^2; \qquad \varepsilon = \frac{1}{p^2}.$$

Choisissons arbitrairement un nombre m vérifiant (85). On voit facilement que, pour que p soit premier, il faut et il suffit que

$$S_m^{\frac{1}{m}} < 4p^2. \tag{86}$$

La condition est nécessaire; en effet, si p est premier, on a

$$M < 4p^2 - \frac{1}{p^2},$$

d'après (77); donc, dans ce cas, d'après (84)

$$S_m^{\frac{1}{m}} < M + \frac{1}{p^2} < 4p^2.$$

La condition est suffisante, car, puisque

$$M < S_m^{\frac{1}{m}},$$

l'inégalité

$$S_m^{\frac{1}{m}} < 4p^2$$

entraînera

$$M < 4p^2,$$

et cette dernière inégalité, prise au sens strict (la possibilité pour les deux membres d'être égaux étant donc formellement exclue) entraîne bien que p est premier comme nous l'avons vu un peu plus haut.

On a donc le théorème suivant :

Pour que le nombre entier p soit premier, il faut et il suffit que l'on ait

$$S_m < 4^m p^{2m}, \tag{87}$$

m désignant un nombre pris arbitrairement une fois pour toutes parmi ceux qui satisfont à la condition

$$m > 12p^4 \operatorname{Log}(p-2).$$

Remarques. — 1° Comme nous l'avons souvent fait, considérons seulement les nombres p tels que

$$p \leq N,$$

N étant un nombre arbitraire fixe. Posons

$$S'_m = \sum_{k=2}^{k=p-1} \sum_{k'=2}^{k'=p-1} \left[4N^2 - \left(\frac{p}{k} - k' \right)^2 \right]^m, \tag{88}$$

en reprenant les raisonnements précédents, on voit facilement que :

Pour que p soit premier, il faut et il suffit que l'on ait

$$S'_m < 4^m N^{2m},$$

m désignant un nombre fixe choisi arbitrairement une fois pour toutes parmi ceux qui satisfont à l'inégalité

$$m > 12 N^4 \operatorname{Log}(N-2).$$

Ce dernier énoncé est plus simple que le précédent, l'exposant m ne dépendant pas de p, qui figure lui-même d'une façon plus simple dans l'expression de S'_m que dans celle de S_m.

2° On a toujours, quel que soit p entier,

$$0 < 1 - \frac{1}{4p^2}\left(\frac{p}{k} - k'\right)^2 \leq 1 \qquad (k,\ k' = 2,\ \ldots,\ p-1),$$

le terme intermédiaire de cette inégalité ne pouvant être égal à 1 que si p n'est pas premier, k désignant alors un de ses diviseurs autres que 1 et p.

Si donc nous considérons la somme

$$s_m = \sum_{k=2}^{p-1} \sum_{k'=2}^{p-1} \left[1 - \frac{1}{4p^2}\left(\frac{p}{k} - k'\right)^2\right]^m, \tag{89}$$

on voit que, p étant fixe, s_m *tend vers zéro quand m tend vers l'infini si p est premier, et, dans le cas contraire, vers le nombre n des diviseurs de p, la somme* s_m *renfermant alors n termes égaux à* s_m.

On a un énoncé analogue pour la somme :

$$s'_m = \sum_{k=2}^{p-1} \sum_{k'=2}^{p-1} \left[1 - \frac{1}{4N^2}\left(\frac{p}{k} - k'\right)^2\right]^m,$$

où

$$p \leq N.$$

Ces derniers énoncés sont plus simples en apparence que ceux que nous venons de donner plus haut, mais le passage à la limite qui y figure les rend au contraire à certains points de vue plus complexes que les précédents dans lesquels l'exposant m était fixe.

L'intérêt des considérations ci-dessus réside en partie dans le fait que les sommes S_m, S'_m, s_m, s'_m peuvent recevoir une forme simple en utilisant les éléments de la théorie des fonctions de variables complexes.

Dans le plan d'une variable complexe x, soit C un contour fermé coupant l'axe réel en deux points seulement x_1 et x_2 tels que

$$1 < x_1 < 2 \qquad \text{et} \qquad p-1 < x_2 < p.$$

On peut prendre, par exemple,

$$x_1=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2=p-\frac{1}{2}.$$

C renferme à son intérieur tous les points dont les affixes sont les nombres entiers compris entre 2 et $p-1$, valeurs extrêmes comprises.

Soit, de même, dans le plan d'une seconde variable complexe y un contour fermé C′ rencontrant le nouvel axe réel en deux points seulement dont les affixes y_1 et y_2 satisfont aux conditions

$$1<y_1<2 \quad \text{et} \quad p-1<y_2<p.$$

On peut prendre encore ici

$$y_1=\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad y_2=p-\frac{1}{2}$$

par exemple.

Le contour C′ renferme à son intérieur tous les points du plan complexe (y) dont les affixes sont les nombres entiers successifs allant de 2 à $p-1$. Les sommes S_m, S'_m, s_m, s'_m peuvent alors être mises sous des formes très simples par application des théorèmes généraux relatifs aux fonctions analytiques. Ainsi la théorie des résidus donne immédiatement

$$S'_m=-\frac{1}{4}\int_C\int_{C'}\left[4N^2-\left(\frac{p}{x}-y\right)^2\right]^m \cot\pi x\cot\pi y\,dx\,dy,$$

les autres sommes S_m, s_m, s'_m auraient des expressions analogues.

En tenant compte de ce que nous venons d'exposer, les théorèmes antérieurement démontrés dans ce paragraphe prennent une forme intéressante. On a, par exemple, la proposition suivante :

Pour que le nombre entier $p\leq N$ *soit premier, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\int_C\int_{C'}\left[4N^2-\left(\frac{p}{x}-y\right)^2\right]^m \cot\pi x\cot\pi y\,dx\,dy>-4^{m+1}N^{2m},$$

m désignant un nombre choisi arbitrairement une fois pour toutes, parmi ceux qui satisfont à la condition

$$m>12N^4\,\mathrm{Log}(N-2),$$

et encore

L'intégrale

$$I=-\frac{1}{4}\int_C\int_{C'}\left[1-\frac{1}{4N^2}\left(\frac{p}{x}-y\right)^2\right]^m \cot\pi x\cot\pi y\,dx\,dy$$

tend vers une limite quand m tend vers l'infini. Cette limite est égale au nombre des diviseurs de p compris entre 2 et $p-1$ *si les contours* C *et* C′ *sont choisis comme plus haut.*

De sorte que, pour que p soit premier, il faut et il suffit que la limite de I soit nulle.

9. Indiquons maintenant une autre façon d'appliquer les idées du paragraphe précédent.

Nous partirons de la remarque élémentaire suivante : pour que p soit premier, il faut et il suffit qu'aucun des nombres

$$\frac{(p-1)!}{p}k \qquad (k=1, 2, \ldots, p-1)$$

soit entier (¹).

1° La condition est nécessaire. Si p est premier, il est premier avec 2, ..., $p-1$, k, et ne saurait donc diviser leur produit.

2° La condition est sutfisante. Supposons en effet

$$\frac{(p-1)!\,k}{p}$$

non entier. Alors k ne divise pas p. Car, s'il en était autrement, le quotient

$$\frac{p}{k}=q$$

serait un entier inférieur à p qui figurerait donc dans $(p-1)!$ et

$$\frac{(p-1)!}{q}=\frac{(p-1)!}{p}k$$

serait entier, contrairement à l'hypothèse. Alors p n'étant pas divisible par aucun des nombres 2, 3, ..., $p-1$ est premier.

Exprimer que p est premier revient donc à exprimer que la plus petite des quantités :

$$B_{k,k'}=\left[\frac{(p-1)!}{p}k-k'\right]^2,$$

où

$$k=1, 2, \ldots, p-1; \qquad k'=1, 2, \ldots, (p-1)!$$

n'est pas nulle. On verrait d'ailleurs facilement, comme dans le paragraphe 8, que cette condition équivaut encore ici à

$$B_{k,k'}\geqq\frac{1}{p^2},$$

(¹) On sait même, avec plus de précision, que, pour que p soit premier, il faut et il suffit que p *ne divise pas* $1\,2\ldots(p-1)$.

Nous n'utiliserons pas cette proposition (quoique certaines des considérations qui vont suivre en seraient simplifiées), car nous ne voulons, conformément au but de ce travail, ne faire appel ici, en fait de théorie des nombres, qu'aux propriétés et aux définitions fondamentales.

d'ailleurs

$$B_{k,k'} < 4[(p-1)!]^2 < 4(p!)^2.$$

On raisonnerait alors comme plus haut. Considérons seulement les nombres p majorés par un même nombre N d'ailleurs quelconque.

Pour que p soit premier, il faut et il suffit que :

$$\lim_{m=\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{k'=1}^{(p-1)!} \left[4(N!)^2 - \left[\frac{(p-1)!}{p} k - k' \right]^2 \right] \right\}^{\frac{1}{m}} \leq 4(N!)^2 - \frac{1}{N^2},$$

et l'on peut raisonner sur ce résultat comme plus haut.

On pourrait ainsi assigner une valeur m_0 de l'exposant m, dépendant seulement, dans le cas actuel, de N et non de p, et telle que, m étant un nombre pris arbitrairement une fois pour toutes et astreint seulement à être supérieur à m_0, la condition précédente serait équivalente à

$$\sum_{k=1}^{p-1} \sum_{k'=1}^{(p-1)'} \left\{ 4(N!)^2 - \left[\frac{(p-1)!}{p} k - k' \right]^2 \right\}^m < 4^m (N!)^{2m},$$

l'inégalité étant entendue au sens strict.

Signalons enfin que, pour exprimer que p est premier, on pourrait encore écrire

$$\lim_{m=\infty} \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{k'=1'}^{(p-1)'} \left\{ 1 - \frac{1}{4(N!)^2} \left[\frac{(p-1)!}{p} k - k' \right]^2 \right\}^m = 0;$$

les sommes doubles précédentes dépendent de p d'une manière plus compliquée que les sommes analogues du numéro 8. Par contre, k et k' y figurent d'une façon plus simple et la théorie des nombres de Bernoulli permettrait de transformer leurs expressions en effectuant les sommations indiquées (1). Il y a là un sujet de recherches s'étendant d'ailleurs à d'autres questions que celles étudiées dans ce travail et que nous nous bornerons à mentionner ici.

Ajoutons encore que les sommes doubles figurant ci-dessus peuvent se transformer en intégrales doubles par le procédé que nous avons indiqué au paragraphe précédent. Cette transformation pouvant d'ailleurs être rattachée à

---

(1) Conformément à la remarque de la page 76, quand on se borne à chercher une condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier, on peut faire $k = 1$ et l'on aurait une sommation simple au lieu d'une sommation double. Ainsi on aurait la proposition suivante :

Pour que p soit premier, il faut et il suffit que :

$$\lim_{m=\infty} \sum_{k'=1}^{(p-1)!} \left\{ 1 - \frac{1}{4(N!)^2} \left[\frac{(p-1)!}{p} - k' \right]^2 \right\}^m = 0.$$

Des remarques analogues sont applicables aux transformations des sommes doubles précédentes, dans le cas particulier actuel, en supposant toujours comme le théorème rappelé dans la note précédente pour que p soit premier, il faut et il suffit que $(p-1)!$ ne soit pas divisible par p.

celle dont nous indiquions la possibilité par l'introduction des formules sommatoires et des nombres de Bernoulli.

Il pourrait y avoir intérêt, dans ce dernier cas surtout, à modifier un peu l'expression de nos sommes doubles. Bornons-nous à donner la proposition suivante qui découle immédiatement de ce que nous venons d'exposer :

Pour que p soit premier, il faut et il suffit que l'on ait

$$0 = \lim_{m=\infty} \int_{C} \int_{C'} \left\{ 1 - \frac{1}{4(N!)^2} \left[\frac{(p-1)!}{p} x - y \right]^2 \right\}^m \cot \pi x \cot \pi y \, dx \, dy,$$

C et C′ étant deux contours fermés définis d'une façon analogue à ceux que nous avons fait intervenir au paragraphe précédent.

Remarque. — Pour exprimer que p est premier, on pourrait aussi considérer les nombres

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{p}{k} - k' \right)^2} \qquad (k, k' = 2, 3, \ldots, p-1);$$

le plus grand d'entre eux doit être *inférieur* à 1 (condition nécessaire et suffisante). On serait donc conduit à introduire la somme

$$S_{1,m} = \sum_{k=2}^{p-1} \sum_{k'=2}^{p-1} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{p}{k} - k' \right)^2} \right]^m,$$

et la condition précédente deviendrait

$$\lim_{m=\infty} S_{1,m}^{\frac{1}{m}} < 1.$$

De même, soit

$$S_{2,m} = \sum_{k=1}^{p-1} \sum_{k'=1}^{(p-1)!} \left\{ \frac{1}{1 + \left[\frac{(p-1)!}{p} k - k' \right]^2} \right\}^m;$$

le fait que p est premier se traduirait encore par

$$\lim S_{2,m}^{\frac{1}{m}} < 1.$$

On pourrait reprendre, sur ces nouvelles sommes, des raisonnements analogues à ceux que nous avons déjà faits, mais les transformations en intégrales doubles sont moins simples.

Une application plus serrée de la théorie des fonctions de variables complexes aux intégrales rencontrées au cours de cette étude est possible, et il existe des techniques permettant de les transformer de façons très diverses. Il y a là un sujet de recherches que nous nous bornerons encore à mentionner ici et dont l'intérêt paraît certain.

Nous nous proposons d'ailleurs de revenir sur ce point dans un travail ultérieur, ainsi que sur les développements qu'appelleraient les considérations par lesquelles nous allons terminer ce travail.

10. On peut encore, en revenant au début du paragraphe précédent, formuler l'énoncé suivant :

Pour que p soit premier, il faut et il suffit que la fonction

$$v(x) = \cos^2\pi x \cos^2\pi \frac{(p-1)!}{p} x \qquad (1 \leq x \leq p-1)$$

reste inférieure à 1 *en valeur absolue* (1).

Cet énoncé est analogue à celui qui nous a servi de point de départ au paragraphe 1 et l'on pourrait développer à son sujet des considérations semblables.

Ainsi, le maximum absolu de v dans $(1, p-1)$ est

$$\lim_{m=\infty} \left\{ \int_1^{p-1} \cos^{2m}\pi x \cos^{2m}\pi \frac{(p-1)!}{p} x\, dx \right\}^{\frac{1}{m}}.$$

Donc, *pour que p soit premier, il faut et il suffit que*

$$\lim_{m=\infty} \left\{ \int_1^{p-1} \cos^{2m}\pi x \cos^{2m}\pi \frac{(p-1)!}{p} x\, dx \right\}^{\frac{1}{m}} < 1;$$

---

(1) Si l'on voulait faire appel à la proposition que nous avons déjà rappelée en note, à savoir que pour que p soit premier, il faut et il suffit qu'il ne divise pas $(p-1)!$: on pourrait au lieu de supposer que x varie dans tout l'intervalle fermé $(1, p-1)$ supposer qu'il varie seulement dans un intervalle tel que $(1 \leq x \leq a)$, où a désigne un nombre arbitraire inférieur à p. On pourrait prendre ainsi $a < 2$. Cette remarque est applicable à tout ce qui suit. En outre, en prenant $a - 1$ assez petit on pourrait remplacer l'énoncé ci-dessus par le suivant : *pour que p soit premier, il faut et il suffit que*

$$\max \text{ de } \cos^2\pi \frac{(p-1)!}{p} x < 1 \qquad (1 \leq x \leq a),$$

d'où

$$\lim_{m=\infty} \left\{ \int_1^{a} \cos^{2m}\pi \frac{(p-1)!}{p} x\, dx \right\}^{\frac{1}{m}} < 1.$$

En adoptant le point de vue de la théorie des équations, on pourrait encore dire que pour $a - 1$ assez petit, l'équation

$$\sin\pi \frac{(p-1)!}{p} z = 0$$

ne doit pas avoir de racines dans l'intervalle fermé $(1, a)$. Ces indications paraissent faciles à développer. Ceci aboutirait probablement au théorème de Wilson.

L'inconvénient du point de vue actuel est de supposer qu'on prend pour point de départ un théorème d'arithmétique pure déjà relativement élevé. L'intérêt des considérations plus générales développées paragraphe 10 et dans le reste de cet article n'est pas diminué par la remarque actuelle ou les remarques analogues antérieurement faites.

en étudiant de plus près l'intégrale précédente, on pourrait éviter le passage à la limite et obtenir un énoncé analogue à celui du paragraphe 4, relations (38) et (39).

Considérons encore la somme

$$\sigma_m = \sum_{k=1}^{k=p-1} \cos^{2m}\pi \frac{(p-1)!}{p} k.$$

Les remarques d'un caractère très élémentaire faites au début du paragraphe précédent montrent que σ_m tend vers une limite quand m tend vers $+\infty$ et que cette limite est nulle si p est premier, supérieur à 1 dans le cas contraire. Une application simple de la formule des résidus donne facilement

$$\sigma_m = \frac{1}{2i}\int_C \cos^{2m}\pi \frac{(p-1)!}{p} z \cot \pi z \, dz,$$

C désignant un contour fermé renfermant à son intérieur la partie de l'axe réel sur laquelle sont situés les points dont les affixes sont les nombres entiers allant de 1 à $p-1$ et ne contenant pas d'autre point d'affixe entière.

La condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier se traduira donc par

$$\lim_{m=\infty} \frac{1}{2i}\int_C \cos^{2m}\pi \frac{(p-1)!}{p} z \cot \pi z \, dz = 0;$$

l'intégrale précédente paraît facile à étudier et l'on doit sans doute aboutir à retrouver l'énoncé du théorème de Wilson sous la forme suivante : pour que p soit premier, il faut et il suffit que

$$\sin \pi \frac{(p-1)! + 1}{p} = 0.$$

L'étude dont nous indiquons ici la possibilité ne semble pas avoir été faite malgré l'extrême simplicité de son point de départ qui, quoique apparaissant ici comme un cas particulier de l'idée générale développée en partie dans cet article, pouvait facilement être trouvée de façon indépendante.

En résumé, les idées qui ont servi de base à ce travail sont les suivantes :

Après avoir remarqué que de nombreuses questions d'arithmétique pouvaient être rattachées à un principe d'extremum en envisageant les entiers comme réalisant le maximum de $\cos^2 \pi x$, nous avons pris un cas très particulier : le problème d'exprimer, par une condition analytique assez simple, la propriété pour un entier d'être un nombre premier. Nous avons alors étudié cette question en restant systématiquement dans un ordre d'idées que l'on peut dire issu du théorème de Riesz rappelé au début. Mais l'idée fondamentale de traduire des propriétés de nature arithmétique par des conditions d'extremum

a une généralité beaucoup plus grande et peut être traitée par d'autres méthodes, si bien que cet article quoique contenant quelques énoncés assez simples ne constitue qu'un premier travail touchant un domaine très vaste.

Pour finir, nous donnerons un exemple d'une autre façon d'appliquer les idées précédentes, mais en envisageant toujours le même problème : celui d'exprimer que p est premier, mais en abandonnant les considérations plus ou moins issues du théorème de Riesz. Nous nous bornerons d'ailleurs ici à des indications très brèves. La condition

$$\cos^2 \pi x \cos^2 \frac{\pi p}{x} < 1 \qquad (2 \leq x \leq p-1),$$

qui est la condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier équivaut à l'énoncé suivant :

Pour que p soit premier, il faut et il suffit que

$$f(z) = \cos \pi z \cos \frac{\pi p}{z} \pm 1 = 0 \tag{90}$$

n'ait pas de racines *réelles* dans l'intervalle $(2, p-1)$. Il est facile de traduire cela analytiquement. Soit dans le plan de la variable complexe (z), le rectangle R ayant deux côtés parallèles à Oy dont les équations respectives sont

$$x = \frac{3}{2} \qquad \text{et} \qquad x = p - \frac{1}{2}.$$

Les côtés parallèles à Ox ayant respectivement pour équations :

$$y = -\delta \qquad \text{et} \qquad y = +\delta,$$

en prenant δ assez petit, R ne contiendra pas d'autres racines que les racines réelles de $f(z)$, s'il en existe. Une discussion facile permettrait de préciser la valeur de δ. En désignant par Γ le contour de R, la condition nécessaire et suffisante pour que p soit premier s'exprime par

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0.$$

Mêmes remarques au sujet de l'équation

$$g(z) \equiv \cos \pi z \cos \pi \frac{(p-1)!}{p} z \pm 1 = 0; \tag{91}$$

l'absence de racines réelles dans $(1, p-1)$ entraîne que p est premier et inversement.

On peut adopter, pour exprimer l'absence de racines réelles dans un certain intervalle, un point de vue de fonctions de variables réelles. On sait, en effet, que le nombre n des racines de

$$f(x) = 0$$

comprises dans (a, b) est

$$(92) \qquad n = -\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{\varepsilon(ff'' - f'^2)}{f^2 + \varepsilon f'^2}\,dx + \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\varepsilon f'(b)}{f(b)} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\varepsilon f'(a)}{f(a)},$$

les arc tang étant compris entre $\left(-\frac{\pi}{2}\text{ et }+\frac{\pi}{2}\right)$ et ε une quantité constante quelconque.

Ce théorème (¹) se démontre d'ailleurs sans peine, en remarquant que la primitive correspondant à l'intégrale qui figure dans (92) est

$$\operatorname{arc\,tang}\left[\frac{\varepsilon f'(x)}{f(x)}\right].$$

Toutefois, le théorème que nous venons ainsi de rappeler suppose que toutes les racines de $f(z)$ sont simples. Il faut donc modifier un peu les expressions de f et g définies par (90) et (91) afin de pouvoir leur appliquer cette proposition, car si $f = 0$, par exemple, a des racines réelles, celles-ci sont doubles. Cette modification est facile : on peut toujours trouver un nombre α^2 assez voisin de 1, pour que, si p est premier, l'équation

$$\cos^2\pi x \cos^2\frac{\pi p}{x} - \alpha^2 = 0$$

n'ait pas de racines réelles comprises dans $(2, p-1)$, et que dans le cas contraire, ses racines réelles soient *simples*. Une discussion facile, mais un peu longue, permettrait d'assigner une valeur pour α^2.

Il suffit alors d'appliquer la formule (92) en y faisant

$$n = 0; \qquad a = \frac{3}{2}; \qquad b = p - \frac{1}{2}$$

et

$$f(x) = \cos\pi x \cos\frac{\pi p}{x} \pm \alpha.$$

Des considérations analogues pourraient être développées pour

$$g(x) = \cos\pi x \cos\pi\frac{(p-1)!}{p}x \pm \beta.$$

L'intérêt des formules ainsi obtenues consiste dans la possibilité d'appliquer aux intégrales qui y figurent un procédé de calcul, soit par développement en série, soit par une méthode d'approximation.

(¹) *Cf.* E. Picard, *Nombre de racines communes à plusieurs équations* (*Journ. de Math. pures et appliquées*, t. 8, 1892, p. 12).

SUR

LES PROPRIÉTÉS DIFFÉRENTIELLES

DU PREMIER ORDRE

DES SURFACES SIMPLES DE JORDAN

ET QUELQUES APPLICATIONS

PAR M. A. MARCHAUD.

Introduction.

Dans le présent travail je reprends l'étude des propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan. Une Note des *Comptes rendus* (¹) m'avait suffit pour établir les résultats fondamentaux suivants.

En tout point intérieur d'une surface simple de Jordan où le faisceau des tangentes (paratingent de M. Bouligand) ne remplit pas tout l'espace, il se compose des droites ne pénétrant pas à l'intérieur de deux demi-cônes convexes symétriques, pouvant se réduire à des dièdres ou à des demi-espaces; le faisceau dérivé (contigent de M. Bouligand) est l'ensemble des demi-droites issues du point considéré, remplissant la région comprise entre deux surfaces coniques (engendrées par la variation continue d'une demi-droite) ayant chacune d'elles une génératrice et une seule dans tout demi-plan dont l'arête passe par le point et n'est pas une tangente, ces surfaces coniques pouvant être confondues; enfin le faisceau des tangentes contient le faisceau dérivé et s'il se réduit partout à un plan, celui-ci varie continûment.

Je complète ici ces résultats en établissant d'autres relations entre le faisceau des tangentes et le faisceau dérivé en un point et en montrant le parti que l'on peut tirer de la connaissance du faisceau des tangentes en un point pour étudier la variation du faisceau dérivé dans son voisinage, ce qui conduit notamment à une propriété intéressante pour les nombres dérivés des fonctions

(¹) A. MARCHAUD, *Sur le contingent et le paratingent en un point d'une surface simple de Jordan* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 208, 11 janvier 1937, p. 86).

de deux variables à nombres dérivés bornés et qui, semble-t-il, n'avait pas été remarquée jusqu'à présent : si pour une direction donnée un nombre dérivé d'une fonction $f(m)$ à nombres dérivés bornés est discontinu en m_0, les nombres dérivés dans toutes les directions, sauf peut-être dans deux directions opposées, sont tous discontinus en m_0.

La propriété essentielle du faisceau des tangentes est la convexité de son complémentaire, on en déduit en particulier que la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau des tangentes se réduise à un plan est que l'on puisse trouver deux plans distincts tels que chacun d'eux ne contienne qu'une seule tangente, celle-ci n'étant pas sur l'intersection des plans.

Je termine le Mémoire par diverses applications aux surfaces dont certaines familles de sections planes sont convexes. Voici quelques-uns des résultats obtenus.

1° Soit S une surface représentée par une équation

$$z = f(x, y) \quad (^1)$$

et dont les sections par les plans $x = \text{const.}$ et $y = \text{const.}$ sont des arcs convexes (pouvant comporter des segments de droites) et considérons un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ de S non situé sur le bord.

a. La section du faisceau dérivé en M_0 par les plans $x = x_0$ et $y = y_0$ se réduit aux demi-tangentes aux sections de S par ces plans : $M_0\alpha_1$, $M_0\beta_1$ et $M_0\alpha_2$, $M_0\beta_2$.

b. La section du faisceau des tangentes par ces mêmes plans se compose des droites ne pénétrant pas à l'intérieur de l'angle $\alpha_1 M_0 \beta_1$ et de l'angle $\alpha_2 M_0 \beta_2$. Il en résulte que si les sections de S par les plans $x = \text{const.}$ et $y = \text{const.}$ ont partout une tangente la surface possède partout un plan tangent continu.

Dans le cas où les angles $\alpha_1 M_0 \beta_1$ et $\alpha_2 M_0 \beta_2$ sont non plats et tournés l'un vers le haut et l'autre vers le bas, le faisceau dérivé se compose des quatre secteurs plans $\alpha_1 M_0 \alpha_2$, $\alpha_2 M_0 \beta_1$, $\beta_1 M_0 \beta_2$, $\beta_2 M_0 \alpha_1$.

2° Si la surface S est limitée par un contour se projetant sur le plan $z = 0$ suivant un contour convexe, et si de plus toutes ses sections par les plans parallèles à Oz sont convexes, elle ne peut être qu'un morceau de la frontière d'un corps convexe ou bien un morceau de *quadrique réglée* non dégénérée (²).

(¹) La fonction f n'est pas supposée à nombres dérivés bornés.

(²) Dans un travail antérieur A. MARCHAUD, *Sur les surfaces du troisième ordre de la géométrie finie* (*Journ. de Math.*, t. XVIII, fasc. IV, 1939), les résultats de la Note précitée m'avaient déjà conduit à une propriété remarquable et inattendue des surfaces réglées non coniques du troisième ordre, à savoir qu'elles possèdent partout, sauf aux points de la directrice rectiligne et peut-être le long des deux génératrices limites un plan tangent continu, il n'est bien entendu fait aucune hypothèse relativement à l'exsitence de tangentes aux sections planes.

J'ajoute que ce travail est indépendant des recherches de M. Bouligand et de ses élèves et de celles de M. Roger : *Sur les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points.*

I. — Faisceau des tangentes et faisceau dérivé.

1. Considérons un morceau de surface simple de Jordan : S, image biunivoque et bicontinue d'un disque circulaire plan σ. Je me propose, dans cette première partie, d'étudier la disposition des tangentes et des demi-tangentes en tout point intérieur de S où l'ensemble des tangentes ne remplit pas tout l'espace.

Précisons d'abord les définitions et les notations. Soit M_0 un point donné de S, une demi-tangente à S en M_0 est par définition toute demi-droite d'accumulation de demi-droites M_0M', d'origine M_0, lorsque les points M' de S tendent vers M_0, une *tangente* à S en M_0 est par définition toute droite d'accumulation de droites MM' lorsque les points M et M' de S tendent vers M_0, l'un d'eux pouvant toutefois rester confondu avec M_0. Comme à toute sécante M_0M' on peut associer une sécante MM' aussi voisine qu'on veut, il est immédiat que les tangentes peuvent se définir comme limites de sécantes MM', les deux points étant distincts de M_0. Adoptant l'expression proposée par M. Roger [1] j'appellerai *faisceau dérivé* de S en M_0 l'ensemble des demi-tangentes à la surface en ce point; ce faisceau sera désigné par la notation $\mathcal{D}(S, M_0)$ ou plus simplement $\mathcal{D}(M_0)$ lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté. D'autre part j'appellerai *faisceau des tangentes* à S et M_0 l'ensemble des tangentes à la surface en ce point et le représenterai par $\mathcal{T}(S, M_0)$, ou plus simplement par $\mathcal{T}(M_0)$. Le faisceau dérivé et le faisceau des tangentes sont le « contigent » et le « paratingent » de M. Bouligand, qui nomme *paratingente* ce que j'appelle une *tangente* [2]. On observera que si le support de toute demi-tangente est une tangente, toute demi-droite d'origine M_0, dont le support est une tangente, n'est pas forcément une demi-tangente; mais il ne saurait y avoir de confusion si l'on prend le mot composé « demi-tangente » en bloc.

2. Les ensembles $\mathcal{D}(M_0)$ et $\mathcal{T}(M_0)$ sont évidemment fermés et le second contient le premier. Il sera parfois commode de considérer $\mathcal{T}(M_0)$ comme un ensemble de demi-droites : celui des éléments d'accumulation des demi-droites MM' d'origine M.

Soit $[\mathcal{T}(M_0)]_\varepsilon$ l'ensemble des droites obtenues en remplaçant chaque droite de $\mathcal{T}(M_0)$ par le cône de révolution plein (ensemble de droites) de sommet M_0, d'angle au sommet 2ε ayant pour axe la droite considérée. Il

(1) F. Roger, *Sur les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points* (*Thèse*. Paris, 1938; *Acta Math.*, t. 69).

(2) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 65.

résulte immédiatement de la définition du faisceau des tangentes que si le point M de S est assez voisin de M_0 le faisceau de sommet M_0 déduit de $\mathfrak{T}(M)$ par translation sera contenu dans $[\mathfrak{T}(M_0)]_\varepsilon$. La propriété précédente est ce que M. Bouligand appelle la semi-continuité supérieure d'inclusion, on en déduit immédiatement que *si le faisceau des tangentes se réduit à un plan en* M_0 *et partout dans son voisinage, ce plan varie d'une manière continue.*

3. Supposons maintenant M_0 *intérieur* à S, c'est-à-dire que son image μ_0 soit intérieure à σ, et *plaçons-nous dans l'hypothèse où* $\mathfrak{T}(M_0)$ *ne remplit pas tout l'espace.* Le faisceau de tangentes étant fermé on peut trouver une droite $A'_0M_0A_0$ qui lui soit étrangère. Soit alors le morceau S_1 de S défini par un cercle σ_1 de centre μ_0 et contenu dans σ. Il résulte immédiatement de la définition de $\mathfrak{T}(M_0)$ que si le cercle σ_1 est assez petit, S_1 se projette sur un plan donné P, parallèlement à $A_0A'_0$ d'une manière biunivoque et bicontinue suivant un domaine fermé ayant la projection de M_0 à son intérieur. De plus, M_1 et M_2 étant deux points de S_1 et m_1 et m_2 leurs projections sur P, le rapport

$$\frac{\overline{m_2M_2}-\overline{m_1M_1}}{m_1m_2}$$

est borné. Ainsi un voisinage S_0 de M_0 (sur S) est représentable en axes rectangulaires ou obliques par une équation

$$z=f(x,y)=f(m), \tag{1}$$

où la fonction f est uniforme dans un cercle (fermé) s_0, contenant à son intérieur la projection de M_0 et satisfait dans ce domaine à une condition de Lipschitz

$$|f(m_1)-f(m_2)|\leq k\,m_1m_2 \qquad (k=\text{const.}). \tag{2}$$

Réciproquement : en tout point intérieur d'un morceau de surface défini de la manière précédente le faisceau des tangentes ne contient évidemment pas la parallèle à l'axe des z.

4. Remarquons en passant qu'il suffit pour l'existence d'une relation telle que (2) que la fonction f satisfasse à des conditions de Lipschitz par rapport à deux directions distinctes du plan des xy, que l'on peut toujours supposer être celle des axes, c'est-à-dire que l'on ait

$$|f(x_1,y)-f(x_2,y)|\leq k_1|x_1-x_2|,$$
$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq k_2|y_1-y_2|,$$

ou si l'on préfère que les nombres dérivés de f par rapport à x et par rapport à y soient séparément bornés (¹).

(¹) *Voir* plus loin, n° 12.

Soient en effet M_1 et M_2 deux points de S_0, $m_1(x_1, y_1)$ et $m_2(x_2, y_2)$ leurs projections, on a

$$|f(m_1) - f(m_2)| \leq k_1 |x_1 - x_2| + k_2 |y_1 - y_2|,$$

et d'autre part, φ désignant l'angle des axes,

$$\overline{m_1 m_2}^2 = (x_1 - x_2)^2 \sin^2\varphi + [(x_1 - x_2)\cos\varphi + (y_1 - y_2)]^2,$$
$$= (y_1 - y_2)^2 \sin^2\varphi + [(y_1 - y_2)\cos\varphi + (x_1 - x_2)]^2,$$

ce qui permet d'écrire

$$k_1 |x_1 - x_2| + k_2 |y_1 - y_2| < \frac{k_1 + k_2}{\sin\varphi} m_1 m_2.$$

5. Nous allons étudier la structure de $\mathfrak{T}(M_0)$ et de $\mathfrak{D}(M_0)$ dans l'hypothèse énoncée au début du numéro 3. Soient M et M′ deux points de S_0, m et m' leurs projections sur le plan des xy parallèlement à Oz. Appelons *pente* de la demi-droite MM′ le rapport $\frac{f(m') - f(m)}{mm'}$, si deux demi-droites sont parallèles et opposées leurs pentes sont opposées. Considérons alors quatre points de S_0 : M_1, M_1', M_2, M_2', leurs projections : m_1, m_1', m_2, m_2' et les points M et M′ dont les projections m et m' sont définiespar les relations

$$\overrightarrow{m_1 m} = t\overrightarrow{m_1 m_2}, \qquad \overrightarrow{m_1' m'} = t\overrightarrow{m_1' m_2'} \qquad (0 \leq t \leq 1).$$

Lorsque t varie de 0 à 1, M et M′ restent sur S_0 ; d'autre part si l'angle des vecteurs $\overrightarrow{m_1 m_1'}$, et $\overrightarrow{m_2 m_2'}$ est moindre que π la demi-droite mm' tourne dans le même sens et la longueur mm' ne s'annule pas. La pente de MM′ varie donc continûment et prend toutes les valeurs entre les pentes de M_1M_1' et M_2M_2'. De là il résulte que si deux demi-droites d'origine M_0, situées dans un même demi-plan Q d'arête $A_0'M_0A_0$ parallèle à Oz appartiennent toutes deux à $\mathfrak{T}(M_0)$, il en est de même de l'angle qu'elles limitent; il suffit pour le voir de choisir M_1M_1' et M_2M_2' de manière qu'elles tendent respectivement vers les demi-droites données. En supposant M_1 et M_2 confondus avec M_0 on obtient la même propriété pour $\mathfrak{D}(M_0)$.

Ainsi, *les sections respectives de* $\mathfrak{T}(M_0)$ *et* $\mathfrak{D}(M_0)$ *par tout demi-plan* Q *se composent de deux angles pleins* $T'M_0T$ *et* $D'M_0D$, *le premier contenant le second.* Bien entendu ce dernier ou tous les deux peuvent se réduire à une demi-droite unique. Désignons par α l'angle que fait Ox avec la trace de Q sur le plan des xy et soient $T(M_0, \alpha)$, $T'(M_0, \alpha)$, $D(M_0, \alpha)$, $D'(M_0, \alpha)$ les pentes respectives de M_0T, M_0T', M_0D, M_0D'. Je supposerai $T'(M_0, \alpha)$ au plus égal à $T(M_0, \alpha)$ et $D'(M_0, \alpha)$ au plus égal à $D(M_0, \alpha)$. On a alors

$$-k \leq T'(M_0, \alpha) \leq D'(M_0, \alpha) \leq D(M_0, \alpha) \leq T(M_0, \alpha) \leq +k,$$
$$T(M_0, \alpha + \pi) = -T'(M_0, \alpha), \qquad T'(M_0, \alpha + \pi) = -T(M_0, \alpha).$$

Nous allons voir dans un instant que les quatre fonctions de α : T', D', D, T, périodiques de période 2π, satisfont à une même condition de Lipschitz de coefficient k. Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible nous supprimerons l'indication du point M_0.

6. Conservant les notations du numéro précédent, supposons que m_1 et m_2 soient confondus et que m_2m_2' se réduise de m_1m_1' par une rotation d'angle ε de module moindre que π. Évaluons la pente de $M_1'M_2'$. On a

$$f(m_1') = f(m_1) + m_1m_1' \times \text{pente de } M_1M_1',$$
$$f(m_2') = f(m_1) + m_1m_1' \times \text{pente de } M_1M_2'.$$

D'où l'on déduit

$$\text{pente de } M_1'M_2' = \frac{m_1m_1'}{m_1'm_2'}(\text{pente de } M_1M_2' - \text{pente de } M_1M_1'),$$

et par suite

$$|\text{pente de } M_1M_2' - \text{pente de } M_1M_1'| \leq \frac{m_1'm_2'}{m_1m_1'}K,$$

et enfin

$$|\text{pente de } M_1M_2' - \text{pente de } M_1M_1'| \leq k|\varepsilon|. \tag{3}$$

De cette dernière relation découlent immédiatement les propriétés suivantes :

1° *Le faisceau dérivé en un point intérieur de* S *s'obtient en prenant les demi-tangentes aux sections par les demi-plans ayant pour arête une droite étrangère au faisceau des tangentes* (1).

En effet, soit M_0L une demi-tangente obtenue comme limite de M_1M_1' (M_1 confondu avec M_0). Il suffit de prendre m_1m_2' dans le demi-plan d'arête $A_0'M_0A_0$ défini par M_0L. L'angle ε tend alors vers zéro et par suite M_1M_1' tend vers M_0L.

2° *Pour obtenir la section du faisceau des tangentes par un plan contenant une droite qui lui est étrangère, on peut se borner aux cordes parallèles à ce plan.*

La démonstration est exactement la même.

3° *Les quatre fonctions de* α : $T(M_0, \alpha)$, $T'(M_0, \alpha)$, $D(M_0, \alpha)$, $D'(M_0, \alpha)$ *satisfont à une même condition de Lipschitz.*

Démontrons-le par exemple pour $T(\alpha)$. Soient α_1 et α_2 deux valeurs de α dont la différence est en module moindre que π. Prenons m_1m_1' et m_1m_2' d'angles polaires respectifs α_1 et α_2. On peut choisir m_1m_1' de manière que la pente

(1) Ce résultat a été établi d'une manière différente par M. Bouligand, Cf. *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 168.

de $M_1M'_1$ tende vers $T(\alpha_1)$. Soit alors p la pente d'une des limites de $M_1M'_2$, on a d'une part,

$$p \leq T(\alpha_2),$$

et d'autre part, d'après la relation (3),

$$T(\alpha_1) - p \leq k|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

d'où l'on déduit

$$T(\alpha_1) - T(\alpha_2) \leq k|\alpha_1 - \alpha_2|.$$

En intervertissant les rôles de α_1 et de α_2, on obtiendrait

$$T(\alpha_2) - T(\alpha_1) \leq k|\alpha_2 - \alpha_1|,$$

ce qui donne en définitive

$$|T(\alpha_1) - T(\alpha_2)| \leq k|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

quels que soient α_1 et α_2 tel que $|\alpha_1 - \alpha_2|$ soit moindre que π. La démonstration est exactement la même pour les autres fonctions.

On remarquera que le coefficient k de la condition de Lipschitz commune aux quatre fonctions de α est indépendant de la position de M_0 à l'intérieur de S_0

En résumé nous avons obtenu les résultats suivants.

La section de $\mathfrak{T}(M_0)$ par tout demi-plan Q d'arête $A'_0M_0A_0$, extérieure à $\mathfrak{T}(M_0)$, est constituée par un angle $T'M_0T$ pouvant se réduire à un rayon unique. Lorsque Q tourne autour de $A'_0M_0A_0$ les demi-droites M_0T et M_0T' décrivent deux demi-cônes simples (1) symétriques par rapport à M_0 que j'appellerai les *frontières supérieure* et *inférieure* de $\mathfrak{T}(M_0)$ et représenterai par les notations $\Theta(M_0)$ et $\Theta'(M_0)$. De même $\mathfrak{D}(M_0)$ est engendré par la rotation d'un angle $D'M_0D$ dont les côtés décrivent deux demi-cônes simples $\Delta(M_0)$ $\Delta'(M_0)$, qui seront appelés les *frontières supérieure* et *inférieure* de $\mathfrak{D}(M_0)$.

7. Je vais compléter ces résultats en considérant les complémentaires de $\mathfrak{T}(M_0)$ et de $\mathfrak{D}(M_0)$. L'angle A_0M_0T dont on supprime le côté M_0T engendre un faisceau ouvert de demi-droites que je désignerai par $\theta(M_0)$, la frontière de ce domaine est $\Theta(M_0)$. De même l'angle A'_0M_0T' amputé de M_0T' engendre un faisceau ouvert de demi-droites $\theta'(M_0)$, symétrique de $\theta(M_0)$, dont la frontière est $\Theta'(M_0)$. On voit immédiatement que $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$ n'ont pas de rayon commun et de plus que si deux demi-droites non opposées, issues de M_0, sont l'une intérieure, l'autre extérieure à $\theta(M_0)$, l'angle qu'elles forment contient au moins un rayon de sa frontière $\Theta(M_0)$. De même le complémentaire du faisceau dérivé est la somme de deux faisceaux ouverts sans rayons communs $\delta(M_0)$ et $\delta'(M_0)$, engendrés par la rotation des angles A_0M_0D

(1) Un demi-cône simple de sommet O est un ensemble de demi-droites issues de O dont la section par une sphère centrée en O est une courbe simple fermée.

A'_0M_0D' amputés respectivement des rayons M_0D et M_0D'; les frontières respectives de ces faisceaux sont $\Delta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$; de plus, si deux demi-droites non opposées, d'origine M_0, sont l'une intérieure, l'autre extérieure à $\partial(M_0)$, par exemple, il y a au moins un rayon de la frontière de ce faisceau à l'intérieur de leur angle. Remarquons enfin que $\partial(M_0)$ et $\partial'(M_0)$ contiennent respectivement $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$.

Ceci posé, soient M_0A_1 et M_0A_2 deux rayons distincts de $\theta(M_0)$, $M_0A'_1$ et $M_0A'_2$ les demi-droites respectivement opposées; le rayon $M_0A'_2$ appartenant à $\theta'(M_0)$ est extérieur à $\theta(M_0)$, il existe donc à l'intérieur de l'angle $A_1M_0A'_2$ au moins un rayon de $\mathfrak{T}(M_0)$. Comme $A'_2M_0A_2$ est étrangère à $\mathfrak{T}(M_0)$, elle peut jouer le même rôle que $A'_0M_0A_0$, par suite l'angle $A_1M_0A_2$ ne peut contenir de rayon de $\mathfrak{T}(M_0)$, sans quoi M_0A_1 appartiendrait à ce faisceau. Mais alors $A_1M_0A_2$ ne peut renfermer non plus de rayons de $\theta'(M_0)$, car un tel rayon étant extérieur à $\theta(M_0)$ il y aurait nécessairement un rayon de $\mathfrak{T}(M_0)$ à l'intérieur de $A_1M_0A_2$, ce qui, on vient de le voir, est impossible. Ainsi tout angle $A_1M_0A_2$ appartient à $\theta(M_0)$, ce dernier est donc convexe. Par suite :

En tout point intérieur d'une surface simple de Jordan, où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, son complémentaire se décompose en deux faisceaux ouverts opposés sans rayons communs et CONVEXES.

La convexité de $\theta(M_0)$ et de $\theta'(M_0)$ est comme on le verra une propriété très importante. Nous allons obtenir pour $\partial(M_0)$ et $\partial'(M_0)$, un résultat intéressant mais qui fera nécessairement intervenir $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$. Soient M_0B_1 et M_0A_2 deux rayons distincts appartenant respectivement à $\partial(M_0)$ et $\theta(M_0)$. Considérons encore $M_0A'_2$ opposé à M_0A_2, il appartient à $\theta'(M_0)$ donc à $\partial'(M_0)$. L'angle $B_1M_0A'_2$ contient donc à son intérieur au moins un rayon de $\Delta(M_0)$. En raisonnant exactement comme plus haut on voit que tout l'angle $B_1M_0A_2$ appartient à $\partial(M_0)$. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

En tout point intérieur d'une surface simple de Jordan où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, le complémentaire du faisceau dérivé se décompose en deux faisceaux ouverts distincts et tels que tout angle dont les côtés appartiennent à l'un d'eux en fait entièrement partie, à condition que l'un au moins de ces côtés soit extérieur au faisceau des tangentes.

8. Examinons maintenant les différents cas possibles pour $\theta(M_0)$.

1° *Les frontières $\Theta(M_0)$ et $\Theta'(M_0)$ n'ont pas de rayon commun.*

Dans ce cas la fermeture de $\theta(M_0)$, soit $\theta(M_0)+\Theta(M_0)$, ne possède pas de rayons opposés, c'est donc un vrai demi-cône (plein) convexe (¹).

(¹) Sur les cônes convexes on pourra consulter l'intéressant ouvrage de M. BONNESSEN, *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes*, Gauthier-Villars, 1929.

L'ensemble $\Theta(M_0) + \Theta'(M_0)$ constitue un cône convexe (surface conique) qu'on peut appeler le *cône directeur* des tangentes en M_0. *Le faisceau des tangentes est l'ensemble des droites ne pénétrant pas à l'intérieur du cône directeur.* D'autre part les propriétés des cônes convexes montrent que les tangentes se distribuent par plans : les *plans de tangentes*, qui ne sont autres que les plans passant par M_0 et ne pénétrant pas à l'intérieur du cône directeur.

2° *Les frontières* $\Theta(M_0)$ *et* $\Theta'(M_0)$ *ont en commun un couple de rayon et un seul.*

Soient GM_0H les rayons communs et M_0A_1 un rayon de $\theta(M_0)$, ce faisceau étant ouvert M_0A_1 est l'axe d'un demi-cône de révolution appartenant à $\theta(M_0)$. D'autre part il existe des rayons M_0A de $\theta(M_0)$ aussi près qu'on veut de M_0G. On en déduit immédiatement que l'angle GM_0A_1, sauf son côté M_0G, appartient à $\theta(M_0)$. Il en est de même de l'angle HM_0A_1 amputé de M_0H. Le faisceau $\theta(M_0)$ est donc un *dièdre* ouvert d'arête GM_0H.

En utilisant la seconde proposition du numéro précédent on démontrerait de la même façon que $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$ sont des dièdres ouverts d'arête GM_0H.

Si donc $\Theta(M_0)$ *et* $\Theta'(M_0)$ *ont un couple de rayons communs et un seul, le faisceau des tangentes se compose de deux dièdres (pleins) opposés, ne pouvant être des demi-espaces*, car alors $\Theta(M_0)$ et $\Theta'(M_0)$ auraient une infinité de rayons communs, *le faisceau dérivé se compose lui aussi de deux dièdres pleins pouvant se réduire à des demi-plans.*

3° *Les frontières* $\Theta(M_0)$ *et* $\Theta'(M_0)$ *ont en commun plus d'un couple de rayons.*

Dans ce cas il est immédiat que *le faisceau des tangentes et le faisceau dérivé se réduisent à un plan unique:* la frontière commune de $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$.

Voici deux conséquences directes des considérations précédentes.

I. *Si en un point intérieur d'une surface simple de Jordan le faisceau des tangentes ne possède pas de rayon intérieur il se réduit à un plan.*

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau des tangentes en un point intérieur d'une surface simple de Jordan se réduise à un plan est que l'on puisse trouver deux plans distincts* (passant par le point donné) *tels que chacun d'eux ne contienne qu'une seule tangente, celle-ci étant distincte de l'intersection des deux plans.*

Les résultats obtenus jusqu'ici donnent la solution complète du problème de la disposition des tangentes en un point intérieur d'une surface simple de Jordan. Ils sont le développement de ceux que j'avais donnés dans la Note des *Comptes rendus* citée plus haut. Le problème en question avait été abordé par M. Bouligand et son élève M. Mirguet, qui avaient été conduits en deux étapes

à la proposition I précédente par une méthode différente de celle du texte (¹) et qui ne permettait pas d'apercevoir la convexité du complémentaire du faisceau des tangentes.

9. La dernière proposition du n° 7 conduit à des propriétés intéressantes dont nous aurons plus loin l'application (n° 20). Je ferai d'abord une remarque préliminaire. Soient M_0A_1, M_0A_2, M_0B trois demi-droites formant un trièdre, appartenant les deux premières à $\theta(M_0)$ et la troisième à $\dot{\theta}(M_0)$. Je dis que tout le trièdre fait partie de $\dot{\theta}(M_0)$. Cela est vrai pour les faces, il suffit donc de considérer un rayon intérieur, soit M_0I. Le plan BM_0I coupe la face $A_1M_0A_2$ suivant un rayon intérieur M_0L, qui par suite appartient à $\theta(M_0)$; donc M_0I, demi-droite intérieure à l'angle BM_0L dont les côtés appartiennent l'un à $\dot{\theta}(M_0)$, l'autre à $\theta(M_0)$ fait partie de $\dot{\theta}(M_0)$.

Ceci posé, supposons : *a*. que quatre demi-droites M_0L_i ($i=1, 2, 3, 4$) dont trois quelconques ne sont pas coplanaires soient à la fois sur $\Theta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$. Ces quatre demi-droites forment nécessairement un angle polyèdre convexe, dont on peut supposer que les faces sont $L_1M_0L_2$, $L_2M_0L_3$, $L_3M_0L_4$, $L_4M_0L_1$. Les angles $L_1M_0L_3$ et $L_2M_0L_4$ ont une demi-droite commune M_0A, qui appartient à $\theta(M_0)$. Si l'on désigne par K et K′ les droites d'intersection de chacun des couples de plans $L_1M_0L_2$, $L_3M_0L_4$ et $L_1M_0L_4$, $L_2M_0L_3$, les quatre demi-droites M_0L_i sont d'un même côté par rapport au plan (K, K′), du côté de M_0A. Coupons-les par un plan parallèle à (K, K′) et désignons par L_i l'intersection de ML_i par ce plan, et par L_i' le symétrique de L_i par rapport à M_0, ($i=1, 2, 3, 4$). Nous formons ainsi un parallélépipède $L_1L_2L_3L_4L_3'L_4'L_1'L_2'$, dont les arêtes L_1L_3', L_2L_4', L_3L_1', L_4L_2' sont parallèles à M_0A, L_1L_2, L_3L_4, $L_1'L_2'$, $L_3'L_4'$ parallèles à K, L_2L_3, L_4L_1, $L_2'L_3'$, $L_4'L_1'$ parallèles à K′. Les faces $L_1L_2L_3L_4$ et $L_1'L_2'L_3'L_4'$ appartiennent respectivement à $\theta(M_0)+\Theta(M_0)$ et à $\theta'(M_0)+\Theta'(M_0)$, il en résulte que la trace du faisceau dérivé $\mathcal{D}(M_0)$ sur la surface du parallélépipède est tout entière sur les quatre faces qu'on peut appeler les faces latérales. Considérons, par exemple, la face $L_2L_3L_1'L_4'$, et soit M_0A' la demi-droite opposée à M_0A, M_0L_2 est sur $\Delta'(M_0)$ tandis que M_0L_1' est sur $\Theta'(M_0)$. Dans l'angle $A'M_0L_2$ prenons une demi-droite M_0l_2 voisine de M_0L_2 et dans AM_0L_1' une demi-droite M_0l_1' voisine de M_0L_1'; M_0l_2 et M_0l_1' appartiennent respectivement à $\dot{\theta}'(M_0)$ et $\theta'(M_0)$, le trièdre (M_0, Al_2l_1') fait donc partie de $\dot{\theta}'(M_0)$. Comme M_0l_2 et M_0l_1' peuvent être choisis aussi près qu'on veut de M_0L_2 et M_0L_1' la trace de $\mathcal{D}(M_0)$ sur la face $L_2L_3L_1'L_4'$ n'a pas de points dans le triangle $L_2L_1'L_4'$, sauf peut-être sur L_2L_1'. On voit de même qu'elle n'en a pas dans le triangle $L_3L_4'L_1'$, sauf peut-être sur L_3L_1'. Désignons par K_1 l'intersection des diagonales L_2L_1' et L_3L_4',

(¹) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, p. 167-171; J. Mirguet, *Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre* (*Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, 51, 1934, p. 225-257).

la trace de $\mathcal{D}(M_0)$ sur la face considérée est tout entière dans le triangle $L_2L_3K_1$. On raisonnerait de même pour les autres faces latérales. En définitive la trace du faisceau dérivé sur la surface latérale du parallélépipède se trouve dans les triangles définis dans chaque face par son centre et les sommets situés dans la face $L_1L_2L_3L_4$. On en déduit que $\mathcal{D}(M_0)$ ne peut avoir de couples de rayons opposés que suivant K et K'.

b. Supposons maintenant que $\Theta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$ aient un rayon commun M_0L_1, et $\Theta'(M_0)$ et $\Delta(M_0)$ un rayon commun M_0L_2, non opposé au premier. Soient M_0A et M_0A' deux demi-droites opposées appartenant respectivement à $\theta(M_0)$ et $\theta'(M_0)$. Prenons dans AM_0L_1 une demi-droite M_0l_1 voisine de M_0L_1 et dans AM_0L_2 une demi-droite M_0l_2 voisine de M_0L_2. Elles appartiennent respectivement à $\theta(M_0)$ et $\delta(M_0)$, donc le trièdre (M_0, Al_1l_2) appartient tout entier à $\delta(M_0)$. Comme M_0l_1 et M_0l_2 peuvent être choisis aussi près qu'on veut de M_0L_1 et M_0L_2, il en résulte que le trièdre (M_0, AL_1L_2) diminué de sa face $L_1M_0L_2$ appartient à $\delta(M_0)$. Mais on voit de la même manière que le trièdre $(M_0, A'L_1L_2)$ diminué de la face $L_1M_0L_2$ appartient à $\delta'(M_0)$. Par suite cette face $L_1M_0L_2$ est commune à $\Delta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$. Autrement dit, *dans le dièdre* (AA', L_1L_2) *le faisceau dérivé se réduit à l'angle* $L_1M_0L_2$.

Ce résultat peut être complété par une propriété de $\Theta(M_0)$. Soit M_0L_2' la demi-droite opposée à M_0L_2, elle fait partie de $\Theta(M_0)$. Donc l'angle $L_1M_0L_2'$ appartient à $\theta(M_0)+\Theta(M_0)$, qui est convexe. Mais si cet angle contenait un rayon de $\theta(M_0)$, le plan $L_1M_0L_2$ couperait la frontière $\Delta(M_0)$ suivant deux rayons seulement, ce qui n'est pas. On peut donc affirmer que l'angle $L_1M_0L_2'$ est un secteur de $\Theta(M_0)$, et par suite que l'angle opposé est sur $\Theta'(M_0)$.

10. Je terminerai cette étude du faisceau des tangentes et du faisceau dérivé en un point par la recherche d'une condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M_0)$ se réduise à un demi-cône. Remarquons tout de suite qu'il en sera ainsi dans le cas où les sections par les demi-plans d'arête $A_0'M_0A_0$ extérieure à $\mathfrak{C}(M_0)$ possèdent chacune une demi-tangente unique en M_0 (n° 3). Il suffit d'ailleurs que ceci ait lieu pour un ensemble partout dense de tels plans.

La condition que nous allons obtenir est analogue à celle que j'ai donnée pour l'existence d'une demi-tangente unique pour chaque côté en un point d'un arc simple de Jordan (1). Voici cette condition dans le cas du plan : pour qu'un arc simple plan possède en un point donné M une demi-tangente unique pour chaque côté, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un faisceau de droites de sommet M partout dense dont chaque sécante coupe l'arc suivant un ensemble dans lequel M est point isolé.

(1) A. Marchaud, *Sur une condition nécessaire et suffisante d'existence des demi-tangentes en un point d'un arc simple* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LVI, juin 1932).

Remarquons d'abord que si M_0 fait partie du dérivé de l'intersection de S par une demi-droite M_0L, celle-ci est une demi-tangente en M_0. On en déduit que si le faisceau dérivé $\mathcal{D}(M_0)$ est un demi-cône simple, on peut trouver un faisceau partout dense de demi-droites issues de M_0, chacune d'elles coupant S suivant un ensemble dans lequel M_0 est point isolé. Inversement si $\Delta(M_0)$ et $\Delta'(M_0)$ ne sont pas confondus, le faisceau dérivé contiendra des rayons intérieurs (n° 5), soit M_0L l'un d'eux. La section de $\mathcal{D}(M_0)$ par le demi-plan Q contenant M_0L et dont l'arête est une droite $A'_0M_0A_0$ extérieure à $\mathcal{C}(M_0)$ est un certain angle $D'M_0D$ ayant M_0L à son intérieur. Mais M_0D et M_0D' sont des demi-tangentes à la section de S_0 par Q (n° 5); on en déduit que M_0L rencontre cette section en une infinité de points au voisinage de M_0. Autrement dit, si M_0L est intérieur à $\mathcal{D}(M_0)$, le point M_0 fait partie du dérivé de l'intersection de S par M_0L (car S_0 est un morceau de S). Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si en un point intérieur d'une surface simple de Jordan le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, la condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau dérivé en ce point soit un demi-cône simple (pouvant se réduire à un plan) est que l'on puisse trouver un faisceau de demi-droites, issues du point, et partout dense dont chaque rayon coupe la surface suivant un ensemble dans lequel le point considéré est point isolé (1).

En particulier, si toute droite issue de M_0 rencontre S en un nombre fini de points, le faisceau dérivé en M_0 est un demi-cône simple.

II. — Variation du faisceau dérivé.

11. Dans cette seconde Partie j'étudierai la variation du faisceau dérivé au voisinage d'un point où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, ce qui nous conduira, pour les fonctions de deux variables à nombres dérivés bornés, à des propriétés qui ne semblent pas toutes avoir été remarquées.

Soit toujours M_0 un point intérieur d'une surface simple de Jordan où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace, un voisinage S_0 de M_0 sur S est représenté par une équation

$$z = f(x, y) = f(m), \tag{1}$$

où la fonction f est définie dans un cercle s_0, du plan des xy ayant à son intérieur la projection de M_0 et satisfait dans ce domaine à une condition de Lipschitz

$$|f(m_1) - f(m_2)| \leq k m_1 m_2 \quad (\text{n° } 3). \tag{2}$$

(1) On peut remplacer dans cet énoncé *demi-droites* par *droites*, mais la condition serait moins avantageuse.

En tout point intérieur de S_0 le faisceau des tangentes ne contient pas la parallèle à Oz menée par le point.

Remarquons tout d'abord qu'il découle de théorèmes très généraux de M. Roger :

1° que l'ensemble des points de S_0 où le faisceau dérivé n'est pas un plan est de mesure 2-dimensionnelle nulle (1);

2° que l'ensemble des points où S_0 ne possède pas deux rayons opposés est au plus dénombrable (2).

Bien que nous n'ayons pas à utiliser ces résultats ils devaient être signalés ici.

Les propriétés que j'ai en vue sont des conséquences des propositions établies dans la première Partie et d'une remarque élémentaire.

12. Appelons Q_α le demi-plan d'arête Oz dont la trace sur le plan des xy fait avec Ox l'angle α et désignons par $Q_\alpha(M)$ le demi-plan déduit de Q_α par la translation OM. Soit M un point intérieur de S_0, conservant les notations du n° 6, les intersections de $Q_\alpha(M)$ avec $\Theta'(M)$, $\Delta'(M)$, $\Delta(M)$, $\Theta(M)$, auront pour pentes respectives

$$T'(M, \alpha), \quad D'(M, \alpha), \quad D(M, \alpha), \quad T(M, \alpha),$$

avec

$$-k \leq T'(M, \alpha) \leq D'(M, \alpha) \leq D(M, \alpha) \leq T(M, \alpha) \leq +k.$$

$D(M, \alpha)$ et $D'(M, \alpha)$ sont respectivement les dérivés supérieur et inférieur de la fonction $f(m)$ au point m (3) dans la direction qui fait l'angle α avec Ox, ou plus simplement, dans la direction α.

Ceci rappelé, voici la remarque annoncée. Soit M' un point de S_0 situé dans $Q_\alpha(M)$. Supposons d'abord que l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ joignant M et M' sur la section de S_0 par $Q_\alpha(M)$ ne se réduise pas au segment MM' et considérons dans $Q_\alpha(M)$ une sécante L parallèle à MM', laissant de part et d'autre d'elle-même des points de $\overset{\frown}{MM'}$. On peut toujours trouver sur cet arc deux arcs partiels $\overset{\frown}{IJ}$ et $\overset{\frown}{I'J'}$, tels que I et J' soient, dans $Q_\alpha(M)$, au-dessus de L et J et I' au-dessous; nous supposons J et J' respectivement dans $Q_\alpha(I)$ et $Q_\alpha(I')$. Il existe sur $\overset{\frown}{IJ}$ un point $\overline{M}$, situé sur L et tel que l'arc partiel $\overset{\frown}{\overline{M}J}$ soit tout entier au-dessous de L, en ce point $\overline{M}$ $D(\overline{M}, \alpha)$ est au plus égal à la pente de $\overrightarrow{MM'}$. De la même manière prenons sur $\overset{\frown}{I'J'}$ le point $\overline{M'}$, situé sur L et tel que $\overset{\frown}{\overline{M'}J'}$ soit au-dessus de L,

(1) Frédéric Roger, *Sur les propriétés tangentielles des ensembles euclidiens de points*, théor. II (2e partie, cas particulier).

(2) Même travail, théor. I.

(3) Nous désignons toujours par m la projection de M sur le plan des xy parallèlement à Oz.

en $\overline{M'}$ $D'(\overline{M'}, \alpha)$ est au moins égal à la pente de $\overrightarrow{MM'}$. Lorsque l'arc $\widehat{MM'}$ est rectiligne, chacun de ses points peut jouer le rôle de $\overline{M}$ ou de $\overline{M'}$. En résumé, soient M et M' deux points de S_0, le second étant situé dans $Q_\alpha(M)$, il existe sur l'arc $\widehat{MM'}$ de la section de S_0 par $Q_\alpha(M)$ deux points $\overline{M}$ et $\overline{M'}$ satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$D(\overline{M}, \alpha) \leq \text{pente de } \overrightarrow{MM'} \leq D'(\overline{M'}, \alpha).$$

Dans le cas où l'on ne suppose pas S_0 à pentes bornées mais seulement la continuité de $f(m)$, le raisonnement précédent montre qu'il existe sur le segment mm' des points où les nombres dérivés dans la direction α sont les uns supérieurs, les autres inférieurs à la pente de $\overrightarrow{MM'}$. On en déduit que si les nombres dérivés de f dans la direction α sont bornés, la pente des cordes parallèles à Q_α est bornée. Par suite une fonction à nombres dérivés bornés, ou plus particulièrement à nombres dérivés bornés dans deux directions (n° 4) satisfait à une condition de Lipschitz. Les conclusions auxquelles nous parviendrons pour $f(m)$ seront donc valables pour toute fonction à nombres dérivés bornés.

13. Considérons maintenant la demi-droite frontière supérieure de $\mathfrak{C}(M_0)$ dans $Q_\alpha(M_0)$, M_0 désignant un point intérieur fixe de S_0 ; cette demi-droite M_0T peut être obtenue comme limite d'une suite de sécantes M_iM_i' (M_i' étant dans $Q_\alpha(M_i)$) (n° 6-3°). La pente de M_iM_i a donc pour limite $T(M_0, \alpha)$ quand i croît indéfiniment. Mais il existe sur chaque arc $\widehat{M_iM_i}$ un point $\overline{M_i'}$ tel que $D'(\overline{M_i'}, \alpha)$ soit au moins égal à la pente de $\overrightarrow{M_iM_i'}$ dont la borne supérieure est $T(M_0, \alpha)$. On en déduit que $D'(\overline{M_i'}, \alpha)$ a pour limite $T(M_0, \alpha)$. Comme d'autre part $D(\overline{M_i'}, \alpha)$ est au moins égal à $D'(\overline{M_i'}, \alpha)$ et admet la même borne supérieure, $D(\overline{M_i'}, \alpha)$ tend aussi vers $T(M_0, \alpha)$.

En résumé, M_0 étant un point intérieur de S_0 il existe une suite de points $\overline{M_i'}$, ayant pour limite M_0, tels que $D'(\overline{M_i'}, \alpha)$ et $D(\overline{M_i'}, \alpha)$ tendent vers $T(M_0, \alpha)$ quand i augmente indéfiniment. On démontrerait de la même manière l'existence d'une suite de points $\overline{M_i}$ tels que $D(\overline{M_i}, \alpha)$ et $D'(\overline{M_i}, \alpha)$ tendent vers $T'(M_0, \alpha)$. Géométriquement cela revient à dire que *tout rayon de la frontière supérieure ou de la frontière inférieure du faisceau des tangentes en* M_0 *est la limite unique d'une suite de demi-tangentes en des points qui tendent vers* M_0, *chacune de ces demi-tangentes pouvant être choisie sur la frontière supérieure ou la frontière inférieure du faisceau dérivé en son point d'application.*

Les rayons intérieurs de $\mathfrak{C}(M_0)$ ne sont pas nécessairement des limites de demi-tangentes, on le voit immédiatement en prenant pour S_0 un demi-cône de révolution. Mais si les sections de S_0 par les plans parallèles à Oz ont partout

deux demi-tangentes uniques et opposées, tout rayon de $\mathfrak{C}(M_0)$ est limite d'une suite de demi-tangentes, car il y a, dans ce cas, sur tout arc $\widehat{MM'}$ un point où une demi-tangente est parallèle à $\overrightarrow{MM'}$. Dans tous les cas il est immédiat que toute limite d'une suite de demi-tangentes en des points qui tendent vers M_0 est un rayon de $\mathfrak{C}(M_0)$.

14. Le résultat obtenu au numéro précédent peut encore s'énoncer ainsi : en tout point m_0 (intérieur à s_0) les nombres dérivés de $f(m)$ dans la direction α ont *même maximum* $T(M_0, \alpha)$ et *même minimum* $T'(M_0, \alpha)$, que ces nombres dérivés soient supérieur, inférieur ou médian. On en déduit que si l'un d'eux est continu tous le sont et aussi les nombres dérivés dans la direction opposée.

Voici d'autres conséquences :

1° S'il existe dans deux directions distinctes un nombre dérivé (extrême ou médian) continu en m_0, le faisceau des tangentes en M_0 se réduit à un plan et tous les nombres dérivés sont continus en m_0.

2° Si un nombre dérivé dans une direction α_1 est discontinu en m_0, le faisceau des tangentes en M_0 se compose de deux dièdres opposés ou de l'ensemble des droites qui ne pénètrent pas à l'intérieur d'un vrai cône convexe, dans le premier cas $T(M_0, \alpha)$ et $T'(M_0, \alpha)$ sont égaux pour un seul couple de directions opposées, dans le second ils sont distincts quel que soit α, autrement dit :

Si pour une direction donnée un nombre dérivé de $f(m)$ est discontinu en m_0, les nombres dérivés dans toutes les directions, sauf peut-être dans deux directions opposées, sont tous discontinus en m_0.

On observera que la condition précédente est réalisée si le faisceau des tangentes en M_0 ne se réduit pas à un plan.

La propriété qui vient d'être établie ne paraît pas avoir été signalée jusqu'à présent.

15. Les considérations du n° 13 vont nous conduire encore à un résultat intéressant. Supposons qu'à chaque point M, de S_0, voisin de M_0, l'on puisse associer une demi-tangente ML ayant une limite unique M_0L_0 quand M tend vers M_0. Soient $Q_\alpha(M)$ et $Q_{\alpha_0}(M_0)$ les demi-plans définis comme plus haut et contenant respectivement ML et M_0L_0, comme la première tend vers M_0L_0 lorsque M tend vers M_0, on peut choisir les déterminations des angles de manière que α tende vers α_0. L'inégalité (3) du n° 6 montre qu'à chaque demi-tangente ML correspond dans $Q_{\alpha_0}(M)$ une demi-tangente $M\overline{L}$ telle que l'on ait

$$|\text{pente de ML} - \text{pente de } M\overline{L}| \leq k\,|\alpha - \alpha_0|,$$

il suffit de prendre M_1 en M, de choisir M_1M_1' de manière que cette demi-droite ait pour limite ML, et M_1M_2' dans $Q_{\alpha_0}(M)$ de manière que m_1m_2' se déduise de m_1m_1' par rotation. On en déduit que $M\overline{L}$ tend vers M_0L_0. Il résulte alors du n° 13 que les rayons inférieur et supérieur de $\mathfrak{T}(M)$ dans $Q_{\alpha_0}(M_0)$ sont confondus avec M_0L_0.

Nous avons donc établi la proposition suivante :

I. *Si à chaque point* M *de* S_0, *voisin de* M_0, *l'on peut associer une demi-tangente en* M *ayant une limite unique quand* M *tend vers* M_0, *la section du faisceau des tangentes en* M_0 *par le plan parallèle à* Oz *contenant cette limite se réduit au support de cette dernière.*

On en déduit que :

II. *La condition nécessaire et suffisante pour que le faisceau des tangentes en* M_0 *soit un plan est que l'on puisse associer à chaque point* M *voisin de* M_0, *deux demi-tangentes en* M *ayant chacune une limite unique quand* M *tend vers* M_0, *pourvu seulement que ces limites déterminent un plan.*

En prenant, par exemple, les rayons supérieurs de $\mathfrak{D}(M)$ dans les demi-plans $Q_{\alpha_1}(M)$ et $Q_{\alpha_2}(M)$, α_1 et α_2 étant deux angles fixes (non congrus mod. π) on voit que la condition est nécessaire, car ces rayons tendent respectivement vers les rayons de $\mathfrak{T}(M_0)$ situés dans $Q_{\alpha_1}(M_0)$ et $Q_{\alpha_2}(M_0)$. Qu'elle soit suffisante cela résulte immédiatement de la proposition précédente et de celle énoncée au n° 8 (proposition II).

La proposition II qui vient d'être établie donne plus particulièrement la propriété suivante : si le faisceau dérivé est continu en M_0, le faisceau des tangentes en ce point se réduit à un plan.

Pour donner un sens précis à l'expression, le faisceau dérivé est continu en M_0, on peut se placer au point de vue analytique ou au point de vue géométrique. Dans le premier cas on dira que $\mathfrak{D}(M)$ est continu en M_0 si les fonctions de α, $D(M, \alpha)$ et $D'(M, \alpha)$ tendent respectivement vers $D(M_0, \alpha)$ et $D'(M_0, \alpha)$ quand M tend vers M_0. La proposition est alors immédiate, car dans chaque direction le rayon supérieur de $\mathfrak{D}(M)$, par exemple, tend vers une limite unique.

Dans le second cas on dira que $\mathfrak{D}(M)$ est continu en M_0 si l'*écart* des deux faisceaux $\mathfrak{D}(M)$ et $\mathfrak{D}(M_0)$ tend vers zéro avec MM_0. Avant d'aller plus loin, rappelons la définition de l'écart.

Soient F_1 et F_2 deux faisceaux fermés de demi-droites de même sommet O. Désignons par $(F_1)_\lambda$ le faisceau obtenu en remplaçant chaque rayon de F_1 par le demi-cône (plein) de révolution de sommet O, d'angle au sommet 2λ ayant pour axe le rayon considéré. Si λ est assez grand $(F_1)_\lambda$ contient F_2. Désignons par λ_1 la borne inférieure des valeurs de λ satisfaisant à cette condition. Soit

de même λ_2 la borne inférieure des valeurs de λ telles que $(F_2)_\lambda$ [construit à partir de F_2 comme $(F_1)_\lambda$ à partir de F_1] contienne F_1. L'*écart* des deux faisceaux F_1 et F_2 est par définition le plus grand des deux nombres λ_1 et λ_2. L'écart de deux faisceaux de sommets différents se définit en les déplaçant par translation, de manière à leur donner le même sommet. L'écart de deux demi-droites est leur angle, celui de deux plans est le plus petit des angles qu'ils font entre eux $\left(\frac{\pi}{2}\text{ s'ils sont rectangulaires}\right)$.

Il nous faut démontrer que si $\mathcal{D}(M)$ est continu au sens qui vient d'être défini, $\mathcal{T}(M_0)$ se réduit à un plan. La chose va être aisée. Soit ε_M l'écart de $\mathcal{D}(M)$ et de $\mathcal{D}(M_0)$, cet écart tend vers zéro avec MM_0. Donnons-nous un rayon M_0L_0 de $\mathcal{D}(M_0)$, en chaque point M de S_0 il existe un rayon ML de $\mathcal{D}(M)$ tel que l'angle (M_0L_0, ML) soit au plus égal à ε_M, cela résulte de la définition de l'écart. Alors ML tend vers M_0L_0 quand M tend vers M_0. Comme M_0L_0 a été choisi arbitrairement $\mathcal{T}(M_0)$ est forcément un plan.

Nous avons donc établi la proposition suivante :

III. *En tout point* M_0, *intérieur à* S_0, *où le faisceau dérivé est continu, le faisceau des tangentes, et par suite le faisceau dérivé, est un plan, et ceci quelle que soit la définition adoptée pour la continuité* (1).

Cette proposition a été démontrée par M. Mirguet dans le cas particulier où le faisceau dérivé est supposé être partout un plan (2).

On déduit immédiatement de ce qui précède que le faisceau dérivé est discontinu partout où le faisceau des tangentes n'est pas un plan. Bien entendu il s'agit toujours du voisinage d'un point où le faisceau des tangentes ne remplit pas tout l'espace. Il est possible de modifier cette hypothèse dans l'énoncé général de la proposition III.

Supposons S_0 défini par une équation (1), (n° 11), la fonction $f(m)$ *étant seulement continue* dans s_0. Si $\mathcal{D}(M)$ *est continu en* M_0 et si de plus $\mathcal{D}(M_0)$ ne contient pas de rayon parallèle à Oz, il est immédiat que la fonction $f(m)$ est à nombres dérivés bornés au voisinage de m_0; on peut donc affirmer que le faisceau des tangentes en M_0 est un plan. Il ne m'a pas été possible de m'affranchir de l'hypothèse relative à la représentation de la surface par une équation telle que (1). M. Valiron a rencontré une difficulté analogue dans le cas où le faisceau dérivé est supposé être partout un plan (3).

---

(1) Ces deux définitions sont ici équivalentes, cela résulte du fait que les fonctions de α, $D(M, \alpha)$ et $D'(M, \alpha)$ satisfont à une même condition de Lipschitz dont le coefficient est indépendant de la position de m à l'intérieur de s (n° 6). Mais il est plus facile de faire la démonstration du théorème dans les deux cas.

(2) J. Mirguet, Mémoire cité, p. 237.

(3) G. Valiron, *Sur les surfaces qui admettent un plan tangent en chaque point* (*Bull. Soc. Math.*, t. LIV, p. 195).

16. On peut se demander s'il existe pour le faisceau des tangentes une proposition analogue à celle qui vient d'être établie pour le faisceau dérivé. La réponse est négative. Je vais construire en effet une surface pour laquelle le faisceau des tangentes (ne remplissant pas tout l'espace) est non seulement continu, mais se déplace par translation sans être un plan. J'utiliserai pour cela une remarque que je dois à l'obligeance de M. Denjoy.

Donnons-nous sur le segment (0,1) de l'axe des x deux ensembles mesurables complémentaires E et E_1, partout épais l'un et l'autre (1), et désignons par $m(x)$ la mesure de E_1 sur le segment $(0, x)$ $(0 \leq x \leq 1)$. Il résulte des propriétés de la mesure (2) que la fonction $m(x)$ a une dérivée (unique) égale à *un* sur une plénitude de E_1 et une dérivée (unique) égale à *zéro* sur une plénitude de E; partout ailleurs ses dérivés sont compris entre zéro et un.

Considérons alors la fonction

$$g(x) = 2m(x) - x;$$

elle est continue dans (0,1), où ses nombres dérivés sont compris entre -1 et $+1$, de plus elle possède une dérivée (unique) égale à $+1$ aux points d'un ensemble $\{a_1\}$ partout dense et une dérivée (unique) égale à -1 aux points d'un ensemble partout dense $\{a_2\}$.

La surface en question sera la surface de translation définie en axes rectangulaires par l'équation

$$z = g(x) + g(y),$$

le point (x, y) décrivant le carré $\left\{ \begin{matrix} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{matrix} \right\}$.

Soit M_0 un point intérieur de S. Prenons sur la surface un point $M(x, y, z)$ voisin de $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et dans le demi-plan $Q_\alpha(M)$ un point voisin M′ dont l'abscisse et l'ordonnée seront respectivement $x + l\cos\alpha$ et $y + l\sin\alpha$ $(l > 0)$. La pente de MM′ est égale à

$$\frac{1}{l}[g(x + l\cos\alpha) - g(x) + g(y + l\sin\alpha) - g(y)]$$
$$= \frac{g(x + l\cos\alpha) - g(x)}{l\cos\alpha}\cos\alpha + \frac{g(y + l\sin\alpha) - g(y)}{l\sin\alpha}\sin\alpha.$$

Elle est comprise entre $|\cos\alpha| + |\sin\alpha|$ et $-|\cos\alpha| - |\sin\alpha|$.

Ceci posé, choisissons x sur $\{a_1\}$ ou sur $\{a_2\}$ suivant que $\cos\alpha$ est positif ou négatif, n'importe où voisin de x_0 si $\cos\alpha$ est nul. De la même manière prenons y sur $\{a_1\}$ ou sur $\{a_2\}$ suivant que $\sin\alpha$ est positif ou négatif, n'importe où voisin de y_0 si $\sin\alpha$ est nul. Le point M ainsi déterminé pourra être aussi voisin de M_0 que l'on voudra, les ensembles $\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ étant partout denses.

---

(1) M. Denjoy a donné un exemple de tels ensembles dans la note (1) du n° 19 de son mémoire : *Sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*Journ. Math.*, t. 80, 1915).

(2) Cf. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration*, p. 123-124, ou Denjoy, Mémoire cité, n° 20.

Il résulte immédiatement des propriétés de la fonction g que l'on a

$$D(M, \alpha) = D'(M, \alpha) = |\cos\alpha| + |\sin\alpha|.$$

Par suite $T(M_0, \alpha)$ est donc au moins égal à $|\cos\alpha| + |\sin\alpha|$, mais, d'après une remarque faite à l'instant, il est au plus égal à cette même quantité. On a donc

$$T(M_0, \alpha) = |\cos\alpha| + |\sin\alpha|.$$

Comme $T'(M_0, \alpha) = -T(M_0, \alpha + \pi)$, on en déduit

$$T'(M_0, \alpha) = -|\cos\alpha| - |\sin\alpha|.$$

Le faisceau des tangentes $\mathfrak{T}(M_0)$ se déplace donc par translation. Soit M_0XYZ le trièdre déduit par translation du trièdre de coordonnées, on obtient immédiatement les équations des frontières supérieure et inférieure de $\mathfrak{T}(M_0)$ dans ce système d'axes

$\Theta(M_0)$ $\qquad Z = |X| + |Y|,$

$\Theta'(M_0)$ $\qquad -Z = |X| + |Y|.$

$\Theta(M_0)$ est la surface d'un angle polyèdre régulier de quatre faces.

Remarquons en terminant que la fonction $g(x) + g(y)$ donne l'exemple d'une fonction à nombres dérivés bornés dont tous les nombres dérivés sont partout discontinus. C'est d'ailleurs en réponse à la question de savoir s'il pouvait exister de telles fonctions que M. Denjoy m'avait signalé le moyen d'en construire.

III. — Applications.

17. Dans cette troisième Partie je vais donner quelques applications des résultats précédents aux *surfaces dont les sections par les plans parallèles à deux plans fixes (au moins) sont des arcs convexes.*

D'une manière précise, soit S un morceau de surface simple de Jordan se projetant sur un plan P, parallèlement à un axe $z'z$, d'une manière biunivoque et bicontinue suivant un domaine convexe s. Les points de S seront désignés par des majuscules et leurs projections sur le plan P (parallèlement à $z'z$) par les minuscules correspondantes. S est représenté par une équation

$$z = f(m),$$

où la fonction $f(m)$ est définie et continue dans s.

Soit ab une corde du contour de s, le segment $\overline{ab}$ est tout entier dans s. Considérons la section de S par le plan mené par ab parallèlement à $z'z$, c'est un arc simple $\widehat{AB}$ qui se projette suivant $\overline{ab}$ d'une manière biunivoque et

bicontinue (¹). Je suppose qu'il existe deux directions de plans Π_1 et Π_2 parallèles à $z'z$ telles que, quel que soit ab parallèle à l'une ou l'autre de ces directions, l'arc $\widehat{AB}$ est convexe au sens large, c'est-à-dire convexe ou réduit à un segment de droite. Un arc tel que $\widehat{AB}$ est dit convexe s'il est d'un même côté par rapport à sa corde et limite avec celle-ci un domaine convexe. Il possède alors des propriétés intuitives et bien connues. Je vais rappeler celles qui nous seront utiles (²).

1° Soient MM′ deux points distincts de $\widehat{AB}$, les arcs partiels $\widehat{AM}$ et $\widehat{M'B}$ sont d'un même côté (au sens large) de la droite MM′.

2° En tout point de l'arc celui-ci possède pour chaque côté une demi-tangente unique, et l'ensemble des points pour lesquels ces deux demi-tangentes ne sont pas opposées est au plus dénombrable, si en un point elles forment un angle non plat celui-ci contient tout l'arc, lorsqu'elles sont opposées l'arc est d'un même côté de leur support.

3° Soient sur $\widehat{AB}$ trois points quelconques M_1, M_2, M_3, tels que les vecteurs $\overrightarrow{m_1m_2}$ et $\overrightarrow{m_2m_3}$ soient de même sens que $\overrightarrow{ab}$, on a

$$\text{pente de } \overrightarrow{M_1M_2} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{M_2M_3},$$

ou bien

$$\text{pente de } \overrightarrow{M_1M_2} \leqq \text{pente de } \overrightarrow{M_2M_3},$$

le sens de l'inégalité dépendant uniquement de l'arc.

On observera que toutes ces propriétés subsistent si $\widehat{AB}$ se réduit à un segment de droite.

La troisième propriété nous servira d'abord dans sa conséquence suivante. Soient sur $\widehat{AB}$ trois arcs partiels emboîtés $\widehat{A'B'}$, $\widehat{A''B''}$, $\widehat{M'M''}$, le second intérieur au premier au sens strict, le troisième intérieur au second au sens large. D'une manière précise, les vecteurs $\overrightarrow{a'b'}$, $\overrightarrow{a''b''}$, $\overrightarrow{m'm''}$ sont de même sens que $\overrightarrow{ab}$, a'' et b'' sont distincts et intérieurs à $\overline{a'b'}$, m' et m'' sont distincts et appartiennent au segment fermé $\overline{a''b''}$. Si m' et m'' sont respectivement distincts de a'' et b'' on écrira

$$\text{pente de } \overrightarrow{A'A''} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{A''M'} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{M'M''} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{M''B''} \geqq \text{pente de } \overrightarrow{B''B'},$$

(¹) Si s n'était pas supposé convexe la section de S par le plan pourrait se composer d'un nombre fini ou infini d'arcs.

(²) Si un arc convexe ne renferme aucun segment de droite, il est d'ordre deux au sens de la géométrie finie. Dans le cas général on peut dire que l'arc est du second ordre au sens large.

ou bien les inégalités inverses. Dans les deux cas on peut affirmer que la pente de $\overrightarrow{M'M''}$ est comprise entre celles de $\overrightarrow{A'A''}$ et $\overrightarrow{B''B'}$. On voit aisément qu'il en est de même si $\overset{\frown}{M'M''}$ a une ou deux extrémités communes avec $\overset{\frown}{A''B''}$.

18. Considérons le morceau de surface S défini au numéro précédent et supposons que les sections de S par les plans parallèles à deux plans fixes Π_1 et Π_2, parallèles à $z'z$, soient convexes au sens large. Je vais d'abord montrer qu'en tout point intérieur de S la parallèle à $z'z$ est étrangère au faisceau des tangentes. On ne peut évidemment conclure pour le bord, il suffit pour le voir de prendre pour S une demi-sphère posée sur le plan P et $z'z$ perpendiculaire à ce plan. Soit donc M_0 un point de S non situé sur le bord, sa projection m_0 est intérieure à s. On peut construire dans le plan P un parallélogramme de centre m_0, $a'_1b'_1b'_2a'_2$, dont les côtés $a'_1b'_1$ et $a'_2b'_2$ sont parallèles à la trace π_1 de Π_1 et les deux autres à celle π_2 de Π_2, ce parallélogramme étant tout entier dans s. Soient a'_0 et b'_0 les milieux de $a'_1a'_2$ et de $b'_1b'_2$, appelons a''_0 et b''_0 les milieux de a'_0m_0 et $m_0b'_0$; enfin a' étant un point quelconque du côté $a'_1a'_2$, désignons par $a'a''b''b'$ la figure déduite de $a'_0a''_0b''_0b'_0$ par la translation a'_0a'. Lorsque a' parcourt le côté $a'_1a'_2$, le segment $\overline{a''b''}$ balaye le parallélogramme $a''_1b''_1b''_2a''_2$. Considérons alors sur le segment $\overline{a''b''}$ deux points quelconques m' et m''. D'après les conclusions du numéro précédent, la pente de $\overrightarrow{M'M''}$ est comprise entre celles de $\overrightarrow{A'A''}$ et de $\overrightarrow{B''B'}$. Mais lorsque a' parcourt le segment $a'_1a'_2$, ces deux pentes varient d'une manière continue; on peut donc affirmer que pour le morceau de S qui se projette suivant $a''_1b''_1b''_2a''_2$, les cordes parallèles à Π_1 ont une pente bornée. La considération des cordes parallèles à Π_2, jointe à la remarque faite à la fin du n° 4, montre que le morceau de S qui se projette suivant le parallélogramme déduit de $a'_1b'_1b'_2a'_2$ par l'homothétie de centre m_0 et de rapport $\frac{1}{2}$, est à pentes bornées; autrement dit la parallèle $z'_0M_0z_0$, menée à $z'z$ par M_0, est étrangère au faisceau des tangentes en M_0.

19. Désignons par Π'_1 et Π'_2 les plans menés par M_0 parallèlement à Π_1 et Π_2. Soient $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$ les demi-tangentes à la section Γ_1 de S par Π'_1, d'après la remarque 1° du n° 6 la section de $\mathfrak{O}(M_0)$ par ce plan se réduit aux deux demi-droites $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$. De même les demi-tangentes $M_0\alpha_2$ et $M_0\beta_2$ à la section Γ_2 de S par Π'_2 composent la section de $\mathfrak{O}(M_0)$ par ce plan. Ces quatre demi-droites sont donc à la fois sur la frontière supérieure et sur la frontière inférieure de $\mathfrak{O}(M_0)$. Considérons maintenant la section de $\mathfrak{S}(M_0)$ par Π'_1 par exemple. Elle s'obtiendra en cherchant les limites de cordes $M'M''$ parallèles à ce plan (n° 6, 2°). Les supports de $M_0\alpha_1$ et de $M_0\beta_1$ font partie de cette section, qui comprendra donc l'ensemble des droites ne pénétrant pas à l'intérieur de

l'angle $\alpha_1 M_0 \beta_1$ (n° 5), si $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$ sont opposées, cet ensemble se réduit à leur support commun. Je dis que l'ensemble en question épuise la section de $\mathfrak{T}(M_0)$. Soit, en effet, T une tangente en M_0 située dans Π_1^0, elle peut être obtenue comme limite d'une suite de sécantes parallèles à Π_1. Conservant les notations du n° 18, soient c_0 un point de $a_0''m_0$ et c le point déduit de c_0 par la translation $a_0''a''$. Lorsque M' et M'' sont assez voisins de M_0, m' et m'' sont compris entre c et b'', par suite C et B'' sont, dans le plan mené par M'M'' parallèlement à Π_1, d'un même côté de M'M'' (n° 17). Il en résulte que C_0 et B_0'' sont d'un même côté de T, car C, B'' et M'M'' tendent respectivement vers C_0, B_0'' et T. Comme C_0 est quelconque sur l'arc partiel $\overset{\frown}{A_0''M_0}$ de L_1 on en déduit que $\overset{\frown}{A_0''M_0}$ et B_0'' sont d'un même côté par rapport à T. On démontrait de la même manière que A_0'' et $\overset{\frown}{M_0B_0''}$ sont d'un même côté. Autrement dit, si T est une tangente en M_0 située dans Π_1^0, l'arc partiel $\overset{\frown}{A_0''M_0B_0''}$ de Γ_1 est d'un même côté par rapport à T, ce qui prouve bien que cette dernière ne peut pénétrer à l'intérieur de $\alpha_1 M_0 \beta_1$, ou bien être différente du support commun des deux demi-tangentes si celles-ci sont opposées.

En définitive nous avons obtenu la proposition suivante.

Soit S *un morceau de surface simple de Jordan se projetant sur un plan* P *parallèlement à un axe* $z'z$ *suivant un domaine convexe et dont les sections par les plans parallèles à deux plans fixes* Π_1 *et* Π_2, *contenant* $z'z'$, *sont toutes convexes au sens large; alors en tout point* M_0 *de* S, *non situé sur le bord, les sections du faisceau dérivé par les plans menés par* M_0 *parallèlement à* Π_1 *et* Π_2 *sont les demi-tangentes* $M_0\alpha_1$, $M_0\beta_1$ *et* $M_0\alpha_2$, $M_0\beta_2$ *aux sections de* S *par ces plans, les sections du faisceau des tangentes par ces mêmes plans sont l'ensemble des droites ne pénétrant pas à l'intérieur de l'angle* $\alpha_1 M_0 \beta_1$ *et celui de celles ne pénétrant pas à l'intérieur de l'angle* $\alpha_2 M_0 \beta_2$.

20. Examinons maintenant les différents cas possibles.

1° $M_0\alpha_1$ *et* $M_0\beta_1$ *sont opposées ainsi que* $M_0\alpha_2$ *et* $M_0\beta_2$. — Alors $\mathfrak{T}(M_0)$ et par suite $\mathfrak{D}(M_0)$ se réduisent au plan défini par ces deux couples de demi-tangentes opposées (n° 8, II). On en déduit que *si les sections de* S *par les plans parallèles à* Π_1 *et* Π_2 *ont partout deux demi-tangentes opposées,* S *possède partout un plan unique de tangentes variant d'une manière continue* (n° 2).

2° *Pour une seule section les demi-tangentes sont opposées* (par exemple, $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$). — Dans ce cas $\mathfrak{T}(M_0)$ se compose de deux dièdres opposés, $\mathfrak{D}(M_0)$ se réduit à deux demi-plans d'arête $\alpha_1 M_0 \beta_1$ (n° 8, 2°) déterminés par $M_0\alpha_2$ et $M_0\beta_2$ puisque sa section par Π_0^2 se réduit à ces deux demi-droites.

3° *Les sections par* Π_1^0 *et par* Π_2^0 *ont chacune un point anguleux en* M_0. — Deux circonstances pourront se présenter suivant que ces sections ont des

concavités de même sens ou de sens opposés par rapport à $z'z$. Nous pouvons toujours supposer $M_0z'_0$ dans l'angle $\alpha_1M_0\beta_1$, alors suivant le cas c'est $M_0z'_0$ ou M_0z_0 qui sera dans l'angle $\alpha_2M_0\beta_2$.

a. Plaçons-nous dans la première hypothèse. Les quatre rayons $M_0\alpha_1$, $M_0\beta_1$, $M_0\alpha_2$, $M_0\beta_2$ sont à la fois sur la frontière inférieure de $\mathfrak{C}(M_0)$ et sur la frontière supérieure de $\mathcal{D}(M_0)$. Nous nous trouvons dans le cas *a* étudié au n° 9. Rappelons seulement que $\mathcal{D}(M_0)$ est situé tout entier du même côté (au sens large) d'un certain plan et qu'il possède au plus deux couples de rayons opposés, qui ne peuvent être que les intersections des plans $\alpha_1M_0\alpha_2$, $\beta_1M_0\alpha_2$ et $\alpha_2M_0\beta_1$, $\alpha_1M_0\beta_2$.

b. Dans la seconde hypothèse $M_0\alpha_1$ et $M_0\beta_1$ sont sur la frontière inférieure de $\mathfrak{C}(M_0)$ et $M_0\alpha_2$ et $M_0\beta_2$ sur sa frontière supérieure; mais les quatre rayons sont à la fois sur la frontière inférieure et sur la frontière supérieure de $\mathcal{D}(M_0)$. Les conclusions du n° 9 *b* montrent que *le faisceau dérivé se compose des quatre secteurs plans* $\alpha_1M_0\alpha_2$, $\alpha_2M_0\beta_1$, $\beta_1M_0\beta_2$, $\beta_2M_0\alpha_1$. On voit immédiatement que les droites communes à chacun des couples de plans $\alpha_1M_0\alpha_2$, $\beta_1M_0\beta_2$ et $\alpha_2M_0\beta_1$, $\alpha_1M_0\beta_2$ sont sur $\mathcal{D}(M_0)$, ce dernier contient exactement deux couples de rayons opposés. Enfin la remarque faite à la fin du n° 9 permet d'affirmer que les frontières inférieure et supérieure du faisceau des tangentes sont les faces des angles polyèdres symétriques $(M_0, \alpha_1\alpha'_2\beta_1\beta'_2)$ et $(M_0, \alpha'_2\alpha_2\beta'_1\beta_2)$, où $M_0\alpha'_1$, $M_0\beta'_1$, $M_0\alpha'_2$, $M_0\beta'_2$ sont respectivement opposés à $M_0\alpha_1$, $M_0\beta_1$, $M_0\alpha_2$, $M_0\beta_2$.

Voici une dernière remarque : si en plus de l'hypothèse initiale faite sur S, à savoir que les plans parallèles à Π_1 et à Π_2 le coupent suivant des arcs convexes au sens large, on suppose que le faisceau dérivé en M contient au moins trois couples de rayons opposés, on peut affirmer que le faisceau des tangentes en ce point se réduit à un plan. En effet les cas 2° et 3° doivent être écartés.

21. Les résultats du numéro précédent s'appliquent *a fortiori* au cas où toutes les sections de S par les plans parallèles à $z'z$ sont convexes au sens large. Ils vont nous conduire à des conclusions intéressantes.

Soit toujours M un point de S non situé sur le bord. Examinons tous les cas possibles en considérant les demi-tangentes en M_0 aux sections par les plans contenant $z'_0M_0z_0$.

1° Deux au moins de ces sections possèdent en M_0 deux demi-tangentes opposées, alors $\mathfrak{C}(M_0)$ se réduit à un plan.

2° L'une d'elles et une seulement possède en M_0 deux demi-tangentes opposées, alors $\mathcal{D}(M_0)$ se réduit aux faces d'un dièdre et $\mathfrak{C}(M_0)$ est le système des deux dièdres (pleins) opposés, ne contenant pas $z'_0M_0z_0$, dont les faces sont les plans qui contiennent $\mathcal{D}(M_0)$. Il résulte des propriétés des arcs

convexes rappelées au n° 17 que la section de S par tout plan contenant $z'_0 M_0 z_0$, sauf peut-être celui qui passe par l'arête de $\mathcal{D}(M_0)$, est dans ce dièdre. On peut donc affirmer que S tout entier est dans le dièdre $\mathcal{D}(M_0)$.

3° Aucune des sections ne possède deux demi-tangentes opposées. On sait (n° 19) que toutes les demi-tangentes sont sur $\Theta(M_0)$ ou sur $\Theta'(M_0)$. Ces frontières sont dans le cas présent nécessairement de vrais demi-cônes convexes. Le faisceau dérivé est donc confondu avec l'un d'eux. Il contient S, cela résulte immédiatement de la propriété des arcs convexes rappelée à l'instant.

22. Je terminerai par une propriété remarquable de S, toujours dans l'hypothèse où toutes les sections par les plans parallèles à $z'z$ sont convexes au sens large. Si l'on écarte le cas où S est un disque plan, il y a nécessairement des sections strictement convexes (1), et alors deux cas peuvent se présenter : ou bien ces sections tournent toutes leur concavité du même côté de l'axe $z'z$ ou bien deux d'entre elles ont des concavités de sens différents.

Considérons d'abord le premier cas. On peut supposer S au-dessus du plan et la concavité tournée vers le bas. Il est alors immédiat que le domaine limité par S, sa projection s et le cylindre projetant le bord est convexe. Autrement dit, S est un morceau de la frontière d'un domaine convexe.

Je vais montrer que dans le second cas S est un morceau de quadrique réglée non dégénérée. Quelques remarques préalables nous seront utiles. Soit $\overset{\frown}{A_0 B_0}$ une section de S strictement convexe dont la projection est le segment $\overline{a_0 b_0}$. On peut trouver sur $\overset{\frown}{A_0 B_0}$ trois points M_1^0, M_2^0, M_3^0, tels que les vecteurs $\overrightarrow{m_1^0 m_2^0}$ et $\overrightarrow{m_2^0 m_3^0}$ soient de même sens et que la différence

$$d = \text{pente de } \overrightarrow{M_1^0 M_2^0} - \text{pente de } \overrightarrow{M_2^0 M_3^0}$$

soit positive ou négative, suivant le sens de la concavité. Traçons dans le plan P trois petits cercles centrés sur m_1^0, m_2^0, m_3^0. On peut choisir leurs rayons assez petits pour que les trois points m_1, m_2, m_3 étant pris respectivement dans chacun d'eux, la différence

$$\text{pente de } \overrightarrow{M_1 M_2} - \text{pente de } \overrightarrow{M_2 M_3}$$

soit de même signe que d. Si donc on prend $\overline{ab}$ de manière que ce segment rencontre chacun des trois cercles, l'arc $\overset{\frown}{AB}$ sera strictement convexe et sa concavité sera orientée dans le même sens que celle de $\overset{\frown}{A_0 B_0}$.

Soient alors $\overset{\frown}{A_1 B_1}$ et $\overset{\frown}{A_2 B_2}$ deux sections strictement convexes dont les concavités sont de sens opposés. Il n'est pas exclu que l'une d'elles ou même

(1) S ne peut évidemment avoir un seule section strictement convexe. Cela résultera d'ailleurs de ce qui suit.

les deux soient sur le bord. La remarque précédente montre que l'on peut supposer $\overline{a_1b_1}$ et $\overline{a_2b_2}$ intérieurs à s. Supposons d'abord que $\overline{a_1b_1}$ et $\overline{a_2b_2}$ ne se croisent pas à l'intérieur de s. On pourra toujours trouver une section strictement convexe dont la projection $\overline{a'b'}$ rencontre $\overline{a_1b_1}$ et $\overline{a_2b_2}$ à l'intérieur de s, autrement toutes ces sections seraient rectilignes et alors $\widehat{A_1B_1}$ et $\widehat{A_2B_2}$ seraient dans un même plan et par suite rectilignes, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous aurons donc toujours deux sections strictement convexes, dont les concavités sont orientées dans des sens différents et dont les projections se croisent à l'intérieur de s. Il est permis de supposer que ce sont $\widehat{A_1B_1}$ et $\widehat{A_2B_2}$. Soit m_0 le point commun aux segments $\overline{a_1b_1}$ et $\overline{a_2b_2}$ et considérons dans les angles opposés $a_1m_0a_2$ et $b_1m_0b_2$ une corde am_0b voisine de a_1b_1. Si l'angle a_1m_0a est inférieur à un certain angle l'arc $\widehat{AB}$ sera strictement convexe et sa concavité sera orientée dans le même sens que celle de $\widehat{A_1B_1}$. Soit $\overline{a_3b_3}$ la position de $\overline{ab}$ correspondant à la borne supérieure de l'angle a_1m_0a satisfaisant à cette condition, $\overline{a_3b_3}$ est intérieur aux angles opposés $a_1m_0a_2$ et $b_1m_0b_2$, et $\widehat{A_3B_3}$ est nécessairement rectiligne. On raisonnerait de même dans les angles $a_1m_0b_2$ et $a_2m_0a_1$. Nous avons donc montré l'existence de deux sections rectilignes (au moins) se croisant en M_0. Mais, d'après la remarque faite au début du présent numéro, on peut trouver dans P un cercle γ de centre m_0 et intérieur à s, tel qu'en tout point M se projetant dans ce cercle se croisent deux sections strictement convexes dont les concavités sont orientées dans des sens différents, par suite, en chacun de ces points se croisent au moins deux sections rectilignes de S, que j'appellerai des *génératrices*. Soient $\overline{G_0G_0'}$ et $\overline{H_0H_0'}$ les deux génératrices se croisant en M_0, le faisceau dérivé en ce point est le plan R de ces deux génératrices (n° 20). L'arc $\widehat{A_1B_1}$ étant strictement convexe l'une de ses extrémités, A_1, par exemple, est en dehors de R, il en est de même pour les extrémités de $\widehat{A_2B_2}$; supposons que A_2, par exemple, soit en dehors de R, il résulte de l'hypothèse faite sur le sens de la concavité des arcs $\widehat{A_1B_1}$ et $\widehat{A_2B_2}$ que les points A_1 et A_2 sont de part et d'autre de R. Pour fixer les idées supposons g_0 sur l'arc a_1a_2 du bord de s (l'arc ne contenant pas b_1). Soit alors m_1 un point de $\overline{g_0g_0'}$ appartenant à γ; par M_1 passe au moins une génératrice autre que $\overline{G_0G_0'}$, soit $\overline{H_1H_1'}$. Je dis que $\overline{H_1H_2'}$ ne peut être dans un même plan avec $\overline{H_0H_0'}$. En effet, supposons le contraire et prenons sur $\overline{h_0h_0'}$ un point n_0 voisin de m_0, la droite g_0n_0 rencontre $\overline{h_1h_1'}$ en un point n_1, et les points G_0, N_0, N_1, situés dans le plan R, sont alignés. Il en résulte que le segment $\overline{G_0N_0}$ est sur S. Considérons alors la section de S qui se projette sur $\overline{a_1a_2}$, ou plutôt, comme $\overline{a_1a_2}$ pourrait être tout entier sur le bord, une section se projetant

suivant une parallèle à $\overline{a_1a_2}$ et voisine. Soient A'_1, M'_0, N'_0, A'_2, les points de cette section qui se projettent respectivement sur $\overline{a_1m_0}$, $\overline{g_0m_0}$, $\overline{g_0n_0}$, $\overline{a_2m_0}$. Si la parallèle est assez voisine de $\overline{a_1a_2}$ les points A'_1 et A'_2 seront de part et d'autre de R, alors que M'_0 et N'_0 sont dans ce plan, ce qui est impossible.

Soit de même m_2 un point de $m_0g'_0$ situé dans γ, il passe par M_2 une génératrice $\overline{H_2H'_2}$ et l'on démontrerait comme précédemment qu'elle n'est dans un même plan ni avec $\overline{H_0H'_0}$, ni avec $\overline{H_1H'_1}$. Les trois droites $H_0H'_0$, $H_1H'_1$, $H_2H'_2$, définissent donc une vraie quadrique (Q). Soit alors G une génératrice de (Q) rencontrant les trois segments $H_0H'_0$, $H_1H'_1$, $H_2H'_2$, aux points L_0, L_1, L_2. Ces trois points alignés appartiennent à la section de S par le plan projetant G, cette section comprend nécessairement le segment $\overline{L_1L_2}$. En résumé, M_0 est intérieur à un morceau S_1 de S situé sur (Q). Il reste à montrer que S tout entier est sur (Q). Soit $\overline{m_0u}$ un segment arbitraire joignant m_0 au bord de s. Considérons l'arc $\widehat{M_0U}$ de S qui se projette sur $\overline{m_0u}$. Si $\overline{m_0u}$ est la projection d'une des génératrices de (Q) passant par M_0, $\widehat{M_0U}$ est un segment de droite tout entier sur (Q). Dans le cas contraire prenons sur $\overline{M_0U}$ un point U' intérieur à S_1 et considérons un point quelconque M de l'arc partiel $\widehat{M_0U'}$ de $\widehat{M_0U}$. Le point M est intérieur à S_1 tout entier sur (Q), on peut donc trouver deux plans parallèles à $z'z$, passant par M, coupant (Q) suivant deux coniques dont les concavités en M sont orientées dans des sens différents. Il en sera de même des sections de S par ces plans, par conséquent les segments des génératrices G et H, de (Q), se croisant en M, sont sur S dans leurs parties qui se projettent dans s. Ceci posé, soit U_1 la borne des points tels que U', il suffira de montrer que U_1 est confondu avec U. Supposons le contraire, et considérons un point M_1 situé sur l'arc $\widehat{U_1U}$ dans le voisinage de U_1, la projetante de M_1 rencontre une génératrice G de (Q) qui pénètre nécessairement (si M_1 est assez voisin de U_1) à l'intérieur de la région balayée par le segment de la génératrice H situé sur S, lorsque M parcourt l'arc $\widehat{M_0U_1}$, par suite M_1 est nécessairement sur (Q), parce que toute génératrice de (Q) qui pénètre à l'intérieur d'une région où cette quadrique est confondue avec S est elle-même sur S dans sa partie qui se projette dans s. La borne U_1 ne peut donc être distincte de U. La démonstration est achevée, car $\overline{m_0u}$ a été pris arbitrairement.

En définitive nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soit S *un morceau de surface qui se projette sur un plan* P *parallèlement à un axe* $z'z$ *suivant un domaine convexe, si toutes les sections par des plans parallèles à* $z'z$ *sont convexes (au sens large),* S *est ou bien un morceau de la frontière d'un domaine convexe, ou bien un morceau de quadrique réglée non dégénérée.*

23. Nous avons remarqué plus haut [n° 17, note (²)] qu'un arc convexe était du second ordre au sens large. La surface S est donc si l'on veut du *second ordre* au sens élargi. Je vais préciser ce point, ce qui nous donnera une autre forme pour l'énoncé du dernier théorème.

Soit toujours S un morceau de surface se projetant sur le plan P parallèlement à l'axe $z'z$ d'une manière biunivoque et bicontinue suivant un domaine convexe. Je dirai que S est du *second ordre* (au sens large), si toute sécante ne contenant pas de segment entièrement situé sur S le coupe en deux points au plus, et si l'une d'elles rencontre S exactement en deux points.

Je vais montrer que tout plan parallèle à $z'z$ coupe S suivant un arc convexe au sens large. Soit $\overset{\frown}{AB}$ une section de S par un tel plan. Si $\overset{\frown}{AB}$ possède des segments rectilignes, ceux-ci forment un ensemble au plus dénombrable, puisque leurs projections sont des segments de $\overline{ab}$ n'empiétant pas. Supposons que $\overset{\frown}{AB}$ ne soit pas rectiligne, il aura un point M_1 au-dessus de sa corde, par exemple. Je dis que $\overset{\frown}{AB}$ est tout entier au-dessus de $\overline{AB}$ et limite avec ce dernier un domaine convexe. Considérons d'abord un second point de $\overset{\frown}{AB}$, distinct des extrémités, soit M_2. Supposons que M_2 soit sur $\overline{AB}$ ou au-dessous, en intervertissant au besoin A et B on peut faire en sorte que M_2 soit sur $\overset{\frown}{M_1B}$. On pourra alors mener par B une sécante laissant A et M_1 de part et d'autre et ne contenant aucun segment de $\overset{\frown}{AB}$; cette sécante coupera l'arc en deux points au plus. Or il est immédiat que $\overset{\frown}{AM_1}$ et $\overset{\frown}{M_1M_2}$ coupent la sécante, ce qui ferait trois points au moins pour l'arc $\overset{\frown}{AB}$. L'arc est donc bien tout entier au-dessus de sa corde. Soit alors M un point parcourant $\overset{\frown}{AB}$, N l'intersection de la projetante de M avec $\overline{AB}$, il reste à montrer que le domaine E balayé par le segment $\overline{NM}$ est convexe. Considérons deux points quelconques de domaine M'_1 et M'_2, les parallèles à $z'z$ menées par M'_1 et M'_2 rencontrent $\overset{\frown}{AB}$ en M_1 et M_2, $\overline{AB}$ en N_1 et N_2. Le segment $\overline{M'_1M'_2}$ est tout entier dans le trapèze $N_1N_2M_2M_1$, qui peut se réduire à un triangle ou au segment $\overline{AB}$ lorsque $M'_1M'_2$ a une ou deux extrémités confondues avec celles de $\overset{\frown}{AB}$. Pour montrer que $M'_1M'_2$ fait partie tout entier de E il suffira de constater que l'arc $\overset{\frown}{M_1M_2}$ n'a pas de point au-dessous de sa corde lorsqu'une de ses extrémités au moins est distincte de celles de $\overset{\frown}{AB}$. On peut supposer M_1 sur $\overset{\frown}{AM_2}$ et M_2 distinct de B. Considérons la droite M_1M_2, si elle ne rencontre pas le segment $\overline{N_2B}$, B est au-dessous d'elle, dans le cas contraire M_1 ne peut être confondu avec A, alors en permutant A et B, M_1 et M_2 on sera ramené au cas précédent, et B sera encore au-dessous de la droite M_1M_2. Il est immédiat que si $\overset{\frown}{M_1M_2}$ avait un point M_3 au-dessous de $\overline{M_1M_2}$,

on pourrait trouver une sécante voisine de M_1M_2, ne contenant aucun segment de $\widehat{AB}$ et coupant chacun des arcs partiels $\widehat{M_1M_3}$, $\widehat{M_3M_2}$ et $\widehat{M_2B}$ en un point au moins, ce qui est impossible.

La démonstration est achevée. Le dernier théorème peut donc s'énoncer ainsi :

Un morceau de surface du second ordre (au sens large) qui se projette d'une manière biunivoque et bicontinue (obliquement ou normalement), suivant un domaine convexe plan est ou bien la frontière d'un domaine convexe, ou bien un morceau de quadrique réglée non dégénérée.

Ce résultat généralise celui que j'ai établi pour les surfaces (closes) du second ordre dans le cas où les sections non décomposées ne renferment aucun segment de droite (¹). Ainsi, *pour le second ordre, même au sens élargi, la non convexité implique nécessairement l'algébricité. Pour le troisième ordre elle implique presque toujours l'existence d'un plan tangent continu.* C'est ce que je montre dans un Mémoire (qui paraîtra dans un autre Recueil) consacré à l'étude du faisceau dérivé des surfaces d'ordre borné au sens large.

(¹) A. MARCHAUD, *Sur les surfaces du second ordre de la Géométrie finie* (*Journ. Math.*, t. XV, fasc. 131, 1936, p. 295).

ARITHMÉTIQUE DES CORPS ABÉLIENS

DU TROISIÈME DEGRÉ

PAR M. ALBERT CHÂTELET.

Depuis D. Hilbert, la théorie des corps de nombres algébriques s'est développée surtout autour de la théorie du corps des classes et des lois de réciprocité (ainsi qu'il est exposé dans le fascicule 75 du *Mémorial des Sc. Math.* rédigé par J. Herbrand et complété par G. Chevalley). La théorie du corps des classes se propose d'étudier comment se décompose un idéal d'un corps donné k dans une extension abélienne K, également donnée. Les lois de réciprocité tendent à mettre sous la forme la plus simple et la plus maniable les critères de décomposition.

Si le présent Mémoire se termine par un résultat qui n'est qu'un cas particulier des lois de réciprocité, il n'en étudie pas moins, au préalable, un problème différent. Les successeurs de D. Hilbert ont considéré que l'extension abélienne K était connue en même temps que le corps de base k, et ils ne se sont pas toujours préoccupés de la façon dont on pouvait construire effectivement cette extension. Cette construction n'est cependant pas un problème trivial : il apparaît simple d'obtenir une équation dans un corps et d'introduire toutes ses racines de façon à obtenir une extension galoisienne, on ne sait pas *a priori* si cette extension est abélienne. On peut tenter de résoudre ce premier problème en utilisant la résolvante de Lagrange et en utilisant au lieu de k une première extension par addition de certaines racines de l'unité. Mais d'autre part on peut aussi chercher un corps qui contienne K et qui soit de définition ou de construction plus simple.

Ce sont ces deux procédés qui, dans ce Mémoire, sont appliqués à la construction des extensions abéliennes, appelées $\mathbf{R}_6$ (au lieu de K) du troisième degré, relatives au corps $\mathcal{R}$ des rationnels (pris pour corps de base k). Les deux procédés, même dans ce cas particulier, ne sont pas nouveaux; le premier a été exposé succinctement dans *l'Algèbre* de H. Weber (t. II, chap. IV); le deuxième n'est autre qu'une utilisation des *périodes* introduites par Gauss dans l'étude des racines de l'unité et déjà entrevues avant lui (d'après une indication

que m'a donnée M. H. Lebesgue) par Van der Monde. Par ailleurs on sait que Kronecker avait affirmé que tout corps abélien (relativement au corps $\mathcal{R}$ des rationnels) est sous-corps d'un corps circulaire, et cette affirmation a été démontrée par H. Weber (*Algèbre*, t. II, chap. XXII), puis par D. Hilbert (*Théorie des corps de nombres algébriques*, chap. XXIII).

Mais une étude plus précise de cette double génération, au moins dans le cas d'un corps $\mathbf{R}_0$ permet d'étudier les *entiers* et les *idéaux* de ce corps. Elle permet aussi de distinguer parmi les corps $\mathbf{R}_0$, certains d'entre eux particulièrement simples (ou *primaires*) dont les *discriminants* sont des puissances de certains nombres premiers (4e puissance de 3 ou carré de tout nombre premier, mult. $3+1$); les autres corps se déduisent de ceux-là par un procédé de composition (ou de multiplication). Enfin la comparaison des deux modes de génération donne une preuve particulièrement intuitive, dans le cas considéré, de la *loi de réciprocité*; elle précise quels sont les nombres premiers (appartenant à des progressions arithmétiques déterminées) qui se décomposent dans un corps connu $\mathbf{R}_0$; cette preuve évite notamment l'introduction de tout élément transcendant.

Les raisonnements et les résultats ainsi exposés pour les corps du troisième degré sont susceptibles de généralisation pour les corps abéliens de degré quelconque. Pour amorcer cette généralisation, j'ai indiqué comment chaque paragraphe pouvait être traité de façon analogue pour les corps quadratiques; j'ai précisé notamment la composition, rarement signalée, de tous les corps quadratiques au moyen de corps primaires, dont les discriminants sont ou les nombres premiers de signe convenable [+(mult. $4+1$); —(mult. $4-1$)], ou l'un des nombres -4, $+8$, -8. Je rappelle de même la démonstration connue de la *loi de réciprocité quadratique* par la considération du corps circulaire qui contient le corps quadratique, démonstration qui, à mon avis, est plus naturelle que les démonstrations dites directes ou élémentaires.

Pour la bibliographie je renvoie au Rapport de D. Hilbert et au fascicule de J. Herbrand cités ci-dessus. Je me contente de signaler que certains des résultats de ce Mémoire ont été indiqués de façon succincte dans des Notes déjà anciennes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (mai 1911, mars et oct. 1920) et dans une communication au Congrès des Mathématiciens de Strasbourg (1921); à ce même Congrès avait été exposé l'un des premiers travaux de T. Takagi sur la théorie du corps des classes.

I. — Corps des racines cubiques de l'unité.

1. Je désigne, suivant une notation courante, les *racines cubiques de l'unité* par les lettres

$$j=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{3}, \qquad j'=-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Dans le *corps quadratique* $\mathbf{R}_j = \mathbf{R}_{j'}$, engendré par ces racines, les couples d'entiers (algébriques) conjugués sont les nombres, mis sous *formes canoniques*

$$\alpha = aj + a'j', \qquad \alpha' = aj' + a'j;$$

où a et a' sont des entiers ordinaires (rationnels). Ils constituent un *anneau* $\mathbf{E}_j$, qui contient les entiers rationnels donnés par

$$a = a' = -m; \qquad \alpha = \alpha' = m.$$

Les autres nombres du corps sont les quotients de ceux-là par des entiers rationnels positifs (supérieurs à 1, et premiers avec le p. g. c. d. de a, a').

La transposition de j et j' fait correspondre à chaque nombre α (entier ou non) du corps, son conjugué α' (représenté par la même lettre accentuée); elle définit un *automorphisme* à la fois pour le corps $\mathbf{R}_j$ et pour l'anneau $\mathbf{E}_j$; le carré de cet automorphisme est la transformation identique.

2. Je rappelle les propriétés de *divisibilité* de l'anneau $\mathbf{E}_j$. Il contient 6 *diviseurs de l'unité* (dont les inverses sont entiers)

$$\varepsilon = \pm 1, \text{ ou } \pm j, \text{ ou } \pm j'.$$

Ses *nombres premiers* sont donnés par les règles suivantes :

a. Tout entier (rationnel positif) *premier* q, *congru à* -1 (*mod* 3), *est indécomposable*, ses produits εq par les 6 diviseurs de 1 (appelés associés) sont des *nombres premiers dans* $\mathbf{E}_j$. Leur *norme* commune est q^2 (ils sont dits pour cette raison, du *second degré*).

b. Tout entier (rationnel positif) *premier* p, *congru à* $+1$ (*mod* 3), *est décomposable en un produit de deux entiers conjugués différents*

$$p = \varpi\varpi' = (aj + a'j')(aj' + a'j); \qquad (\varpi \neq \varepsilon\varpi').$$

Les produits $\varepsilon\varpi$ et $\varepsilon\varpi'$, de chacun d'eux par les six diviseurs de 1, sont des *nombres premiers* (associés) *dans* $\mathbf{E}_j$. Leur *norme* commune est p (ils sont dits du *premier degré*).

c. L'entier 3 *est*, au produit près par un diviseur ε de 1, *le carré d'un entier* (produit de deux facteurs égaux)

$$3 = -(j - j')^2 = \varepsilon\varpi_3^2.$$

Les produits de ce nombre par les 6 diviseurs de l'unité sont des *nombres premiers* (associés) *dans* $\mathbf{E}_j$. Leur *norme* commune est 3 (ils sont encore du *premier degré*, mais, au point de vue de la divisibilité, ils ne sont pas distincts de leurs conjugués).

Il n'y a pas d'autres nombres premiers dans le corps que ceux qui viennent d'être énumérés, et en outre, *tout nombre (entier) de* $\mathbf{E}_j$ *est décomposable d'une et d'une seule façon,* au produit près par des diviseurs de 1, *en un produit de nombres premiers.* Son conjugué est le produit des conjugués; sa norme est le produit des normes

$$\alpha = \varepsilon \Pi \varpi_i^{a_i} \Pi q_j^{b_j}; \qquad \alpha' = \varepsilon' \Pi \varpi_i'^{a_i} \Pi q_j^{b_j};$$
$$\mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha') = \Pi p_i^{a_i} \Pi q_j^{2b_j}; \qquad [p_i = \mathrm{N}(\varpi)_i];$$

(i, j, indices entiers; a_i, b_j exposants entiers rationnels positifs).

Le théorème de Lejeune-Dirichlet sur la progression arithmétique, ou un raisonnement direct sur les facteurs premiers du nombre $\mathrm{N}^2 + \mathrm{N} + 1$ (où N est le produit des premiers nombres premiers) montre qu'il y a une infinité de nombres premiers de chacun des degrés).

3. La définition des *congruences* et des *classes*, suivant un module entier μ, est valable dans $\mathbf{E}_j$; le nombre des classes est la norme de ce module; ces classes forment un *anneau*, qui est un *corps*, dans le cas où le module est premier. Dans tous les cas l'ensemble des classes, premières avec le module, constitue un groupe abélien, qui peut être construit par les produits des puissances d'un certain nombre de générateurs

$$\alpha \equiv \gamma_1^{a_1} \gamma_2^{a_2} \ldots, \pmod{\mu}; \qquad [a_1 \bmod d_1;\ a_2 \bmod d_2;\ \ldots];$$

le système des a_i est l'*indice multiple* de α, relativement à la base $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$. Je précise ces propriétés dans quelques cas.

a. Pour un *module premier q du second degré,* de norme q^2 (q congru à -1, mod 3), les classes peuvent être définies par les représentants

$$aj + a'j'; \qquad [a, a' \text{ entiers rationnels, définis mod } q].$$

Les classes non nulles forment un groupe cyclique $\mathbf{G}_{(q)}$, engendré par les puissances d'une certaine classe, à représentant γ non rationnel

$$\gamma^x, \pmod{q}; \qquad [x \text{ défini mod } (q^2 - 1)].$$

Elles comprennent $q - 1$ classes à représentant rationnel ($a \equiv a'$, mod q) obtenues par les $q - 1$ puissances de γ, d'exposants multiples de $q + 1$.

b. Pour un *module premier* ϖ *du premier degré,* de norme p (p congru à $+1$, mod 3), les classes peuvent être définies par des représentants rationnels (définis, mod p). Les classes non nulles forment un groupe cyclique $\mathbf{G}_{(p)}$, isomorphe au groupe des classes non nulles, mod p, dans le corps $\mathcal{R}$ des rationnels; elles sont définies par les mêmes représentants

$$g^x, \pmod{\varpi}; \qquad [x \text{ défini mod } (p - 1)].$$

Suivant le *module composé* $p = \varpi\varpi'$, il y a p^2 classes, dont $(p-1)^2$ premières avec p, qui constituent un groupe multiplicatif abélien qui peut être défini par 2 *générateurs conjugués*

$$\gamma^x\gamma'^{x'}; \quad \begin{cases} x, x' \text{ définis mod } (p-1); \\ \gamma \begin{cases} \equiv +1, & (\text{mod } \varpi'), \\ \equiv g, & (\text{mod } \varpi); \end{cases} \qquad \gamma' \begin{cases} \equiv +1, & (\text{mod } \varpi), \\ \equiv g, & (\text{mod } \varpi'). \end{cases} \end{cases}$$

c. Pour le *module premier* $(j-j')$, du premier degré, de norme 3 il y a 3 classes caractérisées par les représentants 0, $+1$, -1.

Suivant le module $3 = -(j-j')^2$, il y a 9 classes, dont 6 premières avec le module, constituant un groupe abélien qui peut être défini par 2 *générateurs*

$$(-1)^x j^y, \quad (\text{mod } 3); \qquad (x, \text{mod } 2; \ y, \text{mod } 3).$$

Suivant le module $9 = (j-j')^4$, il y a $9 \times 6 = 54$ classes premières avec le module, elles constituent un groupe abélien qui peut être défini par 3 générateurs

$$2^x(3j+4j')^y(2j-j')^z, \quad (\text{mod } 9); \qquad (x, \text{mod } 6; \ y \text{ et } z, \text{mod } 3).$$

4. Pour la construction des corps abéliens, de degré 3, j'aurai à considérer plus spécialement des couples de $\mathbf{E}_j$, que j'appelle *canoniques* et qui sont définis par les conditions de divisibilité suivantes.

Un couple canonique, et par suite son conjugué, *est un système de deux entiers conjugués, premiers entre eux :*

$$\|\alpha \quad \alpha'\|, \qquad \text{ou} \qquad \|\alpha' \quad \alpha\|; \qquad [\alpha, \alpha' \in \mathbf{E}_j; \ \text{p. g. c. d.}(\alpha, \alpha') = 1];$$

et dont l'un d'eux, et par suite aussi l'autre, *est sans facteur carré.*

Cette définition peut être remplacée par la propriété caractéristique :

Un couple de deux entiers conjugués est canonique, *si l'un d'eux*, et par suite aussi l'autre, *est sans facteur rationnel, sans facteur commun avec* 3 *et sans facteur carré.*

Le p. g. c. d. de deux entiers conjugués (α, α') est égal à son conjugué ; il est donc équivalent de dire qu'il est différent de 1 (contradictoire de la 1re partie de la définition) ou qu'il contient soit un facteur rationnel, soit un facteur commun avec 3 (contradictoire de la partie correspondante de la propriété caractéristique). La décomposition d'un nombre premier rationnel p, congru à $+1$, (mod 3), donne notamment deux nombres d'un couple canonique.

A un couple canonique sont *associés* (nombres égaux au produit près par ε) 12 *couples canoniques différents*

$$\begin{matrix} \pm\|\alpha \quad \alpha'\|, \\ \pm\|\alpha' \quad \alpha\|, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \pm\|j\alpha \quad j'\alpha'\|, \\ \pm\|j'\alpha' \quad j\alpha\|, \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \pm\|j'\alpha \quad j\alpha'\|, \\ \pm\|j\alpha' \quad j'\alpha\|. \end{matrix}$$

Ces couples sont ainsi répartis en 3 quadruples contenant chacun 2 paires opposées de couples conjugués.

5. Pour distinguer entre ces six paires associées de couples conjugués, je considère les 6 classes de $\mathbf{E}_j$, suivant le module 3, premières avec 3. Le nombre α étant premier avec 3, ses produits par les 6 classes sont respectivement congrus, à l'ordre près, aux 6 classes elles-mêmes; et l'un d'eux est congru à $+1$.

Une notation convenable permet donc d'écrire les 6 paires associées, représentées chacune par un seul des couples conjugués :

$$\begin{cases} \pm|\alpha \quad \alpha'|, \\ \alpha \equiv \alpha' \equiv +1, \end{cases} \quad \begin{cases} \pm|\alpha j, \quad \alpha' j'|, \\ \alpha j \equiv j, \quad \alpha' j' \equiv j', \end{cases} \quad \begin{cases} \pm|\alpha j', \quad \alpha' j|, \\ \alpha j' \equiv j', \quad \alpha' j \equiv j, \end{cases} \quad (\text{mod } 3).$$

Je dirai qu'*un couple* (canonique) *est*, ainsi que son conjugué, *unitaire, positif ou négatif, lorsque ses nombres sont congrus tous deux, à* $+1$ *ou à* -1 (premier quadruple). Les coefficients de j, j' dans les formes canoniques, sont alors congrus à -1 ou à $+1$.

Exceptionnellement la décomposition du nombre 1 (produit jj') peut être considérée comme définissant seulement 2 paires conjuguées de couples canoniques (opposés) non unitaires

$$\pm|j \quad j'|, \qquad \pm|j' \quad j|.$$

6. Deux couples sont *premiers entre eux* lorsque chaque nombre de l'un est premier avec chaque nombre de l'autre. Il en est alors de même de tout couple associé à l'un avec tout couple associé à l'autre, en particulier des couples conjugués et opposés. Il est équivalent que *les normes soient premières entre elles*.

Le produit de deux couples est le couple obtenu en formant les produits respectifs des nombres de même rang :

$$|\alpha_1 \quad \alpha'_1| \times |\alpha_2 \quad \alpha'_2| = |\alpha_1\alpha_2 \quad \alpha'_1\alpha'_2|.$$

Les produits des couples conjugués de deux paires

$$(|\alpha_1 \quad \alpha'_1| \quad \text{ou} \quad |\alpha'_1 \quad \alpha_1|) \quad \text{et} \quad (|\alpha_2 \quad \alpha'_2| \quad \text{ou} \quad |\alpha'_2 \quad \alpha_2|);$$

donnent deux paires de couples conjugués

$$(|\alpha_1\alpha_2 \quad \alpha'_1\alpha'_2| \quad \text{ou} \quad |\alpha'_1\alpha'_2 \quad \alpha_1\alpha_2|)$$

et

$$(|\alpha_1\alpha'_2 \quad \alpha'_1\alpha_2| \quad \text{ou} \quad |\alpha'_1\alpha_2 \quad \alpha_1\alpha'_2|).$$

Si les composants sont canoniques et premiers entre eux, ces 4 produits sont aussi canoniques.

Les nombres de chaque couple étant premiers entre eux et premiers avec les nombres de l'autre couple, les produits $\alpha_1\alpha_2$ et $\alpha'_1\alpha'_2$ d'une part, $\alpha_1\alpha'_2$ et $\alpha'_1\alpha_2$ d'autre part sont premiers entre eux. En outre chacun de ces produits ne peut

avoir de facteur carré, car tout facteur premier ne peut figurer qu'une seule fois dans un seul des nombres considérés d'abord.

Le remplacement d'un composant par son opposé remplace les produits par leurs opposés. La norme d'un produit est égale au produit des normes des facteurs.

Si les composants sont unitaires, les produits sont unitaires, le signe étant donné par la règle des signes. Par exemple

$$\alpha_1 \equiv \alpha'_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha'_2 \equiv +1,$$

entraine

$$\alpha_1\alpha_2 \equiv \alpha'_1\alpha'_2 \equiv \alpha_1\alpha'_2 \equiv \alpha'_1\alpha_2 \equiv +1, \qquad (\text{mod } 3).$$

Avec ces conventions, 12 couples canoniques associés comprennent 2 couples conjugués unitaires positifs, les 2 couples opposés négatifs et leurs 8 *produits*, par les 2 couples conjugués de décomposition de 1, qui ne sont plus unitaires.

7. Cette composition s'étend de proche en proche à un système de h paires de couples conjugués, canoniques premiers entre eux deux à deux (éventuellement unitaires) elle donne 2^{h-1} paires de produits de chacun h composants. Elle permet d'énoncer une nouvelle propriété caractéristique d'un couple canonique.

Pour qu'un couple d'entiers (de $\mathbf{E}_j$) *soit canonique, il faut et il suffit que leur norme commune soit un produit de facteurs premiers* (rationnels) *différents, chacun étant congru à* $+1$ (mod 3).

$$a = \mathrm{N}(\alpha) = \mathrm{N}(\alpha') = \prod_x p_x; \qquad \begin{cases} x \text{ de } 1 \text{ à } h; & p_x \text{ premier;} \\ \text{les } p_x \text{ inégaux}; & p_x \equiv +1 \ (\text{mod } 3). \end{cases}$$

La condition est nécessaire. — Si a admettait un facteur q, congru à -1, (mod 3), ou le facteur 3, le nombre q premier dans $\mathbf{E}_j$, ou le nombre $(j - j')$. diviserait les deux conjugués α et α' qui ne seraient pas premiers entre eux. Si a admettait un facteur carré p^2, le nombre premier p étant décomposable en $\varpi\varpi'$, le facteur rationnel $\varpi\varpi'$ ou l'un des facteurs carrés ϖ^2 ou ϖ'^2 diviserait α.

La condition est suffisante. — Si un nombre entier rationnel a est décomposé comme il est dit, il peut être obtenu comme norme d'un couple canonique unitaire positif de 2^{h-1} façons. Il suffit de décomposer chaque nombre p_x en un produit de nombres (premiers) d'un couple unitaire positif, ce qui donne 2 couples conjugués (seulement)

$$\|\varpi_x \quad \varpi'_x\|, \qquad \|\varpi'_x \quad \varpi_x\|; \qquad p_x = \varpi_x\varpi'_x, \qquad \varpi_x \equiv \varpi'_x \equiv +1, \qquad (\text{mod } 3)$$

puis de multiplier de proche en proche, ce qui donne 2^{h-1} paires de couples unitaires positifs. Les autres sont obtenues en prenant les opposés d'une part, et en multipliant par les couples non unitaires de norme 1 d'autre part. Ceci donne 2^{h-1} systèmes différents de 12 couples associés.

8. Pour obtenir pratiquement les couples canoniques unitaires, il est commode de calculer les valeurs de la forme

$$a^2 + a'^2 - aa' \qquad \begin{cases} a, a' \text{ entiers rationnels, positifs ou négatifs;} \\ a \equiv a' \equiv -1, \pmod 3; \end{cases}$$

il suffit de retenir les valeurs qui sont sans facteur carré. En outre, comme il y a symétrie en a, a', il suffit de limiter les calculs aux couples de nombres tels que

$$|a'| < |a|,$$

chaque couple unitaire n'est ainsi obtenu qu'une fois.

La considération des différences premières et secondes (qui sont constantes pour une même valeur de a ou de a') permet de simplifier le calcul du tableau de valeurs. L'exemple ci-dessous contient tous les couples de norme inférieure à 300 ($\alpha = a'j + aj'$).

a \ a'	-16	-13	-10	-7	-4	-1	2	5	8	11	14
-19	313	283	271	277	301 7×43	~~343~~	403 13×31	481 13×37	577	691	823
-16		217 7×31	~~196~~	193	~~208~~	241	~~292~~	~~361~~	~~448~~	553	~~676~~
-13			139	127	133 7×19	157	199	259 7×37	337	433	
-10				79	~~76~~	91 7×13	~~124~~	~~175~~	~~244~~		
-7					37	43	67	109			
-4						13	~~28~~				
-1						1					
2						7					
5					61	31	19				
8				~~168~~	~~112~~	73	~~52~~	~~49~~			
11			331	247 13×19	181	133 7×19	103	91 7×13	97		
14		547	~~486~~	~~343~~	~~268~~	211	~~172~~	151	~~148~~	163	
17	817 19×43	679 7×97	559 13×43	457	373	307	259 7×37	229	217 7×31	223	247 13×19

Les nombres barrés sont ceux qui ont un facteur carré; les nombres pour lesquels aucune décomposition n'est indiquée sont premiers. Le tableau, ainsi limité, ne contient encore que des nombres composés de un ou deux facteurs; ces derniers s'y trouvent effectivement deux fois.

II. — Génération d'une équation abélienne de degré 3.

1. Je rappelle d'abord ce qu'est une *équation abélienne* de degré 3 dans le corps $\mathcal{R}$ des nombres rationnels. Elle est obtenue en annulant un polynome

$$f(x) = x^3 - sx^2 + s'x - s'',$$

dont les coefficients sont dans $\mathcal{R}$; qui est *irréductible* (ou indécomposable) dans $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire encore, dont aucune des 3 racines $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ n'est dans $\mathcal{R}$); enfin qui *admet un groupe* $\mathbf{G}_\sigma$ *abélien du* 3^e *ordre*.

Ce groupe ([1]) est nécessairement formé de 3 permutations circulaires

$$\|\theta_1\theta_2\theta_3\|.(\sigma) = \|\theta_2\theta_3\theta_1\|; \qquad \|\theta_1\theta_2\theta_3\|.(\sigma^2) = \|\theta_3\theta_1\theta_2\|; \qquad (\sigma^3) = (1).$$

Par la troisième propriété, il faut alors entendre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une expression rationnelle $\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ à coefficients dans $\mathcal{R}$, ait une valeur dans $\mathcal{R}$ est qu'elle soit invariante pour les substitutions de $\mathbf{G}_\sigma$

$$|\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \in \mathcal{R}| \quad \rightleftharpoons \quad [\varphi(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \varphi(\theta_2, \theta_3, \theta_1) = \varphi(\theta_3, \theta_1, \theta_2)].$$

Ce polynome $f(x)$, considéré dans le corps $\mathbf{R}_j$, étudié ci-dessus, y reste irréductible, sinon il ne pourrait y avoir plus de deux racines conjuguées et la troisième serait rationnelle. Il conserve le même groupe $\mathbf{G}_\sigma$, sinon il ne pourrait admettre que son seul sous groupe, constitué par la seule transformation identique, et chaque θ_i serait un nombre de $\mathbf{R}_j$.

([1]) Je représente une *transformation*, ou, plus exactement, son *opérateur* par une lettre entre parenthèses (σ), (s), ... et je la place en multiplicateur à droite, séparée par un point de l'élément (nombre, matrice, ensemble, ...) à transformer. La formule du texte se lit ainsi : (σ) remplace les nombres $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, respectivement par $\theta_2, \theta_3, \theta_1$.

Le *produit de deux transformations*, désigné par le signe $\times$ est alors défini par la relation

$$X.(\sigma_1 \times \sigma_2) = [(X.(\sigma_1)].(\sigma_2),$$

X désigne un élément quelconque qui peut être transformé par (σ_1) et la formule suppose que le résultat de cette transformation peut, à son tour être transformé par (σ_2). Le produit ainsi défini s'étend, sous les réserves faites, à un nombre quelconque de transformations: il est *associatif*, mais non nécessairement commutatif.

La *transformation identique* est désignée par (1); l'*inverse* de (σ), désignée par (σ^{-1}), est, si elle existe, la transformation telle que

$$(\sigma) \times (\sigma^{-1}) = (\sigma^{-1}) \times (\sigma) = (1),$$

ou

$$[X.(\sigma) = Y] \rightleftharpoons [X = Y.(\sigma^{-1})].$$

Ces notations, dont on pourrait se passer dans l'étude présente, amorcent une généralisation possible.

2. Pour obtenir une autre propriété caractéristique, j'utilise les *résolvantes de* Lagrange des nombres θ_u que je note par la même lettre surlignée et qui sont [u défini (mod 3)]

$$(1) \qquad \bar{\theta}_u = \theta_u + j\theta_{u+1} + j'\theta_{u-1}, \qquad \theta'_u = \theta_u + j'\theta_{u+1} + j\theta_{u+2}.$$

Je puis encore les écrire

$$\bar{\theta}_u = \Sigma_v j'^v \theta_{u+v}, \qquad \theta'_u = \Sigma_v j'^v \theta_{u-v}, \qquad (u, v \text{ définis mod } 3).$$

Le changement de u en $u+1$, ou en $u+2$, est obtenu, soit par une permutation circulaire (σ), ou (σ^2), des θ_u, soit en multipliant la résolvante considérée par j ou j'

$$\bar{\theta}_{u+1} = \bar{\theta}_u.(\sigma) = j'\theta_u, \qquad \theta'_{u+1} = \theta'_u.(\sigma) = j\theta'_u,$$
$$\bar{\theta}_{u+2} = \theta_u.(\sigma^2) = j\theta_u, \qquad \theta'_{u+2} = \theta'_u.(\sigma^2) = j'\theta'_u.$$

Avec ces notations la propriété annoncée peut être exprimée :

La condition nécessaire et suffisante pour que le polynome $f(x)$, de degré 3, à coefficients dans $\mathcal{R}$ et dont les racines sont θ_1, θ_2, θ_3, *soit abélien est que les deux résolvantes de* Lagrange (de même indice u) *des racines, vérifient la relation*

$$(2) \qquad \bar{\theta}_u^2 = \alpha\theta'_u, \qquad \theta'^2_u = \alpha'\theta_u,$$

où α et α' sont des nombres conjugués de $\mathbf{R}_j$, tels que les nombres

$$(3) \qquad \alpha^2\alpha' = \mathrm{N}(\alpha)\alpha, \qquad \alpha'^2\alpha = \mathrm{N}(\alpha)\alpha'$$

ne soient pas des puissances cubiques exactes dans $\mathbf{R}_j$.

Si les relations (2) sont vérifiées pour une valeur de l'indice u (mod 3), elles le sont pour les deux autres, d'après les propriétés indiquées. D'autre part, il suffit que la restriction (3) soit vérifiée pour l'un des deux nombres, elle l'est alors manifestement pour l'autre qui est son conjugué. Elle implique notamment que α ne soit pas un nombre rationnel a qui serait égal à son conjugué α', ce qui entraînerait $\alpha^2\alpha' = a^2 a = a^3$.

3. Avant de démontrer la propriété, j'indique quelques transformations et conséquences des conditions annoncées.

Les relations (2) sont équivalentes au système surabondant

$$(2') \qquad \begin{cases} \bar{\theta}_u^3 = \alpha^3\alpha', \\ \bar{\theta}'^3_u = \alpha'^2\alpha, \end{cases} \qquad \theta_u\theta'_u = \alpha\alpha'.$$

Si ces nouvelles relations sont vérifiées pour une valeur de l'indice u, elles le sont encore pour les deux autres. Cette invariance pour l'indice et la symétrie des relations en $\bar{\theta}_u$, $\bar{\theta}'_u$ et α, α' peuvent être exprimées par des transformations.

Le système (2'), ou le système (2), est invariant pour les transformations du groupe (abélien) $\mathbf{G}_{\sigma,\varepsilon}$, dont la loi de composition est exprimée par

$$(\sigma),\quad (\sigma^2),\quad (\sigma^3)=(\varepsilon^2)=(1),\qquad (\sigma\varepsilon)=(\varepsilon\sigma),$$

et dont les transformations génératrices (σ), (ε) sont définies par

$$\|\theta_u\theta'_u j\|.(\sigma)=\|\theta_{u+1}\theta'_{u+1}j\|,\qquad \|\theta_u\theta'_u j\|.(\varepsilon)=\|\theta'_u\theta_u j'\|;$$

où l'indice ν est défini (mod 3). Il en résulte les effets des autres transformations du groupe

$$\|\theta_u\theta'_u j\|.(\sigma^2)=\|\theta_{u+2}\theta'_{u+2}j\|.$$
$$\|\theta_u\theta'_u j\|.(\sigma\varepsilon)=\|\theta_u\theta'_u j\|.(\varepsilon\sigma)=\|\theta'_{u+1}\theta_{u+1}j'\|,$$
$$\|\theta_u\theta'_u j\|.(\sigma^2\varepsilon)=\|\theta_u\theta'_u j\|.(\varepsilon\sigma^2)=\|\theta'_{u+2}\theta_{u+2}j'\|.$$

D'autre part les équations (1) de même indice, complétées par la valeur (rationnelle) de la somme des racines (*trace* de chacune d'elles)

$$\theta_u+\theta_{u+1}+\theta_{u+2}=s.$$

déterminent en fonction de θ'_u, θ''_u, j, j' et s ces racines dont les expressions sont

$$(1')\qquad \theta_u=\frac{1}{3}(\theta_u+\theta'_u+s);\qquad \text{ou}\qquad (3\theta_u-s)=\theta_u+\frac{\alpha\alpha'}{\theta_u}=\theta'_u+\frac{\alpha\alpha'}{\theta'_u}.$$

Les transformations (σ), (σ^2), $(\sigma^3)=(1)$, permutent circulairement ces racines et $(\sigma\varepsilon)$, $(\sigma^2\varepsilon)$, (ε) donnent respectivement les mêmes résultats

$$\theta_u.(\sigma)=\theta_u.(\sigma\varepsilon)=\theta_{u+1};\qquad \theta_u.(\sigma^2)=\theta_u.(\sigma^2\varepsilon)=\theta_{u+2};\qquad \theta_u.(\varepsilon)=\theta_u.$$

Le groupe $\mathbf{G}_\sigma$ est par suite égal, ou, plus exactement isomorphe au *groupe quotient* $|\mathbf{G}_{\sigma,\varepsilon}|[1,(\varepsilon)]$.

4. Les expressions (1') des racines θ_u permettent de calculer leurs fonctions symétriques élémentaires, c'est-à-dire les coefficients s' et s'' du polynome $f(x)$ qui les admet pour zéros. Je puis aussi éliminer θ_u et θ'_u entre (1') et (2'). L'équation (1') entraine

$$\left(\theta_u-\frac{s}{3}\right)^3=\frac{1}{27}(\theta_u+\theta'_u)^3=\frac{1}{27}(\theta_u^3+\theta''^3_u)+\frac{1}{9}\theta_u\theta'_u(\theta_u+\theta'_u);$$

les conditions (2') permettent d'en éliminer θ_u, θ'_u : ce qui donne

$$(4)\qquad \left(\theta_u-\frac{s}{3}\right)^3-\frac{\alpha\alpha'}{3}\left(\theta_u-\frac{s}{3}\right)-\frac{1}{27}(\alpha\alpha'\alpha+\alpha')=0,$$

ou, sous forme développée,

$$(4')\qquad \theta_u^3-s\theta_u^2+\frac{1}{3}(s^2-\alpha\alpha')\theta_u-\frac{1}{27}[s^3-3s\alpha\alpha'+\alpha\alpha'(\alpha+\alpha')]=0.$$

Le *discriminant* de cette équation est

$$-\prod_{u,v}(\theta_u-\theta_v)=-\frac{1}{2^7}(\alpha\alpha')^2(\alpha-\alpha')^3; \qquad (u\neq v,\quad u,v=1,2,3).$$

Je signale encore que les résolvantes $\bar\theta_u$ et θ'_u peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles de *l'une* des racines θ_u, à coefficients dans $\mathbf{R}_j$. Il suffit de rapprocher les équations en $\bar\theta_u$ ou $\bar\theta'_u$ des systèmes (2') et (1')

$$\begin{cases} \bar\theta_u^3-\alpha^2\alpha'=0, \\ \theta_u+\dfrac{\alpha\alpha'}{\theta_u}-3\left(\theta_u-\dfrac{s}{3}\right)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar\theta_u'^3-\alpha'^2\alpha=0, \\ \theta'_u+\dfrac{\alpha\alpha'}{\theta'_u}-3\left(\theta_u-\dfrac{s}{3}\right)=0 \end{cases}$$

et chercher le p. g. c. d. linéaire en θ_u et θ'_u des premiers membres

$$(1'') \qquad \theta_u=\frac{\alpha\alpha'[(3\theta_u-s)+\alpha]}{(3\theta_u-s)^2-\alpha\alpha'}, \qquad \theta'_u=\frac{\alpha\alpha'[(3\theta_u-s)+\alpha']}{(3\theta_u-s)^2-\alpha\alpha'}.$$

5. *La condition est nécessaire.* — Je suppose l'équation abélienne; les quotients

$$\theta_u^2:\bar\theta'_u=\frac{(\theta_u+j\theta_{u+1}+j'\theta_{u+2})^2}{(\theta_u+j'\theta_{u+1}+j\theta_{u+2})}, \qquad \theta_u'^2:\bar\theta_u=\frac{(\theta_u+j'\theta_{u+1}+j\theta_{u+2})^2}{(\theta_u+j\theta_{u+1}+j'\theta_{u+2})}$$

sont laissés invariants par les permutations circulaires de $\mathbf{G}_3$; par suite leurs valeurs appartiennent à $\mathbf{R}_j$. En outre je puis passer de l'une à l'autre en transposant j et j', ces valeurs sont donc des nombres conjugués α, α' de $\mathbf{R}_j$; ce qui démontre les relations (2).

Le nombre $\alpha^2\alpha'$ ne peut être une puissance cubique exacte, sinon les $\bar\theta_u$, d'après les relations (2'), seraient dans $\mathbf{R}_j$; il en serait de même des θ_u, d'après les relations (1'), et le polynome $f(x)$ ne serait pas irréductible (dans $\mathbf{R}_j$, ni par suite dans $\mathcal{R}$).

6. *La condition est suffisante.* — Je suppose vérifiées les conditions (1) et (2) et les nombres conjugués α, α' exprimés par leurs formes canoniques (conjuguées) :

$$\alpha=aj+a'j'; \qquad \alpha'=aj'+a'j; \qquad (a,\ a' \text{ dans } \mathcal{R}).$$

Leur norme que je désigne par m et leur trace sont des nombres de $\mathcal{R}$

$$m=\alpha\alpha'=a^2+a'^2-aa', \qquad \alpha+\alpha'=-(a+a').$$

Le polynome $f(x)$, qui a pour racines les θ_u, est, avec ces notations,

$$f(x)=\left(x-\frac{s}{3}\right)^3-\frac{m}{3}\left(x-\frac{s}{3}\right)+\frac{m}{27}(a+a')$$

et son discriminant est

$$\frac{m^3}{9}(a-a')^2.$$

Ce polynome est irréductible, sinon l'une des racines θ_u serait dans $\mathcal{R}$; la résolvante $\bar{\theta}_u$, donnée par la relation (1″) serait dans $\mathbf{R}_j$ et $\alpha^2\alpha'$ serait une puissance cubique exacte (dans $\mathbf{R}_j$).

D'autre part les équations (2′) montrent que j et j' peuvent être exprimés sous forme d'expressions rationnelles, à coefficients dans $\mathcal{R}$, d'un quelconque des $\bar{\theta}_u$ (ou des $\bar{\theta}'_u$)

$$j=\frac{\theta_u^3+m\alpha'}{m(\alpha-\alpha')};\qquad j'=\frac{\theta_u^3+m\alpha}{m(\alpha'-\alpha)}.$$

Il en est par suite de même de tous les $\bar{\theta}_u$ et $\bar{\theta}'_u$, puis des θ_u, par application des relations (1′). Je puis exprimer ces deux propriétés en disant que chacun des $\bar{\theta}_u$ est un *élément primitif* du corps $\mathbf{R}_{0,j}$ engendré par les θ_u et j, j'; les conjugués de cet élément sont les 6 valeurs $\bar{\theta}_u$ et $\bar{\theta}'_u$. Les transformations qui font passer de l'élément considéré à chacune d'elles sont celles du groupe $\mathbf{G}_{\sigma,\varepsilon}$. Relativement aux θ_u, elles se répartissent dans les trois classes du *groupe quotient*

$$\mathbf{G}_{\sigma,\varepsilon}\,|\,(1,\varepsilon),$$

qui est isomorphe à $\mathbf{G}_\sigma$ et j'ai ainsi obtenu le groupe de l'équation qui est bien abélienne.

7. J'aurais pu aussi remarquer que la racine carrée du discriminant

$$(\theta_1-\theta_2)(\theta_2-\theta_3)(\theta_3-\theta_1)=\pm\frac{m(\alpha-\alpha')}{3}$$

est un nombre rationnel et que les trois permutations circulaires de $\mathbf{G}_\sigma$ qui la laissent invariante forment le groupe de l'équation.

Le polynome étant abélien, ses trois racines peuvent être exprimées dans $\mathcal{R}$, en fonctions rationnelles de l'une d'elles. Je puis obtenir ces expressions en utilisant les relations (1′) pour calculer les carrés et les produits deux à deux des θ_u, les relations (2) et (2′) permettent de les exprimer en fonctions linéaires des θ_u, $\bar{\theta}'_u$; et les relations (1) les donnent en fonction des θ_u (dans $\mathbf{R}_j$)

$$9\theta_u^2=\theta_u(\alpha+\alpha'+4s)+\theta_{u+1}(j'\alpha+j\alpha'-2s)+\theta_{u+2}(j\alpha+j'\alpha'-2s)+2\alpha\alpha'+s^2,$$
$$9\theta_{u+1}\theta_{u+2}=\theta_u(\alpha+\alpha'-2s)+\theta_{u+1}(j\alpha+j'\alpha'+s)+\theta_{u+2}(j'\alpha+j\alpha'+s)-\alpha\alpha'+s^2.$$

Les parenthèses sont des nombres de $\mathcal{R}$ et ces formules constituent une table de multiplication dans le corps $\mathbf{R}_0$. La première donne l'expression de θ_{u+1} ou θ_{u+2}, sous forme d'un polynome du 2^e degré en θ_u (en éliminant θ_{u+2} ou θ_{u+1}, au moyen de la trace s).

Le raisonnement fait pour montrer que la valeur de $\theta_u^2:\bar{\theta}'_u$ est dans $\mathbf{R}_j$ est valable pour un monome convenable des deux résolvantes.

La valeur de

$$\theta_u^{\alpha}\bar{\theta}_u'^{\alpha'};\qquad \alpha-\alpha'\equiv 0,\qquad (\mathrm{mod}\ 3):$$

est un nombre de $\mathbf{R}_j$.

En effet une permutation circulaire (σ) multiplie ce monome par

$$j'^{a}j^{a'}=j^{a'-a}=1,$$

donc le laisse invariable. Sa valeur peut d'ailleurs s'exprimer au moyen de α, α'

$$\theta_n^a\theta_n'^{a'}=\alpha^{\frac{2a+a'}{3}}\alpha'^{\frac{a+2a'}{3}}.$$

Les valeurs ainsi obtenues (dans $\mathbf{R}_j$), constituent un groupe abélien de générateurs α, α'

$$\alpha^x\alpha'^{x'}: \quad (x,\ x' \text{ entiers quelconques};\ a=2x-x';\ a'=2x'-x).$$

Les expressions de ces monomes comprennent, comme cas particuliers, les formules (2) et (2′); elles amorcent la généralisation du raisonnement pour les corps abéliens de degré quelconque.

8. La propriété ainsi démontrée peut être remplacée et complétée par la suivante :

Il y a correspondance biunivoque entre un système

$$\|\alpha\quad\alpha'\| \text{ et } s: \qquad [\alpha,\alpha'\in R_j;\ s\in\mathcal{R}]$$

[formé d'un couple de $\mathbf{R}_j$, vérifiant la condition (3) et d'une trace s], *et un triplet* $\|\theta_1\quad\theta_2\quad\theta_3\|$ *de racines d'une équation abélienne, ordonné à une permutation circulaire près.*

Les démonstrations précédentes indiquent comment le couple et la trace sont définis à partir du triplet, et, inversement comment le triplet peut être construit à partir de la trace et du couple. Je rassemble les formules essentielles de cette construction

(2′ et 1′)
$$\left.\begin{aligned}\theta_1^3&=\alpha^2\alpha',\\ \theta_1\theta_1'&=\alpha\alpha',\end{aligned}\right\}\qquad\left\{\begin{aligned}\theta_1&=\tfrac{1}{3}(\quad\theta_1+\quad\theta_1'+s),\\ \theta_2&=\tfrac{1}{3}(j'\theta_1+j\,\theta_1'+s),\\ \theta_3&=\tfrac{1}{3}(j\,\theta_1+j'\theta_1'+s).\end{aligned}\right.$$

L'équation en θ_1 en donne trois valeurs possibles, produits de l'une d'elles par 1, j ou j'; le remplacement de l'une de ces valeurs par une autre permute circulairement les nombres du triplet, ce qui démontre complètement l'énoncé.

Le remplacement du couple par son conjugué

$$\|\alpha'\quad\alpha\| \qquad \text{substitué à} \qquad \|\alpha\quad\alpha'\|,$$

transpose θ_1 et θ_1', et par suite *transpose deux nombres du triplet*

$$\|\theta_1\quad\theta_2\quad\theta_3\| \qquad \text{substitué à} \qquad \|\theta_1\quad\theta_2\quad\theta_3\|.$$

Le remplacement simultané du couple et de la trace par leurs opposés

$$(\ -\alpha\ \ -\alpha'\ \|\ \text{et}\ -s)\quad \text{substitués à}\quad (\ \|\ \alpha\ \ \alpha'\ \|\ \text{et}\ s);$$

remplace le triplet par son opposé

$$\|\ -\theta_1\ \ -\theta_2\ \ -\theta_3\ \|\quad \text{substitué à}\quad \|\ \theta_1\ \ \theta_2\ \ \theta_3\ \|.$$

Le remplacement du couple par un associé (produit par $\|j\ \ j'\|$ ou $\|j'\ \ j\|$) sera étudié ci-dessous comme cas particulier du produit de deux couples.

9. La construction qui donne les θ_α peut encore être faite si la construction restrictive (3) n'est pas remplie, c'est-à-dire si

$$\alpha^2\alpha' = \delta^3 = (dj + d'j')^3; \qquad \alpha'^2\alpha = \delta'^3 = (dj' + d'j)^3; \qquad [d,\ d' \in \mathcal{R}].$$

Le polynome $f(x)$ a ses racines dans $\mathcal{R}$ et leurs expressions sont déduites immédiatement des équations (2') et (1')

$$\theta_1 = \delta, \qquad \theta_2 = j\delta, \qquad \theta_3 = j'\delta; \qquad \theta'_1 = \delta', \qquad \theta'_2 = j'\delta', \qquad \theta'_3 = j\delta';$$

et

$$(1\text{-}d)\qquad \begin{cases} \theta_1 = \dfrac{1}{3}\ (\delta + \ \delta' + s) = \dfrac{1}{3}(s - \ d - \ d'), \\ \theta_2 = \dfrac{1}{3}\ (j\delta + j'\delta' + s) = \dfrac{1}{3}(s - \ d + 2d'), \\ \theta_3 = \dfrac{1}{3}\ (j'\delta + j\delta' + s) = \dfrac{1}{3}(s + 2d - \ d'). \end{cases}$$

La valeur de α peut d'ailleurs être exprimée dans ce cas au moyen de d et d'

$$\alpha = \frac{\delta^2}{\delta'} = \frac{\delta^3}{N(\delta)} = \frac{(3\,dd'^2 - d^3 - d'^3)j' + (3\,d^2d' - d^3 - d'^3)j}{d^2 + d'^2 - dd'}.$$

Les racines ainsi obtenues vérifient les mêmes relations à coefficients rationnels que les racines des équations irréductibles, et notamment les formules de multiplication du numéro précédent. Si $\alpha = 0$, les θ_i sont des nombres rationnels égaux entre eux $\left(\text{et à } \frac{s}{3}\right)$.

10. De ce qui précède, je puis déduire la condition pour qu'un polynome du 3e degré, à coefficients rationnels soit abélien. Je puis toujours l'écrire sous la forme

$$f(x) = \left(x - \frac{s}{3}\right)^3 + p\left(x - \frac{s}{3}\right) + q;$$

il faut et il suffit qu'il soit irréductible et qu'il existe un couple α, α' de nombres conjugués dans $\mathbf{R}_j$ tels que (équation 4)

$$\frac{\alpha\alpha'}{3} = -p, \qquad -\frac{1}{27}\alpha\alpha'(\alpha + \alpha') = q.$$

Les nombres α, α' sont ainsi déterminés par une équation du 2e degré

$$x^2 - \frac{9q}{p}x - 3p = 0,$$

dont il est nécessaire et suffisant que le discriminant soit le produit de -3 par un carré (de nombre rationnel). Il en résulte l'énoncé :

Pour que le polynome

$$f(x) = \left(x - \frac{s}{3}\right)^3 + p\left(x - \frac{s}{3}\right) + q, \qquad (s, p, q \text{ rationnels}),$$

soit abélien, il faut et il suffit qu'il soit irréductible et que le nombre $-(4p^3 + 27q^2)$ *soit le carré d'un nombre rationnel.*

Si la condition du carré était seule remplie, le polynome n'étant plus irréductible aurait des racines rationnelles données par les formules (1-*d*); ce sont d'ailleurs des nombres rationnels quelconques.

11. On pourrait appliquer un raisonnement analogue au précédent pour construire une *équation du second degré* dans $\mathcal{R}$ (nécessairement abélienne, si elle est irréductible). Ses deux racines conjuguées étant θ_1 et θ_2, la « *résolvante* de Lagrange » (construite avec -1, racine carrée de 1) est

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 + (-1)\theta_2 = \theta_1 - \theta_2.$$

Son carré doit être un nombre rationnel d, non carré parfait. Le polynome cherché est, en appelant s la trace,

$$f(x) = \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - d = x^2 - sx + \frac{1}{4}(s^2 - 4d).$$

Il y a correspondance univoque entre un système

$$d \text{ et } s; \qquad (d \text{ et } s \in \mathcal{R});$$

(formé d'un nombre de $\mathcal{R}$, non carré et d'une trace s), *et un couple* $\| \theta_1 \quad \theta_2 \|$, *de racines d'une équation du second degré, ordonné à une transposition près* (ou encore non ordonné).

III. — Génération d'un corps abélien.

1. Je vais étudier le *corps abélien* $\mathbf{R}_\theta$, constitué par toutes les fonctions $\vartheta = \varphi(\theta)$, rationnelles, à coefficients rationnels de l'un des nombres θ d'un triplet $\| \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \|$ de racines d'une équation abélienne de degré 3. Ce corps contient les *conjugués* $\vartheta_u = \varphi(\theta_u)$ de chacun de ses éléments (et notamment ceux de θ). En outre l'ordre d'un triplet de conjugués $\| \vartheta_u \quad \vartheta_{u+1} \quad \vartheta_{u+2} \|$ est déterminé, à une permutation circulaire près, lorsque l'ordre des θ_u est choisi.

Deux conjugués quelconques de θ forment avec 1 une *base du corps* (ou sont *arithmétiquement indépendants*). En effet s'il existait entre eux une relation linéaire, à coefficients rationnels

$$a+b\theta_{u+1}+c\theta_{u+2}=0; \qquad (a, b, c \text{ rationnels});$$

elle subsisterait par permutation circulaire des θ_u; or ceci n'est pas possible, car les trois relations linéaires en a, b, c ainsi obtenues ont un déterminant non nul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 \end{vmatrix} = -(\theta_1+j\theta_2+j'\theta_3)(\theta_1+j'\theta_2+j\theta_3) = -\alpha\alpha' \neq 0.$$

Tout élément $\mathfrak{z}$ de $\mathbf{R}_0$ peut donc être exprimé d'une et d'une seule façon, par une fonction linéaire à coefficients rationnels de 1 et de 2 conjugués de θ. Le triplet de ses conjugués, ordonné, à une permutation circulaire près, est défini par une égalité de matrices

$$\| \mathfrak{z}_u \quad \mathfrak{z}_{u+1} \quad \mathfrak{z}_{u+2} \| = \| a \quad b \quad c \| \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_{u+1} & \theta_{u+2} & \theta_u \\ \theta_{u+2} & \theta_u & \theta_{u+1} \end{vmatrix}; \qquad (a, b, c \text{ rationnels}).$$

2. Ces propriétés permettent de remplacer l'appartenance de deux triplets à un même corps, par une relation entre les couples correspondants de $\mathbf{R}_j$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'aux systèmes

$$\| \alpha \quad \alpha' \| \text{ et } s; \qquad \| \beta \quad \beta' \| \text{ et } s';$$

(couple et trace), *correspondent des triplets de racines*

$$\| \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \|, \qquad \| \mathfrak{z}_1 \quad \mathfrak{z}_2 \quad \mathfrak{z}_3 \|$$

appartenant à un même corps abélien et ordonnés de même façon, à une permutation circulaire près, *est que l'un des quotients*

$$(\alpha^2\alpha' : \beta^2\beta') \qquad \text{ou} \qquad (\alpha'^2\alpha : \beta'^2\beta)$$

soit, dans $\mathbf{R}_j$, *une puissance cubique exacte.*

Si la condition est remplie pour l'un des quotients, elle l'est évidemment pour l'autre qui est le nombre conjugué.

3. *La condition est nécessaire.* — Je suppose le triplet des $\mathfrak{z}_u$ dans le corps des θ_u et ordonné comme eux; je calcule ses résolvantes de Lagrange par une égalité de matrices

$$\| \bar{\mathfrak{z}}_1 \quad \bar{\mathfrak{z}}'_1 \| = \| \mathfrak{z}_1 \quad \mathfrak{z}_2 \quad \mathfrak{z}_3 \| \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j & j' \\ j' & j \end{vmatrix} = \| a \quad b \quad c \| \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 \\ \theta_3 & \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ j & j' \\ j' & j \end{vmatrix}$$

$$= \| b\bar{\theta}_2 + c\bar{\theta}_3 \quad b\theta'_2 + c\bar{\theta}'_3 \| = \| \bar{\theta}_1(bj'+cj) \quad \theta'_1(bj+cj') \|.$$

J'en conclus la condition nécessaire entre les nombres du couple

$$\beta^2\beta' = \Im_1^3 = \theta_1^3 (bj' + cj)^3 = \alpha^2\alpha' (bj' + cj)^3.$$

La condition est suffisante. — Je suppose la condition vérifiée, j'en déduis la relation entre les résolvantes de Lagrange des triplets correspondants

$$\Im_1^3 : \theta_1^3 = [(\beta^2\beta') : (\alpha^2\alpha')] = (bj' + cj)^3, \qquad \Im_1'^3 : \theta_1'^3 = (bj + cj')^3;$$

je puis choisir les indices de façon que

$$\begin{aligned} &\Im_1 = \theta_1 (bj' + cj), \qquad \Im_2 = \Im_1 j' = \theta_2 (bj' + cj), \qquad \Im_3 = \Im_1 j = \theta_3 (bj' + cj), \\ &\Im_1' = \theta_1' (bj + cj'), \qquad \Im_2' = \Im_1' j = \theta_2' (bj + cj'), \qquad \Im_3' = \Im_1' j' = \theta_3' (bj + cj'). \end{aligned}$$

Je calcule alors $\Im_u$, en me donnant sa trace s' et en appliquant (1')

$$\begin{aligned} 3\Im_u = (\Im_u + \Im_u' + s') &= b(\theta_u j' + \theta_u' j) \quad + c(\theta_u j + \theta_u' j') + s' \\ &= b(\theta_{u+1} + \theta_{u+1}') \quad + c(\theta_{u+2} + \theta_{u+2}') + s' \\ &= 3b\theta_{u+1} + 3c\theta_{u+2} + s' - s(b + c). \end{aligned}$$

Ceci entraine l'égalité des matrices indiquée ci-dessus, ce qui montre que le triplet des $\Im_u$ est dans le corps défini et ordonné par le triplet des θ_u.

La condition ne fait pas intervenir les traces s, s' de sorte que deux triplets correspondant à un même couple et de traces différentes sont dans un même corps. Ceci était évident *a priori*, car le changement de trace augmente seulement chaque nombre du triplet d'un même nombre rationnel.

4. Je puis ainsi choisir, dans un corps abélien, un *triplet canonique*, correspondant à un couple particulièrement simple de $\mathbf{R}_j$, c'est ce que je précise par l'énoncé suivant.

Parmi les couples de $\mathbf{R}_j$ *auxquels correspondent les triplets ordonnés d'un même corps abélien*, de degré 3, *il en existe deux, opposés, et deux seulement, qui sont canoniques* (§ I, n^{os} 4 et 7). Je les appelle *couples générateurs du corps*.

J'utilise la deuxième propriété caractéristique indiquée pour un facteur canonique : α et α' entiers; l'un d'eux et par suite l'autre sans facteur rationnel, sans facteur commun avec 3 et sans facteur carré.

Je considère un couple quelconque $\| \beta \quad \beta' \|$, engendrant un triplet ordonné de $\mathbf{R}_0$; dans les expressions canoniques de ses nombres en j et j', je mets en facteur le p. g. c. d. des coefficients;

$$\beta = \frac{m}{d}(aj + a'j') = \frac{m}{d}\alpha, \qquad \beta' = \frac{m}{d}(aj' + a'j) = \frac{m}{d}\alpha',$$

(a, a' entiers rationnels, premiers entre eux). Pour définir le corps je puis

remplacer le couple $\| \beta \quad \beta' \|$ par le couple $\| \alpha \quad \alpha' \|$, car

$$(\alpha^3\alpha') : (\beta^3\beta') = \frac{d^3}{m^3},$$

le nouveau couple est formé de nombres entiers, sans facteur rationnel.

Si l'entier α a un facteur carré, il en est de même de son conjugué :

$$\alpha = \alpha_1\gamma^2, \qquad \alpha' = \alpha'_1\gamma'^2.$$

Je puis alors remplacer

$$| \alpha \quad \alpha' | \quad \text{par} \quad | \alpha_1\gamma' \quad \alpha'_1\gamma |,$$

car

$$(\alpha_1\gamma')^3 (\alpha'_1\gamma) : \alpha^3\alpha' = (1 : \gamma)^3.$$

En effectuant ce remplacement plusieurs fois s'il y a lieu (notamment si γ contenait lui-même un facteur carré), je puis obtenir un couple dont les nombres n'ont plus de facteur carré.

Si l'entier α est divisible par $(j - j')$, facteur de 3 (et non par son carré qui est rationnel), il en est de même de son conjugué

$$\alpha = (j - j')\alpha_0, \qquad \alpha' = (j' - j)\alpha'_0.$$

Je puis alors prendre pour nouveau couple $\| \alpha_0 \quad \alpha'_0 \|$ car

$$(\alpha_0^2\alpha'_0) : (\alpha^3\alpha') = [1 : (j' - j)]^3;$$

et les nombres du nouveau couple sont premiers avec 3.

5. Je puis montrer qu'*il n'y a que deux couples générateurs opposés*, en cherchant la condition pour que deux couples canoniques $\| \alpha_1 \quad \alpha'_1 \|$ et $\| \alpha_2 \quad \alpha'_2 \|$ engendrent le même corps, ou plus exactement des triplets ordonnés d'un même corps. Le quotient

$$(\alpha_1^2\alpha'_1) : (\alpha_2^2\alpha'_2),$$

doit être, dans $\mathbf{R}_j$, une puissance cubique. Je le décompose en un produit de puissances positives et négatives de facteurs premiers. Il faut que chaque facteur figure avec un exposant multiple de 3. Un facteur premier qui divise α_1 ne divise pas α'_1 ; il doit diviser α_2 ; sinon il figurerait dans le quotient, ou bien avec l'exposant 2 s'il ne divise aucun des nombres α_2, α'_2, ou bien avec l'exposant 1 s'il divise α'_2. Le raisonnement corrélatif montre que tout facteur premier de α_2 divise α_1. Il s'ensuit que le quotient de ces deux nombres est un diviseur de 1

$$\alpha_2 = \alpha_1\varepsilon, \qquad \alpha'_2 = \alpha'_1\varepsilon ; \qquad (\varepsilon = \pm 1, \text{ ou } \pm j, \text{ ou } \pm j').$$

Le quotient a pour valeur

$$(\alpha_1^2\alpha'_1) : (\alpha_2^2\alpha'_2) = \varepsilon'^2\varepsilon = \varepsilon',$$

ce n'est une puissance cubique que si $\varepsilon' = \pm 1$; les deux couples sont bien égaux ou opposés.

6. Inversement *un couple canonique* $\| \alpha \quad \alpha' \|$ (α, α' entiers premiers entre eux, sans facteur carré) *est couple générateur d'un corps abélien*, de degré 3, dans lequel il définit un ordre des nombres conjugués des triplets.

Si α est de norme différente de 1, j'utilise la décomposition en facteurs premiers

$$\alpha^2\alpha' = \prod_x \varpi_x^2 \varpi'_x ; \qquad (x \text{ de } 1 \text{ à } h);$$

les $2h$ facteurs premiers ϖ_x, ϖ'_x sont différents, aucun ne figure au cube dans la décomposition du nombre qui n'est donc pas une puissance cubique exacte; le couple engendre donc une équation irréductible et un corps.

Le couple $\| \alpha' \quad \alpha \|$ engendre le même corps, mais avec un ordre différent dans les triplets (déduit par transposition du précédent).

Les couples $\| j \quad j' \|$ ou $\| j' \quad j \|$ [de décomposition de (1)] engendrent aussi un même corps avec des ordres différents des triplets, car le produit $j^2 j' = j$ n'est pas non plus une puissance cubique. Ce corps que je désigne par $\mathbf{R}_{0_4}$, est d'ailleurs défini par les racines de l'équation (obtenue avec une trace nulle)

$$x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{27} = 0.$$

7. Un raisonnement analogue peut aussi être fait pour la détermination d'un corps du second degré dont les éléments sont construits comme il a été dit ci-dessus (§ II, n° 10). *La condition nécessaire et suffisante pour qu'à deux systèmes*

$$d \text{ et } s, \qquad d' \text{ et } s'$$

(de carrés des différences et des traces) *correspondent des nombres d'un même corps est que le quotient* $(d:d')$ *soit le carré d'un nombre rationnel.*

Parmi les nombres rationnels, auxquels correspondent des couples de nombres conjugués d'un même corps, du second degré, *il y a un et un seul nombre entier d* (positif ou négatif), *sans facteur carré.* Les couples de nombres du corps sont exprimés par

$$\left| a + b\sqrt{d} \quad a - b\sqrt{d} \right| ; \qquad (a, b \text{ nombres rationnels}).$$

IV. — Entiers d'un corps abélien.

1. Je rappelle qu'un *entier algébrique* η est une racine d'un polynome $f(x)$, dont les coefficients sont entiers rationnels et dont le terme de plus haut degré a pour coefficient 1. Il suffit que cette condition soit vérifiée pour un polynome quelconque s'annulant pour η, elle est alors également vraie pour le polynome fondamental (irréductible, à coefficients premiers entre eux) du nombre η.

Il en résulte que : les nombres conjugués d'un entier algébrique sont des entiers algébriques; les fonctions symétriques entières à coefficients entiers de ces conjugués sont des entiers rationnels; si un entier algébrique est rationnel, c'est un entier rationnel.

L'ensemble des entiers d'un corps algébrique de degré n est un *anneau* dont les éléments η_i se déduisent par addition et soustraction de n d'entre eux dont le système est appelé une *base des entiers* (définie à une substitution unimodulaire près)

$$\eta = a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + \ldots + a_n\eta_n \qquad (a_i \text{ entiers rationnels}).$$

Le carré du déterminant de la matrice dont les colonnes sont les n conjugués de la base est le *discriminant du corps*. C'est un entier rationnel, indépendant de la base adoptée [dont on démontre qu'il est toujours différent de ± 1].

Je vais étudier la constitution de l'anneau des entiers algébriques d'un corps abélien de degré 3, en distinguant deux cas, suivant que le couple générateur est ou n'est pas *unitaire*; *je donne ce même qualificatif au corps engendré*.

2. Dans un *corps unitaire*, il y a des *bases normales*, c'est-à-dire formées par les trois conjugués d'un entier convenable; l'une d'elles est obtenue en construisant le triplet correspondant au couple générateur (avec une trace convenable). Je précise ces indications par l'énoncé d'une propriété.

Si un corps abélien est unitaire, le triplet de nombres conjugués $\| \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \|$, *construit avec le couple générateur canonique et avec une trace égale à* $+1$ *ou* -1, *suivant que le couple est positif ou négatif, est une base normale des entiers du corps.*

Pour cette raison, je dis que le couple dans $\mathbf{R}_j$ et le triplet dans $\mathbf{R}_0$, définis au signe près, sont *discriminants*; le (nombre) discriminant est d'ailleurs

$$\begin{vmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 \\ \theta_3 & \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}^2 = [(\theta_1+\theta_2+\theta_3)(\theta_1+j\theta_2+j'\theta_3)(\theta_1+j'\theta_2+j\theta_3)]^2.$$

$$= (1 \times \bar{\theta}_1 \times \bar{\theta}'_2)^2 = (\alpha\alpha')^2.$$

C'est le *carré de la norme D du couple discriminant*. Cette norme D est le produit de h nombres premiers différents, congrus à $+1 \pmod 3$, et inversement le carré d'un tel produit D est le discriminant de 2^{h-1} corps unitaires, engendrés par les divers couples unitaires dont D est la norme (§ I, n° 7).

3. Je construis un triplet avec un couple unitaire positif et une trace égale à $+1$ (le changement de signe donnerait un triplet opposé); son polynome fondamental est (formule 4', § II, n° 4)

$$f(x) = x^3 - x^2 - \frac{1}{3}(1-\alpha\alpha')x - \frac{1}{27}[1 - 3\alpha\alpha' + \alpha\alpha'(\alpha+\alpha')].$$

Je calcule les coefficients en exprimant que le couple est unitaire et positif

$$\alpha = 1 + 3\delta, \qquad \alpha' = 1 + 3\delta'; \qquad (\delta, \delta' \text{ entiers conjugués}).$$

Il en résulte

$$-\frac{1}{3}(1 - \alpha\alpha') = (\delta + \delta') + 3\delta\delta' = \text{entier (rationnel)},$$

$$\frac{1}{27}[1 - 3\alpha\alpha' + \alpha\alpha'(\alpha + \alpha')] = \frac{1}{3}(\delta - \delta')^2 + \delta\delta'(\delta + \delta' + 1).$$

Ce dernier terme qui est rationnel est encore un entier car $(\delta - \delta')$ est multiple de $(j - j')$ et son carré est multiple de 3.

4. Les nombres θ_1, θ_2, θ_3 sont indépendants arithmétiquement, sinon il existerait une même relation linéaire, à coefficients entiers (rationnels) entre eux et par suite entre leurs conjugués (obtenus par permutations circulaires) donc entre les termes des colonnes du déterminant constitué ci-dessus; or ceci ne se peut puisque le carré de ce déterminant est $(\alpha\alpha')^2$ qui n'est pas nul.

Je cherche alors la condition pour que le nombre de $\mathbf{R}_\theta$

$$\Im_1 = a\theta_1 + b\theta_2 + c\theta_3 \qquad (a, b, c \text{ nombres rationnels})$$

soit un entier (de $\mathbf{R}_j$). Il en est de même simultanément des trois conjugués et par suite de leur somme

$$\Im_1 + \Im_2 + \Im_3 = a + b + c,$$

qui doit donc être un entier (rationnel).

Il en est aussi de même de la résolvante de Lagrange dans $\mathbf{R}_{\theta, j}$

$$\Im_1 + j\Im_2 + j'\Im_3 = a\overline{\theta}_1 + b\overline{\theta}_2 + c\overline{\theta}_3 = (a + bj' + cj)\,\overline{\theta}_1$$

et de son cube qui est dans $\mathbf{R}_j$

$$(\Im_1 + j\Im_2 + j'\Im_3)^3 = (a + bj' + cj)^3\alpha^2\alpha'.$$

Le nombre

$$a + bj' + cj = (b - a)j' + (c - a)j$$

ne peut être une fraction irréductible, car le cube de son dénominateur devrait diviser $\alpha^2\alpha'$, qui, d'après le choix qui a été fait de α, n'a pas de facteur cubique. Il en résulte que

$$a + b + c, \quad b - a, \quad c - a$$

doivent être des entiers rationnels.

Chaque conjugué du nombre considéré peut alors être mis sous la forme

$$\Im_u = a(\theta_u + \theta_{u+1} + \theta_{u+2}) + (b - a)\,\theta_{u+1} + (c - a)\,\theta_{u+2},$$
$$= a + r_u \qquad (r_u \text{ entiers conjugués de } \mathbf{R}_\theta);$$

leur produit est un polynome en a, dont les coefficients, fonctions symétriques entières des η_{iu} sont des entiers rationnels

$$(a+\eta_1)(a+\eta_2)(a+\eta_3) = a^3 + a^2 e + ae' + e''.$$

Ce produit doit être un entier, *ce qui exige que a et, par suite b et c soient des entiers* (rationnels). Cette condition nécessaire est manifestement suffisante puisque les θ_u sont des entiers (dans $\mathbf{R}_j$); ces θ_u constituent donc bien une base.

5. Parmi les corps ainsi étudiés, les plus simples, qui permettent d'ailleurs d'engendrer tous les autres (§ V) sont ceux dont le discriminant est le carré d'un *nombre premier* (bien entendu congru à $+1$, mod 3).

Je les appelle *corps primaires* (unitaires). En exemples, je donne, pour les premiers d'entre eux (voir le tableau), le discriminant, le couple discriminant unitaire positif, le polynome fondamental du triplet discriminant.

Discriminant : 7^2; couple : $\| -j+2j' \quad -j'+2j \|$; $\alpha+\alpha' = -1$;

$$f(x) = \left(x-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{7}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right) + \frac{7}{27} = x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

Discriminant : 13^2; couple : $\| -j-4j' \quad -j'-4j \|$; $\alpha+\alpha' = +5$;

$$f(x) = \left(x-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{13}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{65}{27} = x^3 - x^2 - 4x - 1.$$

Discriminant : 19^2; couple : $\| 2j+5j' \quad 2j'+5j \|$; $\alpha+\alpha' = -7$;

$$f(x) = \left(x-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{19}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right) + \frac{133}{27} = x^3 - x^2 - 6x + 7.$$

Discriminant : 31^2; couple : $\| -j+5j' \quad -j'+5j \|$; $\alpha+\alpha' = -4$;

$$f(x) = \left(x-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{31}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right) + \frac{124}{27} = x^3 - x^2 - 10x + 8.$$

Discriminant : 37^2; couple : $\| -4j-7j' \quad -4j'-7j \|$; $\alpha+\alpha' = +11$;

$$f(x) = \left(x-\frac{1}{3}\right)^3 - \frac{37}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{407}{27} = x^3 - x^2 - 12x - 11.$$

6. Je passe au cas d'un corps non unitaire; il n'y a plus de base normale et le triplet construit avec le couple générateur n'est plus composé d'entiers. Mais le triple de ce couple, avec une trace nulle, engendre un triplet d'entiers, dont deux d'entre eux constituent, avec 1, une base des entiers du corps. Je précise ces indications par une définition et l'énoncé d'une propriété.

Si un corps abélien n'est pas unitaire, j'appelle couple discriminant le triple du couple générateur, $\| 3\alpha \quad 3\alpha' \|$, *et triplet discriminant le système* $\| \theta_1 \quad \theta_2 \quad \theta_3 \|$, *construit avec ce couple et une trace nulle.*

Deux nombres (quelconques) *de ce triplet constituent, avec* 1,

$$\| 1 \quad \theta_{u+1} \quad \theta_{u+2} \|, \qquad (u \text{ défini mod } 3),$$

une base des entiers du corps.

En conséquence la valeur du discriminant est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \theta_2 & \theta_3 & \theta_1 \\ \theta_3 & \theta_1 & \theta_2 \end{vmatrix}^2 = [(\theta_1 + j\theta_2 + j'\theta_3)(\theta_1 + j'\theta_2 + j\theta_3)]^3 = 9^3(\alpha\alpha')^3;$$

c'est encore le *carré de la norme D du couple discriminant*. Cette norme est le produit de $h-1$ nombres premiers différents, congrus à $+1$. (mod 3) et du nombre 9; inversement le carré d'un tel produit est le discriminant de 2^{h-1} corps non unitaires, engendrés par les divers couples non unitaires dont il est la norme.

Si D est réduit au seul nombre 9 ($h=1$), le couple discriminant, de ce corps appelé $\mathbf{R}_{\theta_1}$, est $\| 3j \quad 3j' \|$, le triplet a pour polynome fondamental (§ III, n° 6)

$$f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

qui peut être obtenu (*voir* ci-après § VII) en formant l'équation en $x = y + \frac{1}{y}$ de l'équation (en y) aux racines 9e de l'unité.

7. *Les nombres* θ_a *sont bien des entiers*, car leur polynome fondamental (formule 4) qui est

$$f(x) = x^3 - 3\alpha\alpha' x - \alpha\alpha'(\alpha + \alpha'),$$

a ses coefficients entiers rationnels.

Tout nombre de $\mathbf{R}_\theta$ peut être mis sous la forme

$$\Im = \frac{a}{3} + \frac{b}{3}\theta_1 + \frac{c}{3}\theta_2, \qquad (a, b, c \in \mathcal{R}).$$

Pour que ce nombre soit entier, il suffit, d'après ce qui vient d'être dit, que a, b, c soient des entiers rationnels, multiples de 3. Je vais montrer que cette condition est nécessaire en établissant des précisions successives sur a, b, c.

Si $\Im$ est entier, il en est de même de ses conjugués et par suite de leur somme (ou trace commune) qui est dans $\mathcal{R}$

$$\Im_1 + \Im_2 + \Im_3 = a.$$

Il en est encore de même de leur résolvante de Lagrange dans $\mathbf{R}_{\theta,j}$ et de son cube qui est dans $\mathcal{R}$

$$\Im_1^3 = (\Im_1 + j\Im_2 + j'\Im_3)^3 = \left(\frac{b}{3}\theta_1 + \frac{c}{3}\theta_2\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\theta_1\right)^3 (bj' + cj)^3,$$
$$= \alpha^2\alpha'(bj' + cj)^3 = \alpha^2\alpha' \times \gamma^3.$$

Le nombre γ (de $\mathbf{R}_j$) ne peut être une fraction irréductible, car le cube de son dénominateur devrait diviser $\alpha^2\alpha'$, qui n'a pas de facteur cubique. J'obtiens ainsi la première précision que a, b, c *doivent être des entiers* (rationnels).

Mais je puis construire les $\Im_i$ au moyen de leur trace a et du couple correspondant de $\mathbf{R}_j$ qui est

$$\Im^2 : \Im' = \left(\gamma \frac{\theta}{3}\right)^2 : \left(\gamma' \frac{\theta'}{3}\right) = (\gamma^2 : \gamma')\,\alpha, \qquad (\gamma'^2 : \gamma)\,\alpha'.$$

Leur polynome fondamental (formule 4) est

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{3}\right)^3 - \frac{\alpha\alpha'\gamma\gamma'}{3}\left(x - \frac{a}{3}\right) - \frac{1}{27}\alpha\alpha'(\alpha\gamma^3 + \alpha'\gamma'^3)$$

et il a pour discriminant

$$-\frac{1}{27}(\alpha\alpha')^2(\alpha\gamma^3 - \alpha'\gamma'^3)^2 = -\frac{1}{27}D.$$

J'effectue alors un calcul de congruences dans $\mathbf{R}_j$, (I, 3-c) suivant les puissances du nombre premier $(j - j')$. Les nombres conjugués γ et γ' sont congrus $\bmod(j - j')$, à un même nombre rationnel e (0 ou ± 1): j'en déduis successivement

$$\gamma \equiv \gamma' \equiv e, \pmod{j - j'}, \qquad \gamma^3 \equiv \gamma'^3 \equiv e^3 \equiv e \pmod 3,$$
$$\alpha\gamma^3 - \alpha'\gamma'^3 \equiv e(j - j') \pmod 3, \qquad D \equiv -3e^2 \pmod{3(j - j')}.$$

Pour que D soit divisible par $27 = -(j - j')^6$, il est nécessaire que e soit congru à 0 $(\bmod j - j')$, donc que les nombres γ et γ' soient divisibles par $(j - j')$. La norme $\gamma\gamma'$ est alors divisible par 3; dans le coefficient de x qui est $\frac{a^2}{3} - \frac{\alpha\alpha'\gamma\gamma'}{3}$, le premier terme doit être aussi entier, de sorte que a^2 et par suite g *doit être divisible par* 3.

Ces précisions montrent que les deux premiers termes (binomes) de $f(x)$ sont à coefficients entiers (rationnels). Il doit en être de même du dernier, ce qui exige

$$\alpha\gamma^3 + \alpha'\gamma'^3 \equiv 0 \qquad \pmod{27 = -(j - j')^6}.$$

j'ai déjà obtenu

$$\gamma = (j - j')\gamma_1, \qquad \gamma' = (j' - j)\gamma'_1;$$

et il reste à exprimer

$$\alpha\gamma_1^3 - \alpha'\gamma_1'^3 \equiv 0 \qquad \pmod{(j - j')^3}.$$

Un calcul analogue au précédent donne

$$\gamma_1 \equiv \gamma'_1 \equiv e_1 \pmod{j - j'}, \qquad \gamma_1^3 \equiv \alpha'\gamma_1'^3 \equiv e_1^3 \equiv e_1 \pmod 3,$$
$$\alpha\gamma_1^3 - \alpha'\gamma_1'^3 \equiv e_1^3(j - j') \pmod 3.$$

Il est par suite nécessaire que e_1 soit divisible par $(j - j')$, donc γ, γ' et par suite *b et c doivent être des multiples de* 3.

8. En résumé : **le discriminant d'un corps abélien du 3e degré est le carré d'un nombre entier D produit de facteurs premiers différents, congrus à $+1$, mod 3 et peut être du facteur 9.**

Réciproquement, **si un nombre entier D est produit de h facteurs, dont l'un peut être égal à 9 et les autres nombres premiers différents, congrus à $+1$, mod 3, son carré D^2 est le discriminant de 2^{h-1} corps abéliens du 3e degré.**

9. Il existe des résultats analogues pour les corps du second degré, déterminés comme il a été dit au n° 7 du paragraphe III.

Un corps défini par un entier d (rationnel, positif ou négatif), *sans facteur carré, congru à* $+1 \pmod 4$, peut encore être appelé *unitaire : ses entiers ont une base normale* (couple discriminant), (de trace $+1$) qui est

$$\left\| \frac{-1+\sqrt{d}}{2} \quad \frac{-1-\sqrt{d}}{2} \right\|$$

le discriminant est d.

Les premiers d'entre eux sont définis par les discriminants et les polynomes

$$\begin{aligned} d &= \quad 5, \quad f(x) = x^2 - x - 1; \\ d &= -\ 3, \quad f(x) = x^2 - x + 1; \\ d &= \quad 13, \quad f(x) = x^2 - x - 3; \\ d &= -\ 7, \quad f(x) = x^2 - x + 2; \end{aligned}$$

ces 4 corps sont non seulement unitaires, mais encore *primaires*, les entiers générateurs (égaux aux discriminants) sont premiers (au signe près).

Les corps *non unitaires sont définis par des entiers d, congrus à* -1 *ou à* $2 \pmod 4$. *Ils ont une base des entiers non normale* (couple discriminant) *qui est* (trace nulle)

$$\| 1 \quad \sqrt{d} \|;$$

le discriminant est $4d$.

Il y a trois corps non unitaires, particulièrement simples, définis par les entiers -1 et ± 2, dont les entiers (algébriques) sont (x, y entiers rationnels)

$$\begin{aligned} & x + yi, && \text{discriminant } -4; \\ & x + y\sqrt{2}, && \text{discriminant } 8; \\ & x + y\sqrt{-2}, && \text{discriminant } -8; \end{aligned}$$

V. — Composition des corps.

1. Il est possible de construire tous les corps abéliens de degré 3, par une *loi de composition* simple, avec les seuls *corps primaires* (§ IV, n° 5) et avec, en plus, le corps $\mathbf{R}_0$ de discriminant 9^2 (qui n'est pas unitaire). Ces constructions peuvent être faites, soit avec des triplets quelconques des corps à composer, soit avec les triplets (ou les couples) discriminants. Je précise d'abord le

premier mode, pour deux corps, *a priori* quelconques; dont je supposerai, seulement en explicitant le deuxième mode, que leurs discriminants sont premiers entre eux.

Je note, par un même indice, sans et avec accent $\mathbf{R}_0$ et $\mathbf{R}_{0'}$, les corps engendrés par deux couples (générateurs ou discriminants) conjugués $\| \alpha \quad \alpha' \|$ et $\| \alpha' \quad \alpha \|$, et qui diffèrent par l'ordre des nombres conjugués dans les triplets. Cette notation, comme celle que j'ai employée pour les résolvantes de Lagrange, rappelle le premier élément du couple ou la conjugaison dans $\mathbf{R}_j$.

Dans deux corps abéliens $\mathbf{R}_\xi$ et $\mathbf{R}_\eta$ d'ordre 3, déterminés et ordonnés, *je considère des triplets quelconques, ordonnés à une permutation circulaire près*,

$$\| \xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3 \|, \qquad \| \eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3 \|,$$

correspondant respectivement aux couples de $\mathbf{R}_j$

$$\| \beta \quad \beta' \|, \qquad \| \gamma \quad \gamma' \|,$$

sans qu'il soit nécessaire de préciser les traces.

Les triplets ordonnés

$$(5) \qquad \begin{cases} \theta_1 = \xi_1\eta_3 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_1 \\ \theta_2 = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 \\ \theta_3 = \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + \xi_3\eta_3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \theta_u = \sum_v (\xi_v \eta_{u-v}); \qquad (u, v, \bmod 3);$$

appartiennent à un même corps abélien $\mathbf{R}_0$, *déterminé et ordonné*, que j'appelle *produit des corps considérés*, et que je note

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_\xi \times \mathbf{R}_\eta, \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{R}_{\xi\eta}.$$

(Ce peut être exceptionnellement des triplets de nombres rationnels égaux.)

2. Pour établir cette propriété et justifier la notation, je forme les résolvantes de Lagrange du triplet ainsi construit.

$$\theta_1 = \theta_1 + j\,\theta_2 + j'\theta_3 = \xi_1\overline{\eta}_3 + \xi_2\overline{\eta}_2 + \xi_3\overline{\eta}_1 = \overline{\xi}_3\overline{\eta}_1 = \overline{\xi}_1\overline{\eta}_3,$$
$$\theta'_1 = \theta_1 + j'\theta_2 + j\,\theta_3 = \xi_1\overline{\eta}'_3 + \xi_2\overline{\eta}'_2 + \xi_3\overline{\eta}'_1 = \overline{\xi}'_3\overline{\eta}'_1 = \overline{\xi}'_1\overline{\eta}'_3.$$

Ces résolvantes vérifient les relations (2) et (2') du paragraphe II

$$\theta_1^3 : \theta'_1 = (\overline{\xi}_3\overline{\eta}_1)^3 : (\overline{\xi}'_3\overline{\eta}'_1) = (\overline{\xi}_3^3 : \overline{\xi}'_3)\,(\overline{\eta}_1^3 : \overline{\eta}'_1) = \beta\gamma,$$
$$\theta'^3_1 : \theta_1^3 = (\overline{\xi}'_3\overline{\eta}'_1)^3 : (\overline{\xi}_3\overline{\eta}_1) = (\overline{\xi}'^3_3 : \overline{\xi}_3)\,(\overline{\eta}'^3_1 : \overline{\eta}_1) = \beta'\gamma', \qquad \theta_1\theta'_1 = \beta\beta'\gamma\gamma'$$

de sorte que le couple correspondant est le *produit* [§ I, n° 6] des couples

$$\| \beta \quad \beta' \| \times \| \gamma \quad \gamma' \| = \| \beta\gamma \quad \beta'\gamma' \|.$$

Si la condition (3) est remplie, c'est-à-dire si $(\beta\gamma)^2(\beta'\gamma')$ n'est pas une puissance cubique exacte, le triplet correspondant est formé des racines d'une équation irréductible.

La trace est le produit des traces

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3=\Sigma\xi_u\eta_v=(\Sigma\xi_u)(\Sigma\eta_v);\qquad (u,\ v,\ \mathrm{mod}\ 3).$$

D'autre part deux triplets ordonnés du corps $\mathbf{R}_\xi$ et deux triplets ordonnés du corps $\mathbf{R}_\eta$ sont définis respectivement par des couples

$$\begin{matrix}\| \beta_1 & \beta'_1 \|, & \| \beta_2 & \beta'_2 \|,\\ \| \gamma_1 & \gamma'_1 \|, & \| \gamma_2 & \gamma'_2 \|,\end{matrix}\qquad \text{tels que}\quad \begin{cases}(\beta_1^2\beta'_1):(\beta_2^2\beta'_2)=\lambda^3,\\ (\gamma_1^2\gamma'_1):(\gamma_2^2\gamma'_2)=\mu^3.\end{cases}$$

La même condition est évidemment remplie par les couples produits

$$[(\beta_1\gamma_1)^2(\beta'_1\gamma'_1)]:[(\beta_2\gamma_2)^2(\beta'_2\gamma'_2)]=(\lambda\mu)^3,$$

de sorte que les triplets correspondants appartiennent au même corps et y ont le même ordre (défini par le couple produit).

3. Si l'ordre est changé dans chacun des corps composants

$$\mathbf{R}_{\xi'}\ \text{ et }\ \mathbf{R}_{\eta'}\qquad \text{définis par } \| \beta' \quad \beta \| \ \text{ et } \ \| \gamma' \quad \gamma \|,$$

le corps produit est composé des mêmes nombres, mais avec un ordre différent dans les triplets

$$\mathbf{R}_{\xi'\eta'}\qquad \text{défini par } \| \beta'\gamma' \quad \beta\gamma \|.$$

Si l'ordre est changé dans un seul des corps composants, le corps produit est différent

$$\mathbf{R}_{\xi\eta'}\ \text{ défini par } \| \beta'\gamma \quad \beta\gamma' \| \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{R}_{\xi'\eta}\ \text{ défini par } \| \beta\gamma' \quad \beta'\gamma \|.$$

En définitive *deux corps ont deux paires de couples produits*

$$\mathbf{R}_{\xi\eta},\ \mathbf{R}_{\xi'\eta'}\qquad \text{et}\qquad \mathbf{R}_{\xi'\eta},\ \mathbf{R}_{\xi\eta'};$$

les corps de chaque paire étant égaux, mais avec des ordres différents dans les triplets.

4. Je caractérise maintenant, de façon plus précise, les corps $\mathbf{R}_\xi$ et $\mathbf{R}_\eta$ par leurs *couples discriminants*, que je désigne encore par $\|\beta \quad \beta'\|$ et $\|\gamma \quad \gamma'\|$ et je suppose que les discriminants $(\beta\beta')^2$ et $(\gamma\gamma')^2$ sont premiers entre eux; ceci implique notamment que au plus l'un des corps n'est pas unitaire.

Si deux corps abéliens, de degré 3, *ont des discriminants premiers entre eux, le corps produit a pour couple discriminant le produit des couples discriminants*

$$\begin{matrix}\| \beta & \beta' \| \ \text{discriminant de } \mathbf{R}_\xi\\ \| \gamma & \gamma' \| \ \text{discriminant de } \mathbf{R}_\eta\end{matrix}\qquad \| \beta\gamma \quad \beta'\gamma' \| \ \text{discriminant de } \mathbf{R}_{\xi\eta}.$$

Il en résulte notamment que le corps produit est ou n'est pas unitaire, suivant que les deux composants sont unitaires ou que l'un d'eux ne l'est pas.

5. Je distingue les deux cas. *Les deux corps composants sont unitaires.* — Les couples discriminants sont canoniques et unitaires, je les choisis positifs et je considère les triplets discriminants correspondants, de traces égales à $+1$. Le couple produit est encore canonique, unitaire et positif (§ I, n° 6). Le triplet calculé par les formules de multiplication (4) correspond à ce couple, en outre sa trace, produit des traces, est égale à $+1$. C'est le triplet discriminant du corps produit, qui est donc unitaire.

Un seulement des corps est unitaire. — Un des couples discriminants est unitaire, et l'autre est triple d'un couple canonique, non unitaire; je puis les supposer définis par

$$\| 3\beta \quad 3\beta' \|, \qquad \| \gamma \quad \gamma' \|, \qquad \begin{cases} \beta \equiv j, & \beta' \equiv j', \\ \gamma \equiv \gamma' \equiv +1, \end{cases} \pmod 3,$$

et je considère les triplets correspondants de traces o et $+1$. Le produit des couples est triple d'un couple canonique non unitaire

$$\| 3\beta\gamma \quad 3\beta'\gamma' \|; \qquad \beta\gamma \equiv j, \qquad \beta'\gamma' \equiv j' \pmod 3.$$

Le triplet calculé par les formules (5) correspond à ce couple; en outre sa trace, produit des traces est nulle. C'est le triplet discriminant du corps produit qui n'est donc pas unitaire.

6. Ce produit, ou cette composition, peut être étendue à un nombre quelconque de corps dont les discriminants sont premiers entre eux deux à deux (de sorte que l'un d'eux, au plus, n'est pas unitaire).

Inversement en rapprochant ce résultat de ce qui a été dit sur la condition pour qu'un nombre D^2 soit discriminant d'un corps abélien d'ordre 3, j'obtiens la propriété.

Tout corps abélien, d'ordre 3, *est le produit de corps primaires*, dont les discriminants sont des carrés de nombres premiers différents, et peut-être du corps $\mathbf{R}_0$ dont le discriminant est 9^2.

Cette décomposition n'est possible que d'une seule façon, à condition toutefois de ne pas distinguer des corps $\mathbf{R}_\xi$, $\mathbf{R}_{\xi'}$ qui ne diffèrent que par l'ordre adopté pour les nombres conjugués de leurs triplets.

Mais *les produits de h corps primaires*, dont 1 au plus n'est pas unitaire, *sont en nombre* 2^{h-1} ; par exemple pour $c = 3$

$$\mathbf{R}_{\xi\eta\zeta}, \qquad \mathbf{R}_{\xi\eta\zeta'}, \qquad \mathbf{R}_{\xi\eta'\zeta}, \qquad \mathbf{R}_{\xi\eta'\zeta'}.$$

On retrouve ainsi *le nombre* 2^{h-1} *de corps de discriminant égal à* D^2, où D a la forme indiquée.

7. Il existe de même une *composition des corps quadratiques :* aux couples

$$\| \xi_1 \quad \xi_2 \|, \qquad (\xi_1 - \xi_2)^2 = a, \qquad \text{du corps } \mathbf{R}_\xi;$$
$$\| \eta_1 \quad \eta_2 \|, \qquad (\eta_1 - \eta_2)^2 = b, \qquad \text{du corps } \mathbf{R}_\eta;$$

je fais correspondre le couple, défini à une transposition près,

$$\theta_1 = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2, \qquad \theta_2 = \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1, \qquad (\theta_1 - \theta_2)^2 = ab.$$

Ce sont des nombres conjugués d'un corps déterminé (produit)

$$\mathbf{R}_\xi \times \mathbf{R}_\eta \quad \text{ou} \quad \mathbf{R}_{\xi\eta}.$$

Si les deux corps ont leurs discriminants premiers entre eux (un seul au plus étant non unitaire), *le discriminant du corps produit est le produit des discriminants.*

Un corps quadratique est ainsi, d'une et d'une seule façon, le produit de corps primaires et unitaires, de discriminants

$$+p \quad (p \equiv +1, \bmod 4); \qquad -q \quad (q \equiv -1, \bmod 4); \qquad (p, q \text{ premiers})$$

et peut être d'un des trois corps (§ 4, n° 8) de discriminants -4, ou $+8$, ou -8. Son discriminant est :

$$D = \Pi p_i \times \Pi(-q_j) \times \begin{cases} 1 \\ -4 \\ \text{ou } +8 \quad \text{ou } -8. \end{cases}$$

VI. — Idéaux d'un corps abélien.

1. Je rappelle sommairement quelques définitions et propriétés de l'arithmétique des idéaux dans un *corps normal* quelconque $\mathbf{R}$, en l'appliquant plus spécialement à un corps abélien $\mathbf{R}_0$ d'ordre 3.

Un idéal $\mathfrak{A}$, *défini par h nombres* ξ_x (de $\mathbf{R}$), *appelés générateurs, est l'ensemble*, désigné par $(\ldots\xi_x\ldots)$, *des nombres*

$$\xi = \sum_x \xi_x \times \text{entier de } \mathbf{R} \qquad (x \text{ de } 1 \text{ à } h).$$

Un générateur peut être remplacé par tout nombre *associé* (produit par un diviseur de 1). Ordinairement un idéal $\mathfrak{A}$ n'est pas nécessairement *principal* (engendré par un seul générateur), on démontre qu'il peut toujours être défini par seulement deux générateurs dont un choisi arbitrairement (dans $\mathfrak{A}$). Un idéal est *entier* si ses générateurs et par suite tous ses nombres sont des entiers (algébriques) de $\mathbf{R}$.

Le *produit de deux idéaux* est l'idéal défini par les produits mutuels des générateurs

$$(\ldots, \xi_x, \ldots) \times (\ldots, \eta_y, \ldots) = (\ldots, \xi_x \eta_y, \ldots) \qquad (x \text{ de } 1 \text{ à } h,\ y \text{ de } 1 \text{ à } k).$$

C'est une opération déterminée (indépendante des systèmes de générateurs), *commutative* et *associative*. L'opération inverse de *division* est possible et déterminée (tout idéal a un inverse).

La *divisibilité des idéaux* (qui remplace celle des facteurs) peut être exprimée par l'une des relations suivantes dont on démontre l'équivalence

$$\mathfrak{M} \text{ multiple de } \mathfrak{D} \quad \rightleftharpoons \quad \mathfrak{M} \subset \mathfrak{D} \quad \rightleftharpoons \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{D} \times \text{idéal entier.}$$

Il existe des *idéaux premiers* (entiers), chacun n'ayant pour diviseur que lui-même et l'idéal (1). Tout idéal est décomposable d'une et d'une seule façon en un produit de puissances (positives et négatives si l'idéal n'est pas entier) d'idéaux premiers.

Suivant un idéal entier, les entiers de $\mathbf{R}$ sont répartis en *classes* (de nombres *congrus* entre eux), dont le nombre est la *norme de l'idéal*. La norme d'un produit d'idéaux est le produit des normes. Les classes forment un *anneau* (relativement à l'addition et à la multiplication de leurs termes); cet anneau est un *corps* si l'idéal est premier, et réciproquement.

Un nombre premier rationnel p, considéré comme *base* (ou générateur unique) d'un idéal principal (p), de $\mathbf{R}$, est décomposable en un produit de h idéaux premiers $\mathfrak{P}_u$, dont la norme commune est une puissance f de p, appelée degré de l'idéal $\mathfrak{P}_u$

$$(p) = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \ldots \times \mathfrak{P}_h, \qquad [N(\mathfrak{P}_u) = p^f;\ hf = \text{degré de } \mathbf{R}].$$

Dans chaque idéal $\mathfrak{P}_u$, p est le p. g. c. d. des entiers rationnels qu'il contient.

Pour un corps abélien de degré 3, il y a ainsi deux espèces de nombres premiers (rationnels), suivant leur décomposition

$$(p) = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{P}_3, \qquad N(\mathfrak{P}_u) = p;$$

et

$$(q) = \mathfrak{Q}, \qquad N(\mathfrak{Q}) = q^3.$$

Les idéaux conjugués, diviseurs de p peuvent être définis par deux générateurs, l'un commun qui est p, les autres respectivement conjugués

$$\mathfrak{P}_u = (p, \omega_u); \qquad (\text{pour } \mathbf{R}_0 \text{: } u \text{ défini mod } 3).$$

2. La décomposition d'un nombre premier (rationnel), ou la recherche des idéaux premiers dans un corps $\mathbf{R}_0$ peut être réalisée d'une première façon, en utilisant le *couple discriminant* $(\alpha \quad \alpha')$ (défini à l'ordre près).

1° *Si un nombre premier p n'est pas diviseur de la racine carrée D du discriminant* (norme du couple discriminant) d'un corps abélien $\mathbf{R}_0$ d'ordre 3, *il n'est divisible que par des idéaux premiers distincts* (à la puissance 1).

Dans ce cas, suivant que la congruence (dans $\mathbf{R}_j$)

$$y^3 - x^2x' \equiv 0 \quad \begin{cases} \pmod p, \text{ si } p \neq 3, \\ \pmod{p^2}, \text{ si } p = 3; \end{cases} \tag{6}$$

est impossible ou possible, (p) *est un idéal premier* (de degré 3), *ou produit de trois idéaux premiers conjugués* (différents, de degré 1).

2° *Si p est diviseur de* D, *il est le cube d'un idéal premier* (du premier degré).

3. La première Partie de 1° peut être établie pour tout corps de nombres algébriques (même non normal). J'en donne, dans le cas considéré, une démonstration directe (par l'absurde) en utilisant le triplet discriminant et ses résolvantes de Lagrange.

Je suppose (p) divisible par le carré $\mathfrak{P}^2$ d'un idéal premier, il est alors produit de trois idéaux conjugués, que je puis définir par deux générateurs, p commun et trois entiers conjugués

$$p = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \mathfrak{P}_3; \qquad \mathfrak{P}_1 = (p, \omega_1), \qquad \mathfrak{P}_2 = (p, \omega_2), \qquad \mathfrak{P}_3 = (p, \omega_3).$$

Deux d'entre eux sont égaux à $\mathfrak{P}$; l'égalité $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_u = \mathfrak{P}_{u+1}$ entraîne l'existence d'entiers ξ_u, $\tau_{|v}$ de $\mathbf{R}_j$, tels que

$$\omega_{u+1} = p\xi_u + \omega_u\tau_u;$$

cette relation entraîne la relation conjuguée (substitution de $u+1$ à u)

$$\omega_{u+2} = p\xi_{u+1} + \omega_{u+1}\tau_{u+1};$$

ce qui exprime l'égalité de $\mathfrak{P}_{u+2}$ et de $\mathfrak{P}_{u+1}$, de sorte que $(p) = \mathfrak{P}^3$.

Suivant cet idéal unique $\mathfrak{P}$ (de norme p), les entiers de $\mathbf{R}_0$ sont répartis en p classes qui peuvent être définies (comme pour $\mathbf{R}_j$, § I, n° 3) par des représentants rationnels (définis mod p). Les entiers θ_u du triplet discriminant appartiennent à une même classe a (rationnel), car si $\theta_1 - a$ est dans l'idéal $\mathfrak{P}$, il en est de même de ses conjugués $\theta_2 - a$ et $\theta_3 - a$. Il en résulte, dans le corps $\mathbf{R}_{0,j}$, les congruences

$$\begin{aligned} \bar\theta_1 &= (\theta_1 - a) + j(\theta_2 - a) + j'(\theta_3 - a) \equiv 0, \\ \bar\theta'_1 &= (\theta_1 - a) + j'(\theta_2 - a) + j(\theta_3 - a) \equiv 0, \end{aligned} \qquad (\bmod \bar{\mathfrak{P}});$$

et, *a fortiori*,

$$D = \alpha\alpha' = \bar\theta_1\bar\theta'_1 \equiv 0, \qquad (\bmod \bar{\mathfrak{P}}).$$

L'idéal $\bar{\mathfrak{P}}$, dans $\mathbf{R}_{0,j}$ (entier, mais non nécessairement premier) est obtenu en multipliant par tous les entiers de $\mathbf{R}_j$ tous les nombres de $\mathfrak{P}$, ce qui ne change

pas l'ensemble de ceux qui sont rationnels, ni leur p. g, c. d. qui est p, lequel divise donc D.

4. *Condition nécessaire de décomposition de p* (ou preuve par l'absurde de la condition suffisante d'impossibilité de la congruence). Je suppose (p) divisible par un idéal $\mathfrak{P}$ du premier degré. Les nombres $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ du triplet discriminant sont respectivement congrus, mod $\mathfrak{P}$, à des entiers rationnels a_1, a_2, a_3; il en résulte la congruence, dans $\mathbf{R}_{\theta_j}$,

$$a_1 + ja_2 + j'a_3 \equiv \theta_1 + j\theta_2 + j'\theta_3, \qquad (\text{mod } \overline{\mathfrak{P}});$$

et, *par élévation au cube*, et tenant compte d'une des relations (2′)

$$(6') \qquad (a_1 + ja_2 + j'a_3)^3 - \alpha^3\alpha' \equiv 0, \qquad (\text{mod } \overline{\mathfrak{P}}).$$

J'ai dit que les nombres de $\overline{\mathfrak{P}}$ sont de la forme

$$\xi \times \delta; \qquad [\xi \in \mathfrak{P}, \ \delta \text{ entier de } \mathbf{R}_j];$$

ceux qui sont dans $\mathbf{R}_j$ sont nécessairement obtenus avec des nombres ξ de $\mathfrak{P}$, également dans $\mathbf{R}_j$ et par conséquent rationnels; ce sont par suite des produits de p par des entiers de $\mathbf{R}_j$. Le premier membre de la congruence (6′) étant dans $\mathbf{R}_j$, elle est donc encore vraie pour le module p; ce qui démontre la possibilité de la congruence (6) de l'énoncé pour tout nombre premier p décomposable (ceci est valable dans le cas de facteurs non distincts).

Dans le cas de $p = 3$, l'élévation au cube permet de remplacer mod $\overline{\mathfrak{P}}$, par mod $\overline{\mathfrak{P}}^2$. En effet l'égalité

$$\overline{\theta}_1 = \gamma + \overline{\xi}, \qquad (\gamma \text{ entier de } \mathbf{R}_j, \qquad \overline{\xi} \in \overline{\mathfrak{P}})$$

entraine, en tenant compte des valeurs des coefficients du binome,

$$\overline{\theta}_1^3 = \gamma^3 + 3\overline{\eta} + \overline{\xi}^3, \qquad [3, \overline{\eta}, \overline{\xi} \in \mathfrak{P}; \qquad 3\overline{\eta} + \overline{\xi}^3 \in \mathfrak{P}^2].$$

Je suppose cette fois, explicitement, 3 non divisible par $\mathfrak{P}^2$, tout entier rationnel, divisible par $\mathfrak{P}^2$, l'est donc aussi par 3^2; un raisonnement analogue au précédent montre que tout entier de $\mathfrak{P}^2$ qui appartient à $\mathbf{R}_j$ est nécessairement divisible par 3^2; il en est ainsi du premier membre de (6′), ce qui établit le deuxième cas de la condition nécessaire de décomposition.

5. *Condition suffisante de décomposition de p.* — Je suppose possible la congruence de l'énoncé; j'appelle encore $\| \theta_1 \theta_2 \theta_3 \|$ le triplet discriminant et $f(x)$ son polynome fondamental. Je vais montrer, en distinguant trois cas, l'existence d'un entier (rationnel) c, annulant $f(x)$, relativement au module p

$$f(x) = (x - \theta_1)(x - \theta_2)(x - \theta_3); \qquad f(c) \equiv 0, \qquad (\text{mod } p).$$

a. Le corps est unitaire et $p \neq 3$; je considère une solution γ de la congruence, γ' l'entier conjugué (dans $\mathbf{R}_j$) et je détermine l'entier rationnel c par les conditions ($s = +1$)

$$\gamma^3 \equiv \alpha^2\alpha'; \qquad \gamma\gamma' \equiv \alpha\alpha'; \qquad 3c \equiv \gamma + \gamma' + 1, \pmod p.$$

Le calcul d'élimination fait ci-dessus (§ II, n° 4 et § IV, n° 3) montre que

$$(7\text{-}a) \qquad 27f(c) = (3c-1)^3 - 3\alpha\alpha'(3c-1) - \alpha\alpha'(\alpha+\alpha') \equiv 0 \pmod p$$

et je puis diviser le premier membre par 27, qui est premier avec p.

b. Le corps est unitaire et $p = 3$. Je détermine cette fois les entiers conjugués γ, γ' de $\mathbf{R}_j$ par les congruences

$$\gamma^3 \equiv \alpha^2\alpha', \qquad \gamma\gamma' \equiv \alpha\alpha', \pmod{81}.$$

Pour le faire, à partir d'une solution γ_1 de la congruence (6), je détermine successivement $\gamma_2 = \gamma_1 + 3x$ et $\gamma = \gamma_2 + 9y$, puis γ' conjugué de γ, par les congruences

$$(\gamma_1 + 3x)^3 - \alpha^2\alpha' \equiv 0 \pmod{27} \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma_1^3 - \alpha^2\alpha'}{9} + x\gamma_1^2 \equiv 0 \pmod 3;$$

$$(\gamma_2 + 9y)^3 - \alpha^2\alpha' \equiv 0 \pmod{81} \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma_2^3 - \alpha^2\alpha'}{27} + y\gamma_2^2 \equiv 0 \pmod 3;$$

elles sont possibles, puisque

$$\alpha^2\alpha' \not\equiv 0, \qquad \gamma_1 \not\equiv 0, \qquad \gamma_2 \equiv \gamma_1 \not\equiv 0, \qquad \gamma \equiv \gamma_2 \not\equiv 0 \pmod 3.$$

Il en résulte

$$\gamma^3 + \gamma'^3 \equiv \alpha\alpha'(\alpha+\alpha'), \pmod{81};$$
$$\gamma + \gamma' \equiv \gamma^3 + \gamma'^3 \equiv \alpha\alpha'(\alpha+\alpha') \equiv -1, \pmod 3.$$

Je détermine l'entier rationnel c par la congruence

$$3c \equiv \gamma + \gamma' + 1, \pmod{81}, \qquad \text{ou} \qquad c \equiv \frac{\gamma + \gamma' + 1}{3}, \pmod{27}.$$

Un calcul analogue au précédent montre que

$$(7\text{-}b) \qquad \begin{aligned} 0 &\equiv (3c-1)^3 - (\gamma+\gamma')^3, \\ &\equiv (3c-1)^3 - 3\alpha\alpha'(3c-1) - \alpha\alpha'(\alpha+\alpha') \equiv 27f(c), \end{aligned} \pmod{81},$$

et je puis supprimer le coefficient 27, en remplaçant le module 81 par 3.

c. Le corps n'est pas unitaire et p est différent de 3, puisqu'il ne divise pas le discriminant. A partir d'une solution γ de la congruence, je détermine cette fois l'entier c par les conditions

$$\gamma^3 \equiv \alpha^2\alpha', \qquad \gamma\gamma' \equiv \alpha\alpha', \qquad c \equiv 3\gamma + 3\gamma', \pmod p.$$

Le calcul d'élimination (§ II, n° 4 et § IV, n° 6) montre que

$$(7\text{-}c) \qquad 0 \equiv c^3 - 3\alpha\alpha' c - \alpha\alpha'(\alpha+\alpha') \equiv f(c), \pmod p$$

6. La congruence ainsi établie dans les trois cas (7-*a*, 7-*b*, 7-*c*) et considérée dans $\mathbf{R}_0$

$$(7) \qquad (c-\theta_1)(c-\theta_2)(c-\theta_3) \equiv 0, \qquad (\mathrm{mod}\ p).$$

montre que l'idéal (p) a, avec au moins l'un des facteurs du premier membre, un diviseur commun, différent de (1)

$$\mathfrak{P}_u = (p, c-\theta_u),$$

et ceci affirme la décomposition de (p). Chacun des idéaux

$$\mathfrak{P}_1 = (p, c-\theta_1), \qquad \mathfrak{P}_2 = (p, c-\theta_2), \qquad \mathfrak{P}_3 = (p, c-\theta_3)$$

est d'ailleurs différent de (1); sinon il existerait une relation

$$\alpha_\nu p + \beta_\nu (c-\theta_\nu) = 1 \qquad (\alpha_\nu, \beta_\nu \text{ entiers de } \mathbf{R}_0),$$

qui, étant vérifiée pour une valeur de ν, devrait l'être aussi pour les deux autres valeurs, de sorte que les trois idéaux seraient égaux à (1), ce qui est absurde.

Les nombres p, $c-\theta_1$, $c-\theta_2$, $c-\theta_3$, sont premiers entre eux; sinon il y aurait dans $\mathbf{R}_{0,j}$ un facteur (idéal) commun à

$$p, \qquad [(\theta_1-c)+j(\theta_2-c)+j'(\theta_3-c)] = \overline{\theta}, \qquad [(\theta_1-c)+j'(\theta_2-c)+j(\theta_3-c)] = \overline{\theta'};$$

et *a fortiori* un facteur commun à

$$p \quad \text{et} \quad \theta\overline{\theta'} = \alpha\alpha';$$

qui sont des nombres premiers entre eux.

Ceci acquis, si (p) n'a pas de diviseur commun avec deux des facteurs c'est-à-dire si

$$(p, c-\theta_u, c-\theta_v) = 1, \qquad \text{pour} \quad u \neq v;$$

les trois idéaux $\mathfrak{P}_u = (p, c-\theta_u)$ sont premiers entre eux deux à deux; donc (p) est divisible par leur produit et l'égalité des normes montre que cette divisibilité est une égalité.

Si l'idéal

$$\mathfrak{P}_u = (p, c-\theta_{u+1}, c-\theta_{u+2})$$

est différent de (1), il en est de même des trois conjugués (définis par les trois valeurs de u). Ces conjugués sont premiers entre eux, donc distincts et (p) est égal à leur produit. Ce deuxième cas présente un caractère exceptionnel, il ne se produit que si p divise les différences $\theta_{u+1}-\theta_{u+2}$ et par suite le discriminant des θ_u [sans diviser celui du corps, c'est-à-dire encore si p divise $\frac{(\alpha-\alpha')^2}{3}$].

7. *Décomposition d'un diviseur du discriminant.* — Je considère enfin un nombre premier p diviseur du discriminant D (du corps); je vais d'abord

montrer, en distinguant encore 3 cas, que le polynome $f(x)$, fondamental du triplet, se réduit, suivant le module p à

$$f(x) \equiv (x-c)^3, \pmod p; \qquad [c \text{ entier rationnel}].$$

a. Le corps est unitaire, p est alors diviseur de $\alpha\alpha'$ et différent de 3, de sorte que

$$27 f(x) \equiv (3x-1)^3 \equiv 27(x-c)^3, \pmod p; \tag{8-a}$$

c désignant l'inverse de 3, (mod p).

b. Le corps n'est pas unitaire et p est différent de 3; il est encore diviseur de $\alpha\alpha'$ et le polynome se réduit à

$$f(x) \equiv x^3 \equiv (x-c)^3, \pmod p. \tag{8-b}$$

c. Le corps n'est pas unitaire et $p = 3$. Tenant compte des coefficients du binome et du théorème de Fermat, le polynome peut être réduit à

$$f(x) \equiv x^3 - \alpha\alpha'(\alpha+\alpha') \equiv (x-c)^3, \pmod 3, \tag{8-c}$$

c étant congru (mod 3) au nombre rationnel $\alpha\alpha'(\alpha+\alpha')$, donc à ± 1.

Dans les trois cas la substitution d'un nombre θ_u du triplet dans le polynome donne la congruence

$$(\theta_u - c)^3 \equiv 0, \pmod p. \tag{8}$$

Tous les facteurs premiers éventuels de (p) sont diviseurs, à la fois, des 3 valeurs de $(\theta_u - c)$, donc de l'idéal

$$\mathfrak{P} = (p, \theta_1 - c, \theta_2 - c, \theta_3 - c),$$

qui est différent de (1). Relativement à cet idéal, pris pour module, les congruences

$$c \equiv \theta_1 \equiv \theta_2 \equiv \theta_3 \pmod{\mathfrak{P}}$$

montrent que tout entier de $\mathbf{R}_0$, qui est de la forme $u\theta_1 + v\theta_2 + w\theta_3$ (u, v, w entiers rationnels) est congru à un entier rationnel, défini mod p. Il y a donc p classes, relativement à $\mathfrak{P}$ qui est par suite un idéal du premier degré, de norme p, et premier. C'est le seul facteur premier de (p) et l'égalité des normes montre que

$$(p) = \mathfrak{P}^3.$$

8. Les conditions ainsi obtenues de décomposition d'un nombre premier rationnel p, dans un corps abélien du troisième ordre, ne font intervenir que le couple discriminant, considéré au module p, ou éventuellement au module 9, près. Cette remarque peut être précisée par l'énoncé suivant :

La qualité d'un nombre premier p d'être un idéal premier, ou un produit de 3 idéaux premiers distincts, ou une puissance cubique d'idéal premier, est la même pour tous les corps abéliens, d'ordre 3, dont les couples discriminants (dans $\mathbf{R}_j$) sont congrus (mod p), si $p \neq 3$, ou modulé p^2, si $p = 3$.

Je complète ci-après (§ VIII) ce premier résultat par une **loi de réciprocité** qui permet d'affirmer que la qualité de décomposition est aussi la même, dans un corps donné, pour tous les nombres premiers congrus entre eux suivant le discriminant, pris pour module.

9. En vue de la recherche des corps dans lesquels un nombre premier donné a une qualité déterminée, je précise les propriétés déjà données (§ I, n° 3) de la répartition en classes, suivant un module premier, dans $\mathbf{R}_j$, en indiquant celles de ces classes qui sont des puissances cubiques.

a. Module : idéal premier (q) *du second degré* ($q \equiv -1 \pmod 3$; $q^2 - 1$ classes premières avec q). Celles des classes qui sont puissances cubiques sont définies par

$$\gamma^{3y}, \pmod q; \qquad \begin{cases} \gamma \text{ racine primitive;} \\ y \text{ défini } \left[\bmod (q-1)\,\frac{q+1}{3}\right]; \end{cases}$$

elles comprennent les $q - 1$ classes à représentant rationnel. Pour que le nombre $\alpha^2\alpha' = N(\alpha)\alpha$ soit congru (mod q) à une puissance cubique, il faut et il suffit qu'il en soit de même de α. Les classes de couples discriminants des corps dans lesquels q est décomposable sont donc définies par

$$\alpha \equiv \gamma^{3y}, \qquad \pmod q;$$

elles sont en nombre $(q-1)\frac{q+1}{3}$.

b. Module : nombre premier p décomposable [$p \equiv +1 \pmod 3$; $(p-1)^2$ classes premières avec p]. — Le groupe de ces classes étant défini par deux générateurs conjugués γ, γ', les couples d'indices de deux nombres conjugués α et α' se déduisent par transposition des exposants

$$\alpha \equiv \gamma^x\gamma'^y, \qquad \alpha' \equiv \gamma^y\gamma'^x, \qquad \pmod p,$$

de sorte que

$$\alpha^2\alpha' \equiv \gamma^{2x+y}\gamma'^{x+2y} \qquad \pmod p.$$

Pour que ce nombre soit puissance cubique, il faut et il suffit que les exposants soient divisibles par 3, ce qui est équivalent à $x \equiv y \pmod 3$. Les classes des couples discriminants des corps dans lesquels p est décomposable peuvent ainsi être définies par

$$\alpha \equiv \gamma^x\gamma'^{x+3z} \qquad \pmod p;$$

Il suffit de donner à x les valeurs de 1 à $p-1$ et à z les valeurs de 1 à $\frac{p-1}{3}$; les classes sont donc en nombre $(p-1)\frac{p-1}{3}$.

c. Module 3. — Je cherche la condition pour que $\alpha^2\alpha'$ soit congru à une puissance cubique (mod 9). En y ajoutant la condition que le corps doit être unitaire c'est-à-dire $\alpha \equiv \alpha' \equiv +1 \pmod 3$, j'obtiens les seules classes $\alpha \equiv \alpha' \equiv +1 \pmod 9$.

10. Les conditions de décomposition d'un nombre premier, en idéaux premiers, dans un corps quadratique sont bien connues et se rattachent à l'étude des congruences du second degré. Elles peuvent être exprimées par un énoncé analogue à celui qui a été donné ci-dessus pour les corps abéliens du troisième degré et qui pourrait être établi de la même façon :

Dans un corps quadratique :

1° *Si un nombre premier p n'est pas diviseur du discriminant D il n'est divisible que par des idéaux premiers distincts; dans ce cas, suivant que la congruence* (dans $\mathcal{R}$)

$$y^2 - D \equiv 0 \quad \begin{cases} \pmod p, \text{ si } p \neq 2; \\ \pmod{p^2}, \text{ si } p = 2 \end{cases}$$

est impossible, ou possible, p est un idéal premier (de degré 2) *ou il est décomposable en un produit de 2 idéaux premiers* (conjugués) *distincts.*

2° *Si p est diviseur de D, il est le carré d'un idéal premier, du premier degré* (égal à son conjugué).

Cet énoncé met en lumière le rôle spécial de 2 pour les corps quadratiques, analogue au rôle spécial de 3 pour les corps abéliens du troisième degré. Il en résulte encore la remarque :

La qualité d'un nombre premier, d'être un idéal premier, ou un produit de deux idéaux premiers distincts, ou le carré d'un idéal premier, *est la même pour tous les corps quadratiques, dont les discriminants sont congrus, mod* D *si p est impair, ou mod* p^2 *si* $p = 2$.

VII. — Sous-corps des corps circulaires.

1. J'ai construit jusqu'ici un corps abélien par une opération algébrique nouvelle, dans le corps $\mathbf{R}_j$, en l'espèce la racine cubique d'un nombre $\alpha^2\alpha'$. Je vais maintenant le constituer par un choix convenable d'éléments dans un corps supposé connu, en l'espèce un corps circulaire (de racines convenables de l'unité). Je précise cette indication par un énoncé général.

Un corps abélien $\mathbf{R}_\theta$, d'ordre 3, *de discriminant* D^2, [D produit de nombres premiers différents, congrus à $+1 \pmod 3$ et éventuellement d'un facteur 9], *est sous-corps du corps circulaire* $\mathbf{R}_{(D)}$, *des racines d'indice* D *de l'unité*, de degré $\varphi(D) = N$.

Son triplet discriminant est constitué, au signe près, *par* 3 *sommes de racines primitives*, réparties par un groupe quotient $\mathbf{G}_S \mid \mathbf{G}_s$ d'ordre 3, du groupe de Galois $\mathbf{G}_S$ de $\mathbf{R}_D$

$$(9) \qquad \theta_1 = \sum_x \varepsilon_D.(s_x), \qquad \theta_2 = \sum_x \varepsilon_D.(\sigma \times s_x), \qquad \theta_3 = \sum_x \varepsilon_D.(\sigma^2 \times s_x),$$

ε_D racine primitive d'indice D de l'unité; $\mathbf{G}_S$ groupe de Galois de $\mathbf{R}_D$; $\mathbf{G}_s$ sous-groupe d'index 3 [*voir* ci-après § VIII, n° 2] de substitutions s_x; (σ), (σ^2), $(\sigma^3) = 1$, substitutions des classes de $\mathbf{G}_S \mid \mathbf{G}_s$.

Le choix d'un ordre [(σ), (σ^2), (σ^3) ou (σ^2), $(\sigma^4) = (\sigma)$, $(\sigma^6) = 1$] dans le groupe quotient détermine un ordre, à une permutation circulaire près, des nombres dans les triplets du corps $\mathbf{R}_\theta$.

Les trois sommes (appelées aussi *périodes de Gauss*) sont respectivement invariantes pour $\mathbf{G}_s$ et permutées circulairement par $\mathbf{G}_S$. Je vais établir la propriété d'abord pour des *corps primaires* (D premier, ou égal à 9); je l'étendrai ensuite au cas général, en utilisant l'opération de composition ou de multiplication des corps (§ V).

2. Pour *le corps* $\mathbf{R}_{\theta_0}$, *de couple discriminant* $\mid 3j \quad 3j' \mid$ la propriété a déjà été signalée (§ IV, n° 6). Les nombres du triplet discriminant sont donnés par les sommes

$$\theta_1 = \varepsilon + \varepsilon^{-1}, \qquad \theta_2 = \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \qquad \theta_3 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4},$$

où ε est une racine (quelconque) du polynome

$$\theta_2(x) = x^6 + x^3 + 1.$$

Les racines de ce polynome sont les *racines primitives* $9^{\text{èmes}}$ *de l'unité* et définissent le corps $\mathbf{R}_{(9)}$; le groupe de ce corps est cyclique et isomorphe au groupe multiplicatif des 6 classes (mod 9), premières avec 9. Ses substitutions peuvent être définies par

$$\varepsilon.(S_X) = \varepsilon^{2^X}; \qquad [2^X, \pmod 9; \quad X, \pmod 6].$$

Le sous-groupe $\mathbf{G}_s$, d'index 3 et d'ordre 2 est formé des substitutions, puissance cubiques

$$(S_3) = (s_1), \quad (S_6) = (s_2) = 1; \qquad [\varepsilon.(s_1) = \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon.(s_2) = \varepsilon];$$

les trois classes du groupe quotient $\mathbf{G}_S \mid \mathbf{G}_s$ sont

$$(S_3), \quad (S_6) = 1; \qquad (S_2), \quad (S_5); \qquad (S_4), \quad (S_1).$$

Leur ordre entraîne celui des θ_u et par suite celui des nombres de tout triplet de $\mathbf{R}_{\theta_u}$, à une permutation circulaire près. Elle entraîne par suite l'ordre du couple discriminant qui peut être calculé directement en formant les carrés des résolvantes

$$\begin{aligned}\overline{\theta}^2 &= [\varepsilon+\varepsilon^{-1}+j(\varepsilon^2+\varepsilon^{-2})+j'(\varepsilon^4+\varepsilon^{-4})]^2\\ &= 3[\varepsilon^2+\varepsilon^{-2}+j'(\varepsilon^4+\varepsilon^{-4})+j(\varepsilon+\varepsilon^{-1})] = 3j'\overline{\theta}';\end{aligned}$$

$$\overline{\theta}^2 : \overline{\theta}' = 3j'; \qquad \overline{\theta}'^2 : \overline{\theta} = 3j.$$

3. Pour constituer un *corps primaire* (unitaire) de discriminant P^2, carré d'un nombre premier P, congru à $+1 \pmod 3$, je considère le corps $\mathbf{R}_{(P)}$ des racines, d'indice P, de l'unité, d'ordre $N = P-1$. Son groupe $\mathbf{G}_s$ est cyclique et isomorphe au groupe multiplicatif des classes (mod P) premières avec P, engendré par une classe primitive g; ses substitutions peuvent être définies par

$$\varepsilon.(S_X) = \varepsilon^{g^X} \qquad [g^X, \text{ mod } P; \quad X, \text{ mod } N].$$

Le nombre N est, par hypothèse, divisible par 3, le groupe $\mathbf{G}_s$ a un et un seul sous-groupe (d'index 3 et d'ordre $N:3$), constitué par les substitutions qui sont puissances cubiques $(s_x) = (S_{3x})$. Je désigne par (σ), (σ^2), $(\sigma^3) = 1$ des représentants des classes du groupe quotient $\mathbf{G}_s \,|\, \mathbf{G}_s$, de sorte que

$$\varepsilon.(s_x) = \varepsilon^{g^{3x}}, \qquad \varepsilon.(\sigma \times s_x) = \varepsilon^{g^{3x'+1}}, \qquad \varepsilon.(\sigma^2 \times s_x) = \varepsilon^{g^{3x''+2}}.$$

Je forme les sommes des formules (9) de l'énoncé général, puis leurs résolvantes de Lagrange, qui, *a priori*, sont dans le corps $\mathbf{R}_{(P),j} = \mathbf{R}_{3P}$

$$\overline{\theta} = \sum_x \{\varepsilon.(s_x) + j\,[\varepsilon.(\sigma \times s_x)] + j'[\varepsilon.(\sigma^2 \times s_x)]\},$$

$$\overline{\theta}' = \sum_x \{\varepsilon.(s_x) + j'[\varepsilon.(\sigma \times s_x)] + j\,[\varepsilon.(\sigma^2 \times s_x)]\}.$$

Une substitution quelconque (s_x) de $\mathbf{G}_s$ les laissent invariantes, une substitution (σ) ou (σ^2) les multiplie par j ou j' (ou encore change l'indice des résolvantes)

$$\overline{\theta}.(s_x) = \overline{\theta}, \qquad \overline{\theta}.(\sigma \times s_x) = j'\overline{\theta}, \qquad \overline{\theta}.(\sigma^2 \times s_x) = j\overline{\theta},$$

$$\overline{\theta}'.(s_x) = \overline{\theta}', \qquad \overline{\theta}'.(\sigma \times s_x) = j\overline{\theta}', \qquad \overline{\theta}'.(\sigma^2 \times s_x) = j'\overline{\theta}'.$$

Le raisonnement déjà fait (§ II, n° 5) montre que les quotients

$$\overline{\theta}^2 : \overline{\theta}' = \alpha, \qquad \overline{\theta}'^2 : \overline{\theta} = \alpha',$$

qui sont invariables pour toute substitution $(S) = (\sigma^u \times s_x)$, du groupe $\mathbf{G}_s\,[$du corps $\mathbf{R}_{(P)}]$, ont leurs valeurs dans $\mathbf{R}_j$ et y sont conjugués, puisqu'elles sont transposées par transposition de j et j'. Reste à préciser la valeur du couple $\|\alpha \quad \alpha'\|$.

4. *Norme du couple.* — La norme du couple est le produit des résolvantes [relation (2′)]

$$\alpha\alpha' = \overline{\theta}\overline{\theta}' = (\theta_1 + j\theta_2 + j'\theta_3)(\theta_1 + j'\theta_2 + j\theta_3) = (\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2) - (\theta_2\theta_3 + \theta_3\theta_1 + \theta_1\theta_2).$$

Chaque parenthèse est invariante pour toute substitution de $\mathbf{G}_S$, sa valeur est par suite rationnelle. D'autre part c'est une expression linéaire de racines primitives ε^{s^τ}; chacune renferme donc éventuellement un certain nombre de termes $+1$ et le même nombre de fois chacune des racines primitives. Cette remarque en permet le calcul par énumération.

Dans chaque θ_u, les racines ε peuvent être réparties par couples d'inverses correspondant aux substitutions

$$(S_X) \text{ définie par } g^X; \quad (S_X \times s_{N:6}), \text{ définie par } g^{X+3(N:6)};$$

puisque

$$g^{X+3(N:6)} \equiv (g^X)(g^{N:2}) \equiv -g^X \pmod{P}.$$

Dans chaque carré θ_u^2, il y a donc $(N:3)$ termes $+1$; dans la première parenthèse, il y en a N; les autres termes, en nombre

$$3(N:3)^2 - N = \frac{N^2}{3} - N = N\left(\frac{N}{3} - 1\right),$$

sont des racines primitives et chacune d'elles est répétée $\left(\frac{N}{3} - 1\right)$ fois. La somme de ces racines étant -1, la valeur de cette première parenthèse est

$$(+1)N + (-1)\left(\frac{N}{3} - 1\right) = \frac{2N}{3} + 1.$$

Dans chaque produit $\theta_u\theta_{u+1}$, il n'y a que des produits de racines non inverses, tous les termes sont donc des racines primitives, leur nombre total est $3\left(\frac{N}{3}\right)^2 = \frac{N}{3}N$, de sorte que chacune d'elles est répétée $\frac{N}{3}$ fois. La somme des deux parenthèses, qui est la norme cherchée, est

$$\alpha\alpha' = \frac{2N}{3} + 1 - \left(\frac{N}{3}\right)(-1) = N + 1 = P.$$

5. *Le couple est formé d'entiers.* — La norme ainsi calculée étant un entier, il suffit de prouver que la trace est aussi un entier. La valeur de cette trace est

$$\alpha + \alpha' = (\overline{0}^2 : \overline{0}') + (\overline{0}'^2 : \overline{0}) = (\overline{0}^3 + \overline{0}'^3) : \overline{0}\overline{0}' = (\overline{0}^3 + \overline{0}'^3) : P.$$

La dernière parenthèse dont la valeur est, *a priori*, dans $\mathbf{R}_{(3P)}$ est invariante pour toute substitution (S_X) et pour la transposition de j et j'; c'est donc un nombre rationnel (dans $\mathcal{R}$) qui, d'après sa construction (fonction entière d'entiers algébriques), est entier. Il suffit d'établir qu'il est divisible par P.

Or je puis écrire l'expression de $\overline{\theta}$

$$\overline{\theta}=\theta-\frac{N}{3}(1+j+j')=\left[\left(\theta_1-\frac{N}{3}\right)+j\left(\theta_2-\frac{N}{3}\right)+j'\left(\theta_3-\frac{N}{3}\right)\right]$$
$$=\sum_x[\varepsilon.(s_x)-1]+j\sum_x[\varepsilon.(\sigma\times s_x)-1]+j'\sum_x[\varepsilon.(\sigma^2\times s_x)-1].$$

Chaque crochet des sommes est, dans $\mathbf{R}_{(P)}$, divisible par le nombre (ou l'idéal) $\varepsilon-1$ car

$$\varepsilon.(S_X)-1=\varepsilon^{X'}-1=(\varepsilon-1)(\varepsilon^{X'-1}+\varepsilon^{X'-2}+\ldots+1).$$

Cette divisibilité subsiste dans $\mathbf{R}_{(3P)}$ et s'étend à la somme $\overline{\theta}$; elle est aussi vraie pour $\overline{\theta}'$ et par suite pour la parenthèse. Puisque cette parenthèse est rationnelle, sa divisibilité par $\varepsilon-1$ entraîne sa divisibilité par la norme de ce nombre qui est P. Le couple est donc *canonique* (§ I, n° 4).

6. *Le triplet est discriminant.* — Je fais un calcul de congruences (mod 3) dans le corps $\mathbf{R}_{(3P)}$. Je puis supprimer les coefficients multiples de 3 et remplacer par 1 les cubes de j et j'

$$\overline{\theta}^3\equiv\sum_X[\varepsilon.(S_X)]^3, \qquad (\text{mod } 3).$$

Mais les cubes des N racines primitives sont égaux, à l'ordre près, à ces racines elles-mêmes, de sorte que

$$\overline{\theta}^3\equiv\overline{\theta}'^3\equiv\sum_X\varepsilon.(S_X)\equiv-1;\quad\begin{cases}\alpha\equiv P\alpha\equiv\alpha^2\alpha'\equiv\overline{\theta}^3\equiv-1,\\ \alpha'\equiv P\alpha'\equiv\alpha'^2\alpha\equiv\overline{\theta}'^3\equiv-1.\end{cases}\qquad(\text{mod } 3).$$

D'autre part la trace du triplet est égale à la somme des racines primitives, donc à -1. Les 3 sommes ou périodes construites sont donc les nombres du triplet discriminant (de trace -1) du corps unitaire (et primaire) de discriminant P^2.

7. Le raisonnement montre que le choix d'*un ordre des substitutions du groupe quotient*

$$(\sigma),\quad(\sigma^2),\quad(\sigma^3)=1 \qquad \text{ou} \qquad (\sigma^2),\quad(\sigma^4)=(\sigma),\quad(\sigma^6)=1;$$

détermine un ordre des nombres du triplet et, par suite, de tous les triplets du corps, à une permutation circulaire près.

Toutefois la démonstration ne précise pas la détermination de cet ordre. La recherche directe faite dans le cas du corps $\mathbf{R}_{0_6}$ (n° 2) pourrait être reprise dans le cas général, elle pourrait toutefois conduire à de longs calculs; il semble préférable de se borner à un calcul de congruences en utilisant des monomes en $\overline{\theta}$ et $\overline{\theta}'$ (§ II, n° 7).

Je puis déterminer l'ordre du groupe quotient par le choix d'une classe primitive g, (mod P), et de (σ) par

$$\varepsilon.(\sigma) = \varepsilon^{g}.$$

Cette classe g n'est ainsi définie qu'au produit près par une puissance cubique [g peut être remplacé par g^{3x-1}, ce qui substitue à (σ) une substitution $(\sigma \times s_x)$, de même classe par rapport au sous-groupe $\mathbf{G}_s$]. Je changerais l'ordre du groupe quotient en remplaçant g par g^2 (ou plus généralement par g^{3x+2}).

Ceci acquis, je choisis un nombre premier p, différent de 3 et de P, et non congru à une puissance cubique (de g) (mod P)

$$p \equiv g^{3x+\nu} \pmod{P}; \qquad [\nu \equiv 1 \text{ ou } 2, \pmod 3].$$

Il existe de tels nombres p, d'après le théorème de la progression arithmétique, il est possible d'en démontrer aussi l'existence par un raisonnement direct (§ I, n° 2).

Il en résulte

$$\varepsilon^{p} = \varepsilon^{g^{3x+\nu}} = \varepsilon.(\sigma^{\nu} \times s_x).$$

Je calcule, suivant le module p, la puissance p de θ_u; en tenant compte de la divisibilité par p des coefficients du binome

$$\theta_u^p = \left[\sum_x \varepsilon.(\sigma^u \times s_x)\right]^p \equiv \sum_x [\varepsilon.(\sigma^u \times s_x)]^p \equiv \sum_x [\varepsilon.(\sigma^{u+\nu} s_{x^\nu})] \equiv \theta_{u+\nu}, \qquad \pmod p.$$

J'en déduis la puissance p de la résolvante $\bar\theta$, en distinguant la classe de p, suivant le module 3

$$p \equiv +1, \pmod 3: \quad j^p = j, \quad \begin{cases} \bar\theta^p \equiv \theta_1^p + j\theta_2^p + j'\theta_3^p, \\ \equiv \bar\theta.(\sigma^\nu) \equiv j'^{\nu}\bar\theta, \end{cases} \pmod p$$

$$p \equiv -1, \pmod 3: \quad j^p = j', \quad \begin{cases} \bar\theta^p \equiv \theta_1^p + j'\theta_2^p + j\theta_3^p, \\ \equiv \bar\theta'.(\sigma^\nu) \equiv j^{\nu}\bar\theta'. \end{cases} \pmod p.$$

La puissance de $\bar\theta'$ s'obtient en transposant j et j'.

J'utilise alors un monome simple dont la valeur est dans $\mathbf{R}_j$, il permet de calculer la classe (mod p), du monome en α, α' qui lui est égal.

$$p \equiv +1, \pmod 3; \qquad \bar\theta^p \bar\theta' = \alpha^{\frac{2p+1}{3}} \alpha'^{\frac{p-2}{3}} \equiv j'^{\nu}\bar\theta\,\bar\theta' = j'^{\nu}\alpha\alpha'; \qquad \pmod p.$$

$$p \equiv -1, \pmod 3; \qquad \bar\theta^p \bar\theta'^{-1} = \alpha^{\frac{2p-1}{3}} \alpha'^{\frac{p-5}{3}} \equiv j^{\nu}\bar\theta'\bar\theta'^{-1} = j^{\nu}.$$

J'en conclus (en rappelant le choix de p) :

$$p \equiv g^{\nu}, \pmod P; \quad \begin{cases} p \equiv +1, \pmod 3; & (\alpha^2\alpha')^{\frac{p-1}{3}} \equiv j'^{\nu}; \\ p \equiv -1, \pmod 3; & (\alpha^2\alpha')^{\frac{p-2}{3}} \alpha \equiv j^{\nu}. \end{cases} \pmod p.$$

Ces congruences (où ε est 1 ou 2) permettent de déterminer celui des ordres $\|\alpha\ \alpha'\|$ ou $\|\alpha'\ \alpha\|$ du couple discriminant qui correspond au choix fait de l'ordre du groupe-quotient, par $\varepsilon.\sigma = \varepsilon^{\sigma}$.

8. Je vais démontrer le cas général par récurrence sur la construction des corps, d'une part par le produit des corps abéliens déjà étudié (§ V), d'autre part par la composition des corps circulaires, dont je rappelle sommairement les propriétés.

Je considère deux corps circulaires des racines de l'unité d'indices A et B, de groupes $\mathbf{G}_S$ et $\mathbf{G}_T$. Je suppose A et B *racines carrées de discriminants de corps abéliens et premiers entre eux.*

Je désigne les racines primitives de ces corps respectivement par

$$\begin{aligned} &\varepsilon_A.(S_X), \text{ en nombre } \varphi(A) = M, && [(S_X) \text{ substitutions de } \mathbf{G}_S|;\\ &\varepsilon_B.(T_Y), \quad \text{»} \quad \varphi(B) = N, && [(T_Y) \quad \text{»} \quad \mathbf{G}_T|. \end{aligned}$$

Les groupes $\mathbf{G}_S$ et $\mathbf{G}_T$ sont abéliens, mais non nécessairement cycliques ; leurs ordres M et N, en raison de l'hypothèse faite sur A et B, sont divisibles par 3.

Les produits

$$\varepsilon_A.(S_X) \times \varepsilon_B.(T_Y) \quad \text{ou} \quad \varepsilon_A\varepsilon_B.(S_X \times T_Y)$$

sont les racines primitives de l'unité, d'indice AB, en nombre

$$MN = \varphi(A) \times \varphi(B) = \varphi(AB).$$

Le groupe $\mathbf{G}_{S,T}$ de leur corps $\mathbf{R}_{AB}$ est le *produit direct* des groupes des corps considérés ; il est formé des substitutions

$$(S_X), \quad (T_Y) \quad \text{ou} \quad (S_X T_Y);$$

définies par la loi de composition

$$\|(S_X)\ \ (T_Y)\| \times \|(S_{X'})\ \ (T_{Y'})\| = \|(S_X \times S_{X'})\ \ (T_Y \times T_{Y'})\|.$$

Cette composition des corps et des groupes s'étend à un nombre quelconque de composants et, inversement, un corps circulaire de racines de l'unité, d'indice D, peut être obtenu en composant les corps circulaires dont les racines ont pour indices les diviseurs, premiers entre eux, de D ; en l'espèce, des nombres premiers P congrus à $+1 \pmod 3$ et peut être un facteur 9.

9. Je vais alors établir la propriété de récurrence :

Si deux corps abéliens, d'ordre 3, $\mathbf{R}_\xi$ et $\mathbf{R}_\eta$, *de discriminants* A^2 *et* B^2, *premiers entre eux*, et à triplets ordonnés, *sont sous-corps des corps circulaires* $\mathbf{R}_{(A)}$ et $\mathbf{R}_{(B)}$, déterminés par des groupes quotients ordonnés :

$$\begin{aligned} &\mathbf{R}_\xi, \text{ défini par } \mathbf{G}_S|\mathbf{G}_{S'}, && \text{dans } \mathbf{R}_{(A)} \text{ (de groupe } \mathbf{G}_S);\\ &\mathbf{R}_{\eta'} \text{ défini par } \mathbf{G}_T|\mathbf{G}_{T'}, && \text{dans } \mathbf{R}_{(B)} \text{ (de groupe } \mathbf{G}_T); \end{aligned}$$

le produit des corps $\mathbf{R}_\xi\mathbf{R}_\eta$ *est sous-corps de* $\mathbf{R}_{(AB)}$; son triplet discriminant est donné par les formules (5), avec une répartition par un sous-groupe $\mathbf{G}_\omega$ (d'index 3 de $\mathbf{G}_{S,T}$) et un ordre déterminé par celui du groupe-quotient $\mathbf{G}_{S,T}|\mathbf{G}_\omega$.

L'isomorphisme des groupes $\mathbf{G}_S|\mathbf{G}_s$ et $\mathbf{G}_T|\mathbf{G}_t$ étant déterminé par leur ordre, le sous-groupe $\mathbf{G}_\omega$, est caractérisé par son invariance pour cet isomorphisme et le sous-groupe quotient $\mathbf{G}_{S,T}|\mathbf{G}_\omega$ est ordonné par son isomorphisme à ces deux groupes-quotients composants.

Je suppose les sous-groupes-quotients ordonnés constitués par les classes

$$\mathbf{G}_s,\quad (\sigma)\times\mathbf{G}_s,\quad (\sigma^2)\times\mathbf{G}_s;\qquad \mathbf{G}_t,\quad (\tau)\times\mathbf{G}_t,\quad (\tau^2)\times\mathbf{G}_t.$$

Le sous-groupe $\mathbf{G}_\omega$, défini comme il vient d'être dit, est formé du produit direct $\mathbf{G}_s\times\mathbf{G}_t$, complété par les substitutions

$$(\sigma\times\tau^{-1})\times(\mathbf{G}_s\times\mathbf{G}_t)=(\sigma\times\tau^2)\times(\mathbf{G}_s\times\mathbf{G}_t);\qquad (\sigma^{-1}\times\tau)\times(\mathbf{G}_s\times\mathbf{G}_t)=(\sigma^2\times\tau)\times(\mathbf{G}_s\times\mathbf{G}_t).$$

Les classes du groupe-quotient $\mathbf{G}_{S,T}|\mathbf{G}_\omega$ peuvent être notées

$$(w_z)=(\sigma\times\tau^{-1})^u\times(s_x\times t_y);\qquad (\sigma\times w_z)=(\tau\times w_{z'});\qquad (\sigma^2\times w_z)=(\tau^2\times w_{z'});$$

$$\left(u \text{ de } 1 \text{ à } 3;\ x \text{ de } 1 \text{ à } \frac{M}{3};\ y \text{ de } 1 \text{ à } \frac{N}{3};\ z \text{ ou } z' \text{ de } 1 \text{ à } \frac{MN}{3}\right).$$

10. Les triplets discriminants de $\mathbf{R}_\xi$ et $\mathbf{R}_\eta$ sont, par hypothèse, définis respectivement par les sommes [u défini (mod 3)];

$$\xi_{u+1}=\sum_x[\varepsilon_A\cdot(\sigma^u\times s_x)],\qquad \eta_{u+1}=\sum_y[\varepsilon_B\cdot(\tau^u\times t_y)].$$

Je forme le produit des corps ordonnés par le choix de (σ) et (τ); son triplet discriminant a pour nombres (§ V, n° 1)

$$\Im_u=\xi_1\eta_{u-1}+\xi_2\eta_{u-2}+\xi_3\eta_{u-3}=\left\{\begin{array}{l}\Sigma[\varepsilon_A\cdot(s_x)]\,[\varepsilon_B\cdot(\tau^{u-1}\times t_y)]\\ +\Sigma[\varepsilon_A\cdot(\sigma\times s_x)]\,[\varepsilon_B\cdot(\tau^u\times t_y)]\\ +\Sigma[\varepsilon_A\cdot(\sigma^2\times s_x)]\,[\varepsilon_B\cdot(\tau^{u-1}\times t_y)].\end{array}\right.$$

Les nombres des 3 sommes sont déduits de la racine primitive $\varepsilon_A\varepsilon_B$ par les substitutions

$$\begin{aligned}&[(\tau^{u+1}\times s_x\times t_y),\quad (\tau^u\times\sigma\times s_x\times t_y),\quad (\tau^{u-1}\times\sigma^2 s_x t_y)]\\ &\quad=(\tau^{u+1})\times[(s_x\times t_y),\quad (\sigma\times\tau^{-1}\times s_x\times t_y),\quad (\sigma^2\times\tau\times s_x\times t_y)]=(\tau^{u+1}\times w_z);\end{aligned}$$

qui sont celles de la classe d'indice $u+2$ du groupe-quotient $\mathbf{G}_{S,T}|\mathbf{G}_\omega$. La somme qui constitue $\Im_u$ est donc l'une des sommes données par les formules (9) dans le corps circulaire $\mathbf{R}_{(AB)}$; de façon précise

$$\Im_u=\theta_{u+2};\qquad (u \text{ défini mod } 3).$$

11. J'ai ainsi démontré la propriété de récurrence; il est visible qu'un changement d'ordre dans un seul des sous-groupes-quotients change le corps produit, tandis qu'un changement d'ordre simultané dans les deux composants ne change que l'ordre des triplets du produit.

Cette propriété de récurrence appliquée de proche en proche montre qu'un produit d'un nombre quelconque de corps abéliens primaires dont les discriminants sont différents et ont pour produit D^2 peut être construit en répartissant les racines primitives de l'unité, d'indice D, suivant les classes d'un groupe-quotient convenable d'ordre 3, et réciproquement.

Le corps des racines de l'unité, d'indice D, a ainsi 2^{h-1} *sous-corps abéliens*, d'ordre 3, h étant le nombre des facteurs premiers de D.

12. Les corps quadratiques sont aussi sous-corps de corps circulaires; ceci est précisé par l'énoncé suivant (dont la vérification est plus immédiate que dans le cas des corps du troisième ordre) :

Un corps quadratique de discriminant D (constitué comme il est dit § V, n° 5) *est sous-corps du corps circulaire* $\mathbf{R}_D$ *des racines d'indice* $|D|$ *de l'unité* [de degré $\varphi(|D|)$].

Son couple discriminant (§ IV, n° 8) est constitué par deux sommes de racines primitives réparties par un groupe quotient $\mathbf{G}_s|\mathbf{G}_s$ d'ordre 2, du groupe de Galois $\mathbf{G}_s$ de $\mathbf{R}_D$

$$\theta_1=\sum_x \varepsilon_D\cdot(s_x); \qquad \theta_2=\sum_x \varepsilon_D\cdot(\sigma\times s_x).$$

(mêmes notations qu'au n° 1 du paragraphe VII; $\sigma^2=1$).

Les trois corps simples non unitaires signalés au paragraphe IV, n° 8, sont définis par

(a) $$\theta_1=\varepsilon, \qquad \theta_2=\varepsilon^3;$$

$\varepsilon=i$, racine primitive quatrième de l'unité;

(b) $$\theta_1=\varepsilon+\varepsilon^3=i\sqrt{2}, \qquad \theta_2=\varepsilon^5+\varepsilon^7=-i\sqrt{2};$$

(c) $$\theta_1=\varepsilon+\varepsilon^7=\sqrt{2}, \qquad \theta_2=\varepsilon^3+\varepsilon^5=-\sqrt{2};$$

$\varepsilon=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, racine primitive huitième de l'unité, ou zéro du polynome irréductible : x^4+1.

Contrairement à ce qui se passe pour le troisième degré, la composition de deux corps quadratiques ne peut être faite que d'une façon (§ V, n° 7) et ne donne qu'un seul corps nouveau. Toutefois comme le corps circulaire des racines huitièmes a deux sous-corps quadratiques, il en résulte que :

Tout corps circulaire, de racines d'indice $|D|$ *de l'unité, a un et un seul sous-corps quadratique si D est impair ou multiple de* 4 *seulement; il a deux sous-corps si D est multiple de* 8.

VIII. — Loi de réciprocité.

1. La construction d'un corps abélien comme sous-corps d'un corps circulaire permet de démontrer assez aisément la *loi de réciprocité* (entre la racine carrée D du discriminant et un nombre premier p décomposé dans le corps) annoncée ci-dessus (§ VI, n° 8). Elle peut être énoncée comme suit :

La qualité d'un nombre premier p, d'être un idéal premier, ou un produit d'idéaux premiers (distincts), **dans un corps abélien**, d'ordre 3, **de discriminant** D^2, **est la même pour tous les nombres premiers d'une classe** (mod D) (ou appartenant à une progression arithmétique de raison D).

Il n'y a pas lieu d'ajouter la qualité d'être puissance d'idéal premier. Elle exige en effet que p soit diviseur de D et, dans ce cas, il n'y a pas d'autre nombre premier congru à p (mod D).

2. La racine carrée D d'un discriminant est un produit de facteurs premiers P_r, congrus à $+1$, (mod 3), et éventuellement d'un facteur 9. Je considère le corps circulaire $\mathbf{R}_D$ des racines de l'unité, dont l'indice est un tel nombre D. Son degré est

$$\varphi(D) = N = M_1 M_2 \dots M_h; \qquad (M_r = P_r - 1; \quad M_1 = 6, \text{ si } P_1 = 9).$$

Son groupe $\mathbf{G}_S$ (de Galois) est isomorphe au groupe des classes (mod D) premières avec D. Il y a donc aussi isomorphisme des sous-groupes et des groupes-quotients, en particulier de $\mathbf{G}_S \mid \mathbf{G}_s$ ($\mathbf{G}_s$ d'index 3) qui sert à construire les sommes (ou périodes) qui définissent un corps abélien (§ VII, n° 1). Je précise la construction du groupe des classes et d'un tel sous-groupe quotient, qu'il n'y a pas d'ambiguïté à désigner par les mêmes notations $\mathbf{G}_S$ et $\mathbf{G}_S \mid \mathbf{G}_s$.

Si D est égal à un nombre premier P, il suffit de choisir une racine primitive g (mod P) [il y en a $\varphi(P-1)$]; les groupes sont respectivement définis par

$$\mathbf{G}_S: \quad g^x, \quad \mathbf{G}_s: \quad g^{3x} \pmod P; \qquad \left[x, \bmod N; \quad x, \bmod \frac{N}{3}\right];$$

$$\mathbf{G}_S \mid \mathbf{G}_s: \quad g\mathbf{G}_s, g^2\mathbf{G}_s, \mathbf{G}_s, \qquad (\text{ou } g^2\mathbf{G}_s, g\mathbf{G}_s, \mathbf{G}_s).$$

Cette constitution est encore valable pour $D = 9$, je puis alors prendre pour g l'une des classes ± 2.

Dans le cas d'un discriminant D composé, je considère le corps comme un produit de corps primaires, de discriminants P_r^2, chacun ordonné, comme il vient d'être dit, par le choix d'une classe primitive g'_r (mod P_r). Je détermine alors des classes g_r (mod D), par les congruences

$$g_r \equiv g'_r, \pmod{P_r}; \qquad g_r \equiv +1, \pmod{\frac{D}{P_r}}.$$

Le groupe des classes (mod D), isomorphe à $\mathbf{G}_s$ est constitué par les monomes

$$g_1^{X_1} g_2^{X_2} \dots g_h^{X_h}, \quad (\text{mod } D); \qquad [X_r \text{ défini mod } P_r].$$

Le sous-groupe $\mathbf{G}_s$, d'index 3, dont j'ai indiqué la formation de proche en proche, est formé des classes

$$z \equiv g_1^{3x_1} g_2^{3x_2} \dots g_h^{3x_h} (g_1 g_2^{-1})^{u_2} (g_1 g_3^{-1})^{u_3} \dots (g_1 g_h^{-1})^{u_h} \qquad (\text{mod } D)$$

$\left(x_r \text{ défini mod } \frac{P_r}{3}; \; u_r \text{ défini mod } 3\right)$.

Le nombre des termes est

$$\frac{P_1}{3} \frac{P_2}{3} \dots \frac{P_h}{3} 3^{h-1} = \frac{P_1 P_2 \dots P_h}{3} = \frac{D}{3}.$$

Les classes du groupe-quotient peuvent être définies indifféremment par les représentants

$$g_r, \quad g_r^2, \quad g_r^3 \quad (\text{quel que soit } r);$$

ce qui montre l'isomorphisme de ce groupe avec chacun des groupes-quotients des corps constituants, isomorphes entre eux.

Je précise la construction des substitutions (S) elles-mêmes; je désigne par $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_h$ des racines primitives de l'unité d'indices respectifs $P_1, P_2, \dots, P_h$. La substitution (S_z), correspondant à une classe z (mod D), peut être exprimée par une puissance d'une racine primitive d'indice D (produit des racines précédentes)

$$[\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_h].(S_z) = [\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_h]^z.$$

L'exponentiation peut être répartie sur chaque racine du monome, tenant compte des facteurs de l'exposant qui sont congrus à $+1$, suivant les divers facteurs de D

$$\varepsilon_1^{z_1} \varepsilon_2^{z_2} \dots \varepsilon_h^{z_h} \begin{cases} z_r \equiv g_r^{3x_r + 2u_r} & (\text{mod } P_r); \\ z_1 \equiv g_1^{3x_1 + (u_2 + \dots + u_h)} & (\text{mod } P_1). \end{cases}$$

3. La relation entre la qualité de décomposition d'un nombre premier p, dans le corps $\mathbf{R}_0$ et la classe à laquelle il appartient (mod D) peut alors être énoncée comme suit :

Pour que, dans le corps $\mathbf{R}_0$, construit dans le corps $\mathbf{R}_{(D)}$ avec une répartition par un groupe quotient $\mathbf{G}_s \mid \mathbf{G}_s$, *un nombre premier p soit décomposable, il faut et il suffit que p soit dans une classe du groupe* $\mathbf{G}_s$ *des classes* (*mod D*).

La démonstration de cette propriété peut être faite en appliquant la condition de décomposition d'un nombre premier dans un corps circulaire $\mathbf{R}_{(D)}$; il me semble intéressant de donner un raisonnement direct.

Je suppose que p, non diviseur de D, admet un facteur idéal premier $\mathfrak{P}$, du premier degré et par suite de norme p. Un nombre θ_1 du triplet discriminant est congru (mod $\mathfrak{P}$) à un nombre rationnel c et l'un au moins des deux autres conjugués $\theta_2 - c$, $\theta_3 - c$ n'est pas dans $\mathfrak{P}$. Il en résulte, d'après la divisibilité des coefficients du binome et le théorème de Fermat

$$(\theta_1 - c)^p \equiv \theta_1^p - c, \pmod p; \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \theta_1^p - \theta_1 \equiv 0, \\ \theta_1^p - \theta_2 \quad \text{ou} \quad \theta_1^p - \theta_3 \not\equiv 0, \end{cases} \pmod{\mathfrak{P}}.$$

L'expression de θ_1 dans $\mathbf{R}_D$ donne d'autre part les congruences

$$\theta_1^p = \left[\sum_x \varepsilon_D . (s_x)\right]^p \equiv \sum_x [\varepsilon_D . (s_x)]^p \equiv \sum_x [\varepsilon_D . (\sigma_u \times s_x)] \equiv \theta_{1+u}, \qquad \pmod p;$$

si le nombre p appartient à une classe $g^u \mathbf{G}_s$ [u défini (mod 3)]. Il en résulte

$$\theta_1 \equiv \theta_1^p \equiv \theta_1^{p^2} \equiv \theta_{1+u} \equiv \theta_{1+2u}, \qquad \pmod p.$$

D'après la propriété précédente, ceci exige que u soit congru à zéro (mod 3), c'est-à-dire que p appartienne au groupe $\mathbf{G}_s$.

Réciproquement, s'il en est ainsi, la congruence qui en résulte

$$0 \equiv \theta_1^p - \theta_1 \equiv (\theta_1 - 1)\ (\theta_1 - 2) \ldots (\theta_1 - p) \qquad \pmod p$$

entraîne l'existence d'un facteur (idéal) commun à p et à l'un des facteurs $(\theta_1 - c)$, c'est-à-dire encore l'existence d'un idéal

$$\mathfrak{P} = (p, \theta_1 - c),$$

diviseur proprement dit de p, ce qui, d'après le raisonnement déjà fait (§ VI, n° 6) entraîne la décomposition de p.

4. *Exemples.* — *a*. J'ai déjà dit que le corps $\mathbf{R}_{0_3}$ est engendré par des sommes (ou périodes) dans le corps $\mathbf{R}_{91}$, de degré 6. Suivant le module 9, je puis prendre + 2 comme classe primitive et les classes de $\mathbf{G}_s$ définies par ce choix sont

$$2^3 \text{ et } 2^6, \quad \text{ou} \quad -1 \text{ et } +1, \quad \pmod 9.$$

Dans le groupe-quotient l'ordre des classes défini par les puissances de 2 est

$$(-1, +1), \quad (-2, +2), \quad (-4, +4), \quad \pmod 9;$$

c'est celui qui a été adopté au paragraphe VII, n° 2; il lui correspond le couple discriminant ordonné $\| 3j \quad 3j' \|$ d'après le calcul fait.

Les nombres premiers, décomposables dans $\mathbf{R}_{0_3}$ sont ceux qui sont congrus à ± 1, (mod 9), en plus du facteur 3 du discriminant. Les premiers sont 17, 19,

37, 53, 71, 73, 89, ..., ce sont les *modules* pour lesquels le polynome fondamental (du triplet discriminant)

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

a des racines.

b. Le corps unitaire primaire, de discriminant 7^2, est engendré par des périodes dans le corps $\mathbf{R}_{(7)}$, de degré 6. Suivant le module 7, je puis prendre $+3$ comme classe primitive et les classes de $\mathbf{G}_s$ (encore au nombre de 2), définies par ce choix, sont

$$3^3 \text{ et } 3^6, \quad \text{ou} \quad -1 \text{ et } +1, \quad (\text{mod } 7).$$

Dans le groupe quotient, l'ordre des classes, défini par les puissances de 3 est

$$(-1, +1), \quad (-3, +3), \quad (-3^2, +3^2) \equiv (-2, +2) \qquad (\text{mod } 7).$$

D'autre part la décomposition de 7 dans $\mathbf{R}_j$, en facteurs d'un couple unitaire positif est

$$7 = (-j + 2j')\,(-j' + 2j).$$

J'applique la méthode du paragraphe VII, n° 7 pour déterminer l'ordre du couple qui correspond à celui du groupe-quotient (ou des triplets du corps); je prends pour exposant p

$$p = 2 \equiv 3^2 \pmod 7, \qquad \left[\frac{p-2}{3} = 0; \qquad p \equiv 2 \pmod 3\right].$$

La congruence, qui devient

$$\alpha \equiv j^2 = j' \qquad (\text{mod } 2);$$

est vérifiée pour $\alpha = -j' + 2j$ de sorte que le couple cherché est

$$\| -j' + 2j \quad -j + 2j' \|;$$

le polynome fondamental, déjà indiqué (§ IV, n° 5) est

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1.$$

Les nombres premiers décomposables dans le corps sont (en plus de 7) ceux qui sont congrus à $\pm 1 \pmod 7$; les premiers sont 13, 29, 41, 43, 71, 83, 97, ... ce sont les modules suivant lesquels le polynome fondamental a des racines.

c. Je forme le produit des deux corps précédents, ordonnés comme il a été convenu; le couple discriminant de ce produit est

$$\| -j' + 2j \quad -j + 2j' \| \times \| 3j \quad 3j' \| = \| 3j + 9j' \quad 3j' + 9j \|;$$

le polynome fondamental du triplet discriminant est (calcul général des § II, n° 4 et § IV, n^{os} 6 et 7)

$$f(x) = x^3 - 3 \times 7x + 28.$$

Ce produit peut être engendré par des périodes dans le corps circulaire $\mathbf{R}_{(63)}$, de degré $6 \times 6 = 36$. Je puis exprimer son groupe en classes (mod 63) au moyen de générateurs construits comme il a été dit au n° 2 précédent

$$-29 \begin{cases} \equiv +2 \pmod 9; \\ \equiv +1 \pmod 7; \end{cases} \qquad +10 \begin{cases} \equiv +1 \pmod 9; \\ \equiv +3 \pmod 7; \end{cases}$$

son expression est

$$\mathbf{G}_S : (+29)^{X_1} \times (+10)^{X_2} \pmod{63}, \qquad (X_1 \text{ et } X_2 \text{ définis mod } 6).$$

Le sous-groupe $\mathbf{G}_s$, défini par l'isomorphisme des sous-groupes considérés dans les corps composants est

$$(+29)^{2x_1} \times (+10)^{3x_2} \times (29 \cdot 10^{-1})^{u_2}, \pmod{63}; \qquad [x_1, x_2 \mod 2; \quad u_2 \mod 3];$$

ou

$$\pm 1, \quad \pm 8, \quad \pm 2, \quad \pm 16, \quad \pm 4, \quad \pm 32, \qquad \pmod{63}.$$

Les nombres premiers décomposables dans ce corps sont, en plus de 3 et 7, ceux qui sont dans ces classes; les premiers sont

2, 31, 47, 59, 61, 67, 71, 79, 127, 157, 173, 181, 191, 193, 197, ...

ils pourraient être retrouvés par la recherche des facteurs premiers des valeurs (pour x entier) du polynome fondamental, ce qui donnerait lieu à un calcul analogue à celui du crible d'Ératosthène.

J'obtiens un corps différent en changeant l'ordre de l'un des groupes quotients, par exemple de $\mathbf{R}_j$, le couple discriminant du nouveau corps est

$$\left| -j' + 2j \quad -j + 2j' \right| \left| 3j' \quad 3j \right| = \left| -9j - 6j' \quad -9j - 6j \right|;$$

et son polynome fondamental est

$$f(x) = x^3 - 3 \times 7x - 35.$$

Le sous-groupe $\mathbf{G}_s$ est

$$(+29)^{2x_1} \times (+10)^{3x_2} \times (29^2 \cdot 10^{-1})^{u_2}, \pmod{63}; \qquad [x_1, x_2 \mod 2; \quad u_2 \mod 3]$$

ou

$$\pm 1, \quad \pm 8, \quad \pm 25, \quad \pm 11, \quad \pm 5, \quad \pm 23, \quad \cdot \pmod{63}.$$

Les nombres premiers décomposables dans ce corps sont, en plus des facteurs 3 et 7 du discriminant, ceux qui appartiennent à ces classes, dont les deux premières sont communes avec le corps précédent. Les premiers de ces nombres sont

5, 11, 23, 71, 101, 103, 127, 131, 137, 149, 151, 181, 197, ...

5. La loi célèbre de *réciprocité quadratique*, énoncée avec le symbole de Legendre est

$$\left(\frac{p}{d}\right)\left(\frac{d}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{d-1}{2}}.$$

Si p est premier, le symbole $\left(\frac{d}{p}\right)$ est égal à -1 ou à $+1$ suivant l'impossibilité ou la possibilité de la congruence

$$x^2 - d \equiv 0 \pmod{p}.$$

La possibilité de cette congruence est liée elle-même (ainsi qu'il a été rappelé § VI, n° 10) à la décomposition du nombre premier p en idéaux, dans le corps quadratique engendré par $\sqrt{d}$. On en conclut aisément en considérant le discriminant D du corps, au lieu du nombre d, et en utilisant le caractère quadratique du nombre 2, une conséquence de la loi analogue à l'énoncé ci-dessus :

La qualité d'un nombre premier p, d'être un idéal premier, ou un produit de deux idéaux premiers (distincts) *dans un corps quadratique, de discriminant D, est la même pour les nombres premiers d'une classe* (*mod* $|D|$) (ou appartenant à une progression arithmétique de raison $|D|$).

On sait que la loi de réciprocité a fait l'objet d'un grand nombre de démonstrations *directes* ou élémentaires, mais qui lui laissent cependant un caractère assez mystérieux. Il est possible d'en donner une démonstration, en considérant comme il a été fait pour les corps du troisième degré, la double génération d'un corps quadratique, par l'introduction d'une racine d'un nombre entier, ou comme sous-corps d'un corps circulaire. Cette méthode également connue permet de prouver non seulement la conséquence de la loi, mais la loi elle-même sous la forme rappelée, y compris le caractère quadratique des nombres 2 et -1. Il me semble qu'elle en constitue une preuve plus directe (ou plus naturelle).

SUR

L'EXISTENCE DES SOLUTIONS

DU PROBLÈME

DE REPRÉSENTATION CONFORME DE HELMHOLTZ

CAS DES ARCS SANS TANGENTE

PAR M. JULIEN KRAVTCHENKO.

I. — Introduction. Hypothèses de régularité. Énoncé du problème. Historique (1).

1. Dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$, considérons un arc de courbe $\widehat{BC}$, défini par son équation

$$x = x(y) \tag{1}$$

avec

$$\begin{cases} y_2 \leq y \leq y_1 < \infty, \\ y_1 - y_2 > 0. \end{cases} \tag{2}$$

(1) Cet article constitue le prolongement de ma *Thèse* [*Sur le problème de représentation conforme de Helmholtz : théorie des sillages et des proues* (*Journ. de Math.*, 9e série, 20, 1941, pp. 35-303)] et du Mémoire, intitulé : *Sur l'existence des solutions du problème de représentation conforme de Helmholtz :* cas des obstacles possédant des points anguleux [*Ann. Éc. Norm.*, LXII, (3). 1945, p. 233-268 (article dont un résumé a paru aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1942. p. 464-466)]. Dans la suite, les renvois à ces deux publications seront notées respectivement au moyen des initiales J. K. 1 et J. K. 2, suivies de la mention du paragraphe. Un résumé des conclusions du présent travail a été inséré aux *C. R. Acad. Sc.*, t. 213, 1942, p. 870-872.

Voici quelques simplifications et rectifications du Mémoire J. K. 2, cité ci-dessus.

Envisageons l'espace fonctionnel $\mathcal{E}$ dont un élément s est constitué par l'ensemble (p. 255) d'une fonction $l(s)$, définie et höldérienne pour $0 \leq s \leq \pi$ et des $(n+2)$ paramètres a, b, s_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Sur le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ tel que $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n < \pi$, le système fonctionnel qui régit le problème posé se ramène à la forme $x = \mathrm{F}(x)$, où $\mathrm{F}(x)$ est une transformation opérant sur $\mathcal{E}$ et qui

Les coordonnées du point B (ou C) sont donc

$$x = x(y_2), \qquad y = y_2 \qquad [\text{ou } x = x(y_1),\ y = y_1];$$

à chaque valeur de l'intervalle $y_2 \leqq y \leqq y_1$, il ne correspond qu'une seule valeur de x; cela veut dire que l'intersection de toute droite d'équation $y = \text{const.}$ $(y_2 \leqq \text{const.} \leqq y_1)$ avec $\widehat{BC}$ se réduit à un point unique (²). En outre, d'après (2), le diamètre apparent D_2, de $\widehat{BC}$ dans le sens Ox est borné tant inférieurement que supérieurement; nous appellerons $2D_1$ le diamètre apparent de $\widehat{BC}$ dans le sens Oy que nous supposerons borné supérieurement.

---

fait correspondre à $x \subset \mathcal{E}$ un élément $x' \subset \mathcal{E}$ (*cf.* §§ 9 et 17); on remplacera les $(n+1)$ premières équations (14) par

$$(1) \qquad l(s) = \int_0^s |F(s, s')| \left| \frac{\sin \frac{s' + s_j}{2}}{\sin \frac{s' - s_j}{2}} \right|^{2\alpha_j - 1} |e^{iU(e^{is'})}| \, ds' + \alpha,$$

$F(s, s')$ désignant une fonction régulière. Le second membre de (1) n'a de sens que si $2\alpha_j - 1 < 1$; d'après la définition de $2\alpha_j$, (p. 249), il suffit que $\Psi(l) \neq \pi$ pour $l_j \leqq l \leqq l_{j+1}$ si $\Psi(l)$ s'annule pour $l_{j-1} \leqq l \leqq l_j$. Cette hypothèse avait été omise.

Tout revient maintenant à définir le second membre de (1), quels que soient les s_j, avec une seule fonction $l(s)$. Si les s_j sont *distincts*, soit $\sigma_k (0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_n < \pi)$, la suite des s_j rangés par ordre de grandeurs croissantes. On forme, ensuite, $\Psi[l(s)]$, $s_0[cf.\ \text{K.}(7')]$, $\Omega(Z)(7)$, les coefficients α_j et H(Z) (p. 252) en appliquant à $l(s)$ et aux σ_k les définitions du haut de la page 252. Le second membre de (1) a alors un sens; il en sera de même des seconds membres des n dernières équations (14), dont la dernière, par exemple, s'écrit

$$(2) \qquad s_n = s_n + \frac{1}{\lambda} \left\{ l_n - l_{n-1} - [l(s)]_{s_{n-1}}^{s_n} \right\}.$$

Toutefois, (1) peut n'avoir pas de sens si p valeurs $s_j (p \geqq 2)$ coïncident; le noyau de (1) se comporte alors comme $|s - s_j|^{\Sigma(1 - 2\alpha_j)}$ pour $s = s_j$, $\Sigma(1 - 2\alpha_j)$ pouvant être < -1.

Cette éventualité, à écarter si $\Psi(l)$ est décroissant (*cf.* § 19), m'avait échappé. Pour l'éliminer, utilisons le nombre γ (p. 251); (2) ne peut être satisfait pour $\Psi(l)$ satisfaisant au paragraphe 14 que si $|s_j - s_{j-1}| \geqq \gamma$, γ étant une constante. Posons alors

$$\beta_{j,m} = \left[\frac{2(s_j - s_m)}{\gamma} \right]^+ = \begin{cases} \dfrac{2|s_j - s_m|}{\gamma}, & \text{pour } |s_j - s_m| \leqq \dfrac{\gamma}{2} \\ 1 & \text{pour } |s_j - s_m| > \dfrac{\gamma}{2} \end{cases} \qquad (j \neq m),$$

et remplaçons les exposants $(2\alpha_j - 1)$ de (1) par $(2\alpha_j - 1) \prod_m \beta_{j,m}$, $m \neq j$.

Ainsi modifiée, $F(x)$ est définie et complètement continue sur toute hypersphère $|x| \leqq \text{const.}$, $\mathcal{E}$ (*cf.* §§ 17 et 24); l'équation $x = F(x)$ est équivalente à (14) dans le domaine où elle peut avoir une solution. Dès lors, les raisonnements des paragraphes 26 et 27 permettent de conclure.

Cette façon d'opérer évite l'emploi des fonctions $l(s)$ multiformes (p. 252) dont je n'ai pas explicité l'usage. Tout ce qui précède se transpose au cas symétrique (*cf.* § 24).

(²) Toutefois, $\widehat{BC}$ pourrait contenir des portions rectilignes parallèles à Ox, étrangères aux extrémités B et C de l'arc $\widehat{BC}$. Nous ne nous arrêterons pas à cette extension du présent travail.

Nous supposerons, de plus, que la fonction $x(y)$ est continue pour $y_2 \leq y \leq y_1$ au sens de Lipschitz; cela veut dire qu'étant donné y et y', deux valeurs quelconques de l'intervalle considéré, on a

$$|x(y) - x(y')| \leq \cot\varphi\, |y - y'|, \tag{3}$$

où φ est une constante telle que

$$0 < \varepsilon \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \tag{3'}$$

ε étant un nombre positif. Il suit de là, en particulier, que $\overset{\frown}{BC}$ est un arc rectifiable : nous appellerons L sa longueur.

2. L'arc $\overset{\frown}{BC}$, satisfaisant aux hypothèses précédentes, est placé à l'intérieur d'une bande indéfinie, à bords μ_1 et μ_2 rectilignes et parallèles à Ox, d'équations respectives :

$$\begin{cases} (\mu_1), & y = y_1 + d_1 \quad (-\infty \leq x \leq \infty), \\ (\mu_2), & y = y_2 - d_2 \quad (-\infty \leq x \leq \infty). \end{cases} \tag{4}$$

D'après cela, d_1 (ou d_2) est la distance du point C (ou B) à μ_1 (ou μ_2). Nous supposerons essentiellement que ces distances sont minorées par une longueur d fixe, non nulle :

$$\begin{cases} d_1 \geq d, \\ d_2 \geq d. \end{cases} \tag{5}$$

L'une des distances d_1 ou d_2 (ou les deux à la fois) peut devenir infinie.

3. L'ensemble des éléments $\overset{\frown}{BC}$ et de deux droites indéfinies μ_1 et μ_2 forme ce que M. A. Oudart (3) a appelé le squelette $\mathcal{C}$ du schéma de Helmholtz; nous allons nous poser relativement à ce squelette le problème de représentation conforme de Helmholtz, dont voici l'énoncé tel qu'il a été formulé à la suite des travaux de M. J. Leray :

Soit le plan de la variable complexe auxiliaire $f = \varphi + i\psi$. *Déterminer dans le plan f le domaine* F *en forme de bande indéfinie :*

$$-\psi_2 \leq \psi \leq \psi_1; \qquad \psi_1 > 0; \qquad \psi_2 > 0; \qquad -\infty \leq \varphi \leq \infty$$

entaillée le long de la portion positive de l'axe $O\varphi$ *et définir dans* F *la fonction univalente* $z = z(f)$ *de façon que :*

1° *au domaine* F, $z(f)$ *fasse correspondre un domaine* $\mathfrak{A}$ *simplement connexe du plan z, situé entre* μ_1 *et* μ_2;

---

(3) *Voir* la Thèse de cet auteur (*Sur le schéma de Helmholtz-Kirchhoff*, *Journ. de Math.*, t. XXII, 1943, p. 245-320 et t. XXIII, 1944, p. 1-36. La terminologie adoptée par M. Oudart offre l'avantage de rappeler l'origine hydrodynamique du problème énoncé dans le texte.

2° *la portion de la frontière* F′ *de* F, *étrangère aux segments*

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty; \qquad \varphi_2 \leq \varphi \leq \infty \qquad (\varphi_1 > 0, \qquad \varphi_2 > 0)$$

de l'axe $\psi = 0$ *ait pour image dans le plan* z *le squelette* $\mathcal{C}$ (*); *d'une manière plus précise, à la droite indéfinie* $\psi = \psi_1$ (*où* $\psi = -\psi_2$), $z(f)$ *doit faire correspondre la droite* μ_1 (*ou* μ_2); *à l'ensemble des deux segments* $\psi = 0$ $(0 \leq \varphi \leq \varphi_1)$ *et* $\psi = 0$ $(0 \leq \varphi \leq \varphi_2)$ *situés respectivement sur les bords supérieur et inférieur de la coupure,* $z(f)$ *fera correspondre* $\widehat{BC}$; *le squelette* $\mathcal{C}$ *n'étant défini qu'à une translation près, on peut prendre pour* $z = 0$ *le point* $z(0)$ (*);

3° *au segment* $\psi = 0$ $(\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty)$, *ou* $(\varphi_2 \leq \varphi \leq \infty)$, *situé sur le bord supérieur (ou inférieur) de la coupure,* $z(f)$ *fasse correspondre une ligne* λ_1 (*ou* λ_2), *inconnue a priori, située entre* μ_1 *et* μ_2 *et joignant le point* C (*ou* B) *au point* $x = +\infty$ *et cela de manière à conserver les longueurs : en d'autres termes, on doit avoir*

$$\left|\frac{dz}{df}\right| = 1, \qquad \text{pour} \quad \psi = 0 \begin{cases} \varphi_1 \leq \varphi \leq \infty, \\ \varphi_2 \leq \varphi \leq \infty. \end{cases} \tag{6}$$

4° *aux points à l'infini de* F *où* $\varphi > 0$, *on doit avoir*

$$z = f + \text{série entière en } \frac{1}{f};$$

au point à l'infini de F *où* $\varphi < 0$, *on doit avoir*

$$z = kf + \text{série entière en } \frac{1}{f}$$

où k *est une constante réelle, positive, a priori inconnue.*

4. A ma connaissance, du moins, ce problème n'a été abordé jusqu'ici que dans le cas où l'arc $\widehat{BC}$ est doué d'une tangente, et même d'une courbure-continue au sens de Hölder (5), à moins que $\widehat{BC}$ ne possède qu'un nombre fini de points anguleux (6). Le mémoire J. K. 2 a été spécialement consacré aux configurations de cette espèce. Dans le présent travail, je me propose de traiter le problème ci-dessus en faisant sur la portion $\widehat{BC}$ de $\mathcal{C}$ les seules hypothèses

(4) Le segment $\psi = 0$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty$ est situé sur le bord supérieur de la coupure pratiquée le long de l'axe $\psi = 0$; le segment $\varphi_2 \leq \varphi \leq \infty$, $\psi = 0$ appartient au bord inférieur de celle-ci. Précisons que le domaine F étant, *a priori*, inconnu, les quatre constantes ψ_1, ψ_2, φ_1 et φ_2 qui le définissent sont des inconnues du problème.

(*) D'après cela, les ordonnées des points B et C dans le plan z sont, *a priori*, inconnues; seule leur différence $y_1 - y_2$ est une donnée.

(5) Dans cet ordre d'idées, signalons les résultats de M. J. Leray dont J. K. 1 et la *Thèse* de M. Oudart constituent les prolongements [cf. *loc. cit.* (3)].

(6) Pour le cas des arcs $\widehat{BC}$ en forme de polygones rectilignes convexes vers $x = +\infty$, *cf.* les travaux de MM. G. Hamel, H. Weyl, K. Friedrichs, A. Weinstein dont on trouvera la bibliographie dans J. K. 1, p. 41.

de régularité énumérées au paragraphe 1. Cette fois, il faut renoncer à partir des équations intégro-différentielles de M. Villat qui ne s'appliquent qu'aux arcs $\widehat{BC}$ pourvus d'une tangente continue. La méthode de démonstration que nous allons utiliser est inspirée par les travaux de MM. C. Caratheodory et P. Montel (7) consacrés au problème de représentation conforme de Riemann : on approchera indéfiniment de la configuration donnée $\mathcal{C}$ au moyen de squelettes $\mathcal{C}_n$ auxquels s'appliquent les théorèmes d'existence de J. K. 2 et l'on obtiendra le théorème d'existence cherché par voie de passage à la limite (8).

5. Malheureusement, la méthode de passage à la limite qu'on vient de décrire ne fournit aucune indication sur le nombre de solutions que le problème comporte et de nouvelles recherches seraient nécessaires pour compléter la théorie sur ce point capital.

De plus, les solutions dont on établit ainsi l'existence, sont assurément inacceptables du point de vue physique (*cf.* J. K. 2, § 2). Dès lors, pour des arcs $\widehat{BC}$, de l'espèce considérée au cours de ce travail, il y aurait lieu de modifier le schéma de Helmholtz-Kirchhoff en s'inspirant, sans doute, des suggestions de M. Villat.

On remarquera, peut-être, une restriction qui intervient dans la théorie qu'on va développer. Nous supposons, en effet, que les nombres dérivés de la fonction $x = x(y)$ sont bornés [*cf.* (3) et (3')]. Cette hypothèse permet d'éliminer une difficulté relative aux squelettes d'approximation $\mathcal{C}_n$; si les conditions (3) et (3') n'étaient pas remplies, les polygones P_n définis ci-dessous, pourraient, à partir d'un rang n assez grand, présenter du côté des x positifs des pointes différant d'aussi peu qu'on le veut d'un point de rebroussement. Or, les théorèmes d'existence de J. K. 2 ne s'appliquent pas à de telles configurations. On retrouve ainsi une difficulté qui s'est déjà rencontrée dans la théorie du problème de représentation conforme de Riemann.

II. — Construction de la suite des approximations $\mathcal{C}_n$ de $\mathcal{C}$. Propriétés des solutions du problème de Helmholtz posé relativement aux $\mathcal{C}_n$.

6. Reprenons le squelette $\mathcal{C}$ défini au cours des paragraphes 1 et 2. Inscrivons dans l'arc donné BC correspondant une ligne polygonale P_n à $(n+1)$ côtés de façon que : 1° les deux extrémités de P_n coïncident avec les points B et C;

(7) *Cf. Les leçons sur les familles normales des fonctions analytiques* de M. Montel, Paris, 1927, p. 98 et les suivantes.

(8) Observons que M. A. Weinstein a déjà utilisé un procédé semblable dans la théorie des jets, mais dans le cas très particulier des arcs $\widehat{BC}$ à courbure régulière et de signe constant, présentant, au surplus, une propriété de symétrie par rapport à Ox.

2° les ordonnées des sommets $p_j(n)$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ de P_n [qui sont situés sur $\widehat{BC}$ et dont il s'agit de fixer l'ordre en décrivant P_n de B vers C] croissent avec leur indice j; 3° la longueur de chaque côté de P_n tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Nous appellerons $\mathcal{C}_n$ le squelette constitué par l'ensemble de la ligne polygonale ouverte P_n et des deux droites indéfinies μ_1 et μ_2. Il est clair que $\lim_{n=\infty} P_n = \widehat{BC}$; par suite, on peut écrire :

$$\lim_{n=\infty} \mathcal{C}_n = \mathcal{C}.$$

De la définition même de P_n, il résulte que la longueur L_n de P_n vérifie l'inégalité

$$L_n \leq L \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty), \tag{7}$$

où L désigne, rappelons-le, la longueur de l'arc $\widehat{BC}$. Si donc M est un point quelconque de P_n, l, la longueur de la portion de P_n comprise entre B et M, on a

$$0 \leq l \leq L_n \leq L \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty). \tag{7'}$$

Nous appellerons l_j $(j=1, 2, \ldots, n)$ les abscisses « curvilignes » des n sommets $p_j(n)$ de P_n, $y_j(n)$ les ordonnées des points en cause, $\Psi_n(l)$, l'angle, compris entre 0 et π, formé en M par P_n (orienté dans le sens des y croissants) avec Ox. D'après cela, $\Psi_n(l)$ se réduit à une constante sur chacun des intervalles

$$0 \leq l \leq l_1; \qquad l_{j-1} \leq l \leq l_j \qquad (j=2, 3, \ldots, n); \qquad l_n \leq l \leq L_n,$$

mais subit des discontinuités pour $l=l_j$. D'un autre côté, de (3) il résulte

$$\begin{aligned}
&|x[y_1(n)] - x(y_2)| \qquad \leq \operatorname{cotg}\varphi\, |y_1(n) - y_2|,\\
&|x[y_j(n)] - x[y_{j-1}(n)]| \leq \operatorname{cotg}\varphi\, |y_j(n) - y_{j-1}(n)| \qquad (j=2, 3, \ldots, n),\\
&|x\ (y_1)\ - x[y_n\ (n)]| \leq \operatorname{cotg}\varphi\, |y_1 - y_n(n)|.
\end{aligned}$$

Or, pour $0 \leq l \leq l_1$, par exemple, on a

$$\Psi_n(l) = \operatorname{arc\,cotg}\left(\frac{x[y_1(n)] - x(y_2)}{y_1(n) - y_2}\right),$$

en sorte que

$$0 < \varphi \leq \Psi_n(l) \leq \pi - \varphi \leq \pi \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty). \tag{8}$$

7. D'après cela, toute configuration $\mathcal{C}_n$ $(n=1, 2, \ldots, \infty)$ vérifie l'ensemble des hypothèses (H) (*cf.* le paragraphe 14 de J. K. 2). Par suite, le problème de Helmhotz, posé relativement à $\mathcal{C}_n$ possède au moins une solution $z=z_n(f)$. Soient alors $\mathfrak{A}_n$, le domaine du plan z correspondant à $\mathcal{C}_n$ (*cf.* l'alinéa 1 de l'énoncé du problème de Helmholtz au paragraphe 3), F_n, l'image de $\mathfrak{A}_n$ par $f=f_n(z)$, fonction inverse de $z_n(f)$, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$, $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n}$ les paramètres défi-

nissant F_n (variables, en général, avec n); le domaine de définition F_n de $z_n(f)$ n'est pas commun à toutes les fonctions de cette suite. Pour obvier à cet inconvénient, il est commode de poser, avec M. Villat (*cf.* J. K. 1, § 9)

$$(9) \qquad f = f_n(t) = -\frac{\psi_{2,n}}{\pi}\log\frac{t-a_n}{t_{0,n}-a_n} - \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\frac{t-b_n}{b_n-t_{0,n}} + i\psi_{1,n},$$

où les logarithmes se réduisent à leur détermination arithmétique pour t réel et $t > b_n$, où les paramètres a_n, b_n, liés aux paramètres $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n}$, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ définissant F_n au moyen des relations

$$\varphi_{1,n} = -\frac{\psi_{2,n}}{\pi}\log\frac{1-a_n}{t_{0,n}-a_n} - \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\frac{b_n-1}{b_n-t_{0,n}},$$

$$\varphi_{2,n} = -\frac{\psi_{2,n}}{\pi}\log\frac{(-1-a_n)}{t_{0,n}-a_n} - \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\frac{b_n+1}{b_n-t_{0,n}}$$

et où le paramètre $t_{0,n}$ est donné par

$$t_{0,n} = \frac{a_n\psi_{1,n} + b_n\psi_{2,n}}{\psi_{1,n}+\psi_{2,n}}.$$

On montre alors aisément que les solutions a_n, b_n, $t_{0,n}$ de ce système sont réelles et vérifient l'ensemble des inégalités

$$a_n < -1; \qquad b_n > 1; \qquad -1 < t_{0,n} < 1.$$

Dans ces conditions, la transformation (9) fait correspondre à F_n le demi-plan supérieur $\mathfrak{S}_n$ du plan de la variable $t = t_1 + it_2$ et cela de façon que : 1° aux segments réels $-\infty \leq t_1 \leq a_n$ et $b_n \leq t_2 \leq \infty$ correspondent les bords μ_2 et μ_1 de F_n respectivement; 2° aux segments réels $a_n \leq t_1 \leq -1$ et $1 \leq t_1 \leq b_n$ correspondent les segments $\psi = 0$ $(\varphi_2 \leq \varphi \leq \infty)$ (bord inférieur de la coupure) et $\psi = 0$ $(\varphi_1 \leq \varphi \leq \infty)$ (bord supérieur de la coupure); 3° aux segments réels $-1 \leq t \leq t_{0,n}$ et $t_{0,n} \leq t \leq 1$ correspondent les segments réels $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$ (bord inférieur de la coupure) et $0 \leq \varphi \leq \varphi_1$ (bord supérieur de la coupure) respectivement.

La solution du problème de Helmholtz posé relativement au squelette $\mathfrak{C}_n$ se présente désormais sous la forme $z = z_n[f_n(t)] = z_n(t)$, les $z_n(t)$ étant toutes définies dans le demi-plan $t_2 \geq 0$. Somme toute, le domaine $\mathfrak{S}_n$ dépend des trois paramètres a_n, b_n et $t_{0,n}$, ce dernier étant à son tour, défini par la donnée de a_n, b_n et du quotient $\frac{\psi_{1,n}}{\psi_{2,n}}$. Par contre, la correspondance $f = f_n(t)$ fait intervenir quatre paramètres $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ a_n, b_n dont l'ensemble est équivalent à celui des paramètres $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ $\varphi_{1,n}$ et $\varphi_{2,n}$ (*).

(*) D'après cela, la position du point $z_n(0)$ varie avec l'indice n, en sorte que les ordonnées des extrémités B et C de P_n dépendent de n et l'on devrait écrire $y_{2,n}$ et $y_{1,n}$, en lieu et place de y_2 et y_1, pour expliciter cette dépendance. Nous ne le ferons pas pour simplifier les écritures.

8. Étudions plus en détail les propriétés communes à la suite $z_n(t)$. En premier lieu, les inégalités (5) entraînent l'existence d'une constante $K(d)$, ne dépendant que de d, telle que (*cf.* J. K. 1, § 24 ou J. K. 2, § 12) :

$$|a_n+1| \geq K(d),$$
$$|b_n-1| \geq K(d).$$

Si $d_1=\infty$, on a

$$b_n=\infty \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty),$$

de même, $d_2=\infty$ entraîne

$$a_n=-\infty \qquad (n=1, 2, \ldots, \infty);$$

si d_1 (ou d_2) est borné supérieurement, il en sera de même de b_n (ou de $|a_n|$; pour ces limitations, se reporter à J. K. 1, § 27); les majorantes de $|a_n|$ et b_n dépendent alors de celles de d_1, d_2 et de L qui majore les L_n (**). On montre que si $d_2=\infty$, par exemple, la transformation (9) prend la forme

$$f=f_n(t)=A_n(t-t_{0,n})-\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\frac{(t-b_n)}{(b_n-t_{0,n})}+i\psi_{1,n},$$

où A_n désigne une nouvelle constante; si, de plus, on suppose $d_2=\infty$, on a, plus simplement,

$$f=f_n(t)=A_{1,n}(t-t_{0,n})^2.$$

On trouvera une étude de ces cas limites au paragraphe 14 de J. K. 1; il serait facile d'y adapter les raisonnements qui suivent. Mais pour simplifier l'exposition, nous admettrons désormais que les distances d_1 et d_2 vérifient les inégalités

$$0<d\leq d_j\leq D \qquad (j=1, 2), \tag{10}$$

où D désigne une longueur fixe; moyennant quoi les résultats qu'on vient de rappeler s'écrivent :

$$\begin{cases} -K_1(d, D, L)\leq a_n\leq -1-K(d), \\ 1+K(d)\leq b_n\leq K_1(d, D, L), \end{cases} \tag{10'}$$

inégalités où $K_1(d, D, L)$ désigne une constante convenable donnée.

9. Chaque domaine $\mathfrak{A}_n$, correspondant au squelette $\mathfrak{C}_n$, est nécessairement d'un seul tenant; ce fait, d'ailleurs déjà utilisé pour la construction des minorantes des paramètres $|a_n+1|$ et $|b_n-1|$ est la conséquence des inégalités (8). Rappelons que cette proposition résulte de ce que l'intersection de chacune de lignes $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$ avec une parallèle quelconque à Ox se réduit à un point unique. D'ailleurs, la condition $\left|\frac{dz_n(t)}{df_n(t)}\right|=1$ [*cf.* (6)], valable le long des

(**) Noter que L peut être majoré au moyen des nombres D_1, D_2 et φ (*cf.* § 2).

lignes $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$ (c'est-à-dire le long de leurs images dans $\mathfrak{C}_n$) entraîne, comme on le sait, l'analyticité de $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$, sauf pour $t=\pm 1$, en général. Pour le voir, souvenons-nous qu'en posant

$$t=t_1+it_2,$$

$$\Omega_n(t)=\Theta_n(t_1,t_2)+i\mathrm{T}_n(t_1,t_2)=-i\log\frac{dz_n(t)}{df_n(t)},$$

la condition isopérimétrique (6) prend la forme

$$\mathrm{T}_n(t_1,0)=0, \qquad \text{pour} \quad a_n\leq t_1\leq -1;\ 1\leq t_1\leq b_n.$$

Il s'ensuit que la fonction $\mathrm{T}_n(t_1,t_2)$ est prolongeable analytiquement à travers les portions considérées de la frontière $\mathfrak{C}'_n$ de $\mathfrak{C}_n$, donc analytique, et même holomorphe, sur les portions en cause; il en sera, par suite, de même de $\frac{dz_n(t)}{df_n(t)}$, donc, d'après (9), de $\frac{dz_n(t)}{dt}$ et, finalement, de $z_n(t)$. A la vérité, la démonstration n'est valable que pour l'intérieur des segments réels $a_n<t_1<-1$, $1<t_1<b_n$, $t_2=0$, extrémités exclues. On sait qu'en général, $z_n(t)$ présente une singularité pour $t=\pm 1$; nous renverrons pour le détail de cette discussion au paragraphe 13 de J. K. 1 et nous ne nous occuperons, dans un instant, que des points $t=a_n$ et $t=b_n$.

De la définition même de $\Omega_n(t)$, il résulte aussi

$$\Theta_n(t_1,0)=0, \qquad \text{pour} \quad b_n\leq t_1\leq\infty,\ -\infty\leq t_1\leq a_n.$$

Cela montre que $z_n(t)$ est analytique et holomorphe en chaque point intérieur des segments en cause, le long desquels $z_n(t)$ fait correspondre des portions rectilignes des frontières $\mathfrak{C}'_n$ et $\mathfrak{C}'_n$. Pour préciser l'allure de $z_n(t)$ pour $t=b_n$ (des conclusions analogues valent pour $t=a_n$), partons de l'expression explicite (12) ci-après de $\Omega_n(t)$. Appelons γ_n le cercle de centre $t=b_n$ et de rayon $\frac{1}{2}\mathrm{K}(d)$; d'après les inégalités (10'), aucun γ_n ne contient le point $t=1$. Il résulte alors de (12) que la fonction $\frac{\Omega_n(t)}{\sqrt{t-b_n}}$ est holomorphe dans γ_n et y est bornée supérieurement en module au moyen d'une constante ne dépendant que de $\mathrm{K}(d)$ et de $\mathrm{K}_1(d,\mathrm{D},\mathrm{L})$; on peut donc écrire :

$$\frac{dz_n(t)}{df_n(t)}=e^{i\Omega_n(t)}=1+\sqrt{t-b_n}\,\mathrm{H}_n(t-b_n)+(t-b_n)h_n(t-b_n),$$

égalité où les fonctions $\mathrm{H}_n(t-b_n)$ et $h_n(t-b_n)$ sont holomorphes dans γ_n et dont les modules sont bornés dans ce cercle à l'aide de $\mathrm{K}(d)$ et de $\mathrm{K}_1(d,\mathrm{D},\mathrm{L})$. D'un autre côté, (9) entraîne

$$\frac{df_n(t)}{dt}=-\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\frac{1}{t-b_n}+\mathfrak{K}(t-b_n);$$

comme $\psi_{1,n}$ et $\psi_{2,n}$ sont majorés par D (⁹), la quantité $|\mathcal{K}|$, définie par (9), sera majorée dans γ_n au moyen de D et de $K(d)$. Des deux dernières formules, on tire

$$\frac{dz_n(t)}{dt} = -\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\frac{1}{t-b_n} + \frac{1}{\sqrt{t-b_n}}\mathcal{G}_n(t-b_n) + G_n(t-b_n),$$

où $\mathcal{G}_n$ et G_n désignent des fonctions de $(t-b_n)$, holomorphes dans γ_n et dont les modules sont bornés dans ce cercle au moyen de constantes, dépendant de d, D, $K(d)$ et $K_1(d, D, L)$; si donc $|t-b_n| \leq \frac{K(d)}{2}$, on a, en intégrant l'égalité précédente,

$$z_n(t) + \frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log(t-b_n) = M_n(t-b_n) + \sqrt{t-b_n}\,\mathfrak{M}_n(t-b_n) + N_n,$$

où les fonctions M_n et $\mathfrak{M}_n$ sont holomorphes dans γ_n et assujetties à y vérifier des inégalités telles que

$$|M_n(t-b_n)| \leq P(d, D, L),$$
$$|\mathfrak{M}_n(t-b_n)| \leq P(d, D, L),$$

$P(d, D, L)$ étant une constante positive, dépendant de d, D, L et où N_n désigne la constante d'intégration définie, par exemple, au moyen de la relation

$$z_n\left[b_n - \tfrac{1}{2}K(d)\right] = -\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log\left[-\frac{K(d)}{2}\right] + M_n\left[-\tfrac{1}{2}K(d)\right] + \sqrt{-\frac{K(d)}{2}}\,\mathfrak{M}_n\left[-\tfrac{1}{2}K(d)\right] + N_n.$$

Les inégalités précédentes permettent de majorer les modules des second et troisième termes de l'équation de définition de N_n, et cela au moyen de la fonctionnelle $\left[\sqrt{K(d)}+1\right]P(d, D, L)$ de d, D et L. Il en est de même du terme $|\psi_{1,n}\log[K(d)]|$ car $\psi_{1,n} \leq D$, alors que $K(d)$ est une constante finie, et non nulle à la fois. Dès lors, pour majorer $|N_n|$ il suffira d'effectuer la majoration de $\left|z_n\left[b_n - \frac{1}{2}K(d)\right]\right|$. Or, nous avons évidemment

$$\left|z_n\left[b_n - \tfrac{1}{2}K(d)\right]\right| \leq \left|\int_{l_{0,n}}^{1} e^{i\Omega_n(t)}\,df_n(t)\right| + \left|\int_{1}^{b_n - \frac{1}{2}K(d)} e^{i\Omega_n(t)}\,df_n(t)\right|,$$

(⁹) Ce fait, du reste absolument classique, résulte de ce que $\psi_{1,n}$ représente la différence des ordonnées de μ_1 et de l'asymptote horizontale de $\lambda_{1,n}$; or, d'après la propriété rappelée au début de ce paragraphe, cette dernière ordonnée est supérieure à celle du point C [*cf.* la formule (1,33) de J. K. 1 qu'il faut, d'ailleurs, rectifier comme il suit : γ_1 y désigne la différence des ordonnées de l'asymptote de $\lambda_{1,n}$ et du point C].

Notons, par ailleurs, que les raisonnements du paragraphe 27 de J. K. 1 permettent de construire une minorante non nulle de $\psi_{1,n}$ et de $\psi_{2,n}$ dépendant de d et de $(\gamma_1 - \gamma_2)$ [*cf.* les inégalités (2)]. On peut donc écrire :

$$0 < E(d, \gamma_1 - \gamma_2) \leq \psi_{j,n} \leq D, \qquad (j = 1, 2)$$

où E désigne une constante convenable.

les chemins d'intégration des intégrales du second membre étant, pour fixer les idées, des segments rectilignes de l'axe réel, $t_2 = 0$ du plan $t = t_1 + it_2$. Or, la première intégrale du second membre est majorée par la longueur de l'arc $\widehat{OC}$, donc, *a fortiori*, par la longueur totale de l'arc $\widehat{BC}$ dans lequel est inscrite la ligne polygonale P_n (*cf.* § 6). Nous avons ensuite, le long du segment réel $t_2 = 0$, $1 \leq t_1 \leq b_n - \frac{K(d)}{2}$

$$\left| \int_1^{b_n - \frac{1}{2}K(d)} e^{i\Omega_n(t)}\, df_n(t) \right| = \left| \int_1^{b_n - \frac{1}{2}K(d)} e^{i(\Theta_n + iT_n)}\, df_n(t_1) \right| \leq f_n\left[b_n - \frac{1}{2}K(d) \right] - f_n(1),$$

puisque le long de l'intervalle d'intégration $\frac{df_n(t)}{dt} = \frac{df_n(t_1)}{dt_1}$ est une fonction réelle et positive. Or, de (9) on tire

$$f_n\left[b_n - \frac{1}{2}K(d) \right] - f_n(1) = -\frac{\psi_{2,n}}{\pi} \log \frac{b_n - a_n - \frac{1}{2}K(d)}{1 - a_n} - \frac{\psi_{1,n}}{\pi} \log \frac{\frac{1}{2}K(d)}{b_n - 1}.$$

Comme $\psi_{i,n} \leq D$ $(i = 1, 2)$, le premier membre est majoré à l'aide de D, $K(d)$, $K_1(d, D, L)$, en définitive, à l'aide de d, D, L [*cf.* (10')]. La constante d'intégration $|N_n|$ pourra donc être majorée en fonction des mêmes paramètres, et nous pouvons écrire, en posant $g_n(t) = z_n(t) + \frac{\psi_{1,n}}{\pi} \log(t - b_n)$ et pour résumer l'ensemble des résultats qui précèdent :

$$|g_n(t)| \leq \text{borne dépendant de } d, D, L; \qquad |t - b_n| \leq \frac{K(d)}{2},$$

l'inégalité précédente étant valable *quel que soit* n. Rappelons que d'après sa définition même, $g_n(t)$ se présente sous la forme

$$g_n(t) = M_n(t - b_n) + \sqrt{t - b_n}\, \mathfrak{M}_n(t - b_n) + N_n,$$

M_n et $\mathfrak{M}_n$ désignant des fonctions holomorphes dans le cercle γ_n.

9 *bis*. Rappelons enfin que le point $t = \infty$ de T_n est un point ordinaire de la fonction $\Omega_n(t)$; sa partie réelle Θ_n y est nulle, alors que sa partie imaginaire T_n y est négative (*cf.* J. K. 1, § 17). Cela montre que pour $t = \infty$, on a

$$\left| \frac{dz_n(t)}{df_n(t)} \right|_{t=\infty} = e^{-[T_n(t)]_{t=\infty}} = k_n > 1. \tag{11}$$

D'après cela, la condition de l'alinéa 4 de l'énoncé du problème de Helmholtz est satisfaite pour chaque configuration $\mathcal{C}_n$; nous allons retrouver directement ces propriétés des constantes k_n et des $\Omega_n(t)$. Remarquons à cet effet que l'on a, si t est étranger à l'image de $\widehat{BC}$ [*cf.* J. K. 1, § 14 *bis*],

$$\begin{aligned} \Omega_n(t) &= \Theta_n(t_1, t_2) + iT_n(t_1, t_2) \\ &= -\frac{i}{\pi} \sqrt{(t^2 - 1)(t - a_n)(t - b_n)} \int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_n(t')\, dt'}{\sqrt{(1 - t'^2)(t' - a_n)(b_n - t')(t - t')}}, \end{aligned} \tag{12}$$

où, rappelons-le, le radical en t est pris avec sa détermination arithmétique pour t réel et très grand, où le chemin d'intégration se réduit au segment réel, $-1 \leq t' \leq 1$, où le radical en t' est réel et positif et où la fonction $\Phi_n(t')$ est définie comme il suit. On a vu que $z = z_n(t)$ fait correspondre la ligne polygonale P_n et le segment réel $-1 \leq t' \leq 1$; soit $l_n(t')$ la fonction qui réalise cette correspondance, $l_n(t')$ étant, d'après cela, la longueur de la portion de P_n dont le segment d'extrémités -1 et t' est l'image. Reprenons alors la fonction $\Psi_n(l)$, définie au paragraphe 6; nous poserons

$$\Phi_n(t') = \Psi_n[l_n(t')], \qquad \text{pour} \quad t_{0,n} \leq t' \leq 1;$$
$$\Phi_n(t') = \Psi_n[l_n(t')] - \pi, \qquad \text{pour} \quad -1 \leq t' \leq t_{0,n}.$$

Rappelons encore que la fonction $\Phi_n(t')$ ainsi définie vérifie l'équation

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Phi_n(t')\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}} = 0. \tag{13}$$

Cela étant, $|a_n|$ et b_n vérifient (10'); si donc $|t|$ est supérieur à $K_1(d, D, L)$, [*cf.* (10')], on peut écrire le développement

$$\frac{\sqrt{(t^2-1)(t-a_n)(t-b_n)}}{t-t'} = t - \frac{a_n+b_n-2t'}{2} + \frac{1}{t}\left(\text{série entière en } \frac{1}{t}\right),$$

absolument convergent. Portons alors la valeur du premier membre dans (12) et intégrons terme à terme; compte tenu de (13), on trouve dans le voisinage de $t=\infty$ ([10])

$$\Omega_n(t) = -\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{(a_n+b_n-2t')}{2} \frac{\Phi_n(t')\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}} + \frac{1}{t}\left(\text{série entière en } \frac{1}{t}\right)$$
$$= -\frac{i}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{t'\Phi(t')\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}} + \dots.$$

Comme nous l'avons prévu, la formule précédente montre bien que $t=\infty$ est un point ordinaire de $\Omega_n(t)$ qui se réduit, pour $t=\infty$ à une imaginaire pure;

([10]) Des raisonnements analogues à ceux du paragraphe 9, et que nous omettons pour abréger l'exposé, permettraient de préciser le raisonnement du texte; on verrait ainsi que dans le voisinage de $t=\infty$, on peut écrire :

$$z_n(t) = -k_n \frac{\psi_{1,n}+\psi_{2,n}}{\pi} \log t + z_{n,\infty}\left(\frac{1}{t}\right),$$

ou $z_{n,\infty}\left(\frac{1}{t}\right)$ désigne une fonction de $\frac{1}{t}$ holomorphe et assujettie à vérifier l'inégalité

$$\left|z_{n,\infty}\left(\frac{1}{t}\right)\right| \leq M_1(d, D, L), \qquad \text{pour} \quad |t| \geq 2K_1(d, D, L), \qquad (n = 1, 2, \dots, \infty)$$

où $M_1(d, D, L)$ est une constante convenable, fonctionnelle de ses arguments. Remarquons aussi que le raisonnement du texte ne suppose rien au sujet de l'allure limite de $\Phi_n(t')$; on utilise uniquement le fait que les intégrales où $\Phi_n(t')$ figure sous le signe $\int$ sont uniformément bornées en module quel que soit n.

d'un autre côté, les inégalités (10′) permettent d'en déduire, eu égard au fait que $[\Phi_n(t')]<\pi$,

$$|\Omega_n(t)|_{t=\infty}=\tfrac{1}{2}|T_n(t)|_{t=\infty}\leq\int_{-1}^{+1}\frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)}\,|1+K(d)-t'|\,|t'+1+K(d)|}.$$

Aussi, $|T_n(t)|_{t=\infty}$ est borné; par suite l'ensemble des constantes positives k_n[*cf.* (11)] est tel que

$$K_3(d)\leq k_n\leq K_2(d)\qquad (n=1,2,\ldots,\infty), \tag{14}$$

où K_2 et K_3 sont des constantes positives convenables. On peut, d'ailleurs, prendre $K_2(d)=1$ [*cf.* (11)]. D'un autre côté, on voit aisément que $|T_n(\infty)|\leq\frac{\pi}{2K(d)}$.

Remarque. — Notons, en passant, que (13) conduit à une autre égalité qui nous sera utile. Remplaçons dans (13) $\Phi_n(t')$ par sa valeur en fonction de $\Psi_n[l_n(t')]$; il vient

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\Psi_n[l_n(t')]\,dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}}=\pi\int_{-1}^{l_{0,n}}\frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}}.$$

On en déduit, eu égard à (8),

$$\varphi\int_{-1}^{+1}\frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}}\leq\pi\int_{-1}^{l_{0,n}}\frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}}$$
$$\leq(\pi-\varphi)\int_{-1}^{+1}\frac{dt'}{\sqrt{(1-t'^2)(b_n-t')(t'-a_n)}}.$$

Ces inégalités établissent l'existence d'une constante $\varepsilon(d,\varphi)$, dépendant de ses deux arguments, positive, non nulle tant que $d\neq 0$, $\varphi\neq 0$, telle que [*cf.* (10′)]

$$-1+\varepsilon(d,\varphi)\leq l_{0,n}\leq 1-\varepsilon(d,\varphi). \tag{14′}$$

10. Passons maintenant à l'étude de la correspondance $z=z_n(t)$ sur le segment réel $-1\leq t_1\leq t_2\leq 0$. En raison de l'importance de ce point, nous reproduirons en partie les raisonnements, déjà exposés dans ma Thèse, qui conduisent au résultat que nous avons en vue (11). Considérons d'abord un domaine borné, simplement connexe Γ, situé dans le plan $z=x+iy$ et soit Γ' le contour qui le limite et que, pour plus de simplicité, nous supposerons être une courbe simple de Jordan. Supposons ensuite que la fonction $z=z(t)$ réalise l'application conforme de Γ sur le demi-plan supérieur $\mathfrak{S}$ de la variable complexe t. Soient : t_1, t_2, t_3, t_4, les affixes réels de quatre points de l'axe réel

(11) Signalons que plusieurs raisonnements du texte dérivent de ceux qu'a utilisés M. J. Leray.

du plan t, tels que $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$; α_1, α_2, α_3, α_4 les images respectives de t_1, t_2, t_3, t_4; d'après cela, les points α_1, α_2, α_3, α_4 sont situés sur Γ' et sont rencontrés dans cet ordre lorsqu'on parcourt Γ' dans le sens positif. Nous désignerons par $\Lambda\left(\overset{\frown}{\alpha_2\alpha_3}, \overset{\frown}{\alpha_4\alpha_1}\right)$ la plus courte longueur des chemins tracés dans le plan z intérieurement à Γ et joignant un point de $\overset{\frown}{\alpha_2\alpha_3}$ à un point de $\overset{\frown}{\alpha_4\alpha_1}$. On a alors ([12]) :

$$\frac{\Lambda^2}{\sigma} \leq \frac{4\pi}{\left|\log \frac{1}{r}\right|}, \tag{15}$$

où σ désigne l'aire intérieure de Γ, où r est le rapport anharmonique des points t_3, t_2, t_4, t_1 pris dans cet ordre

$$r = \frac{t_4 - t_3}{t_4 - t_2}\,\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} > 0; \tag{15'}$$

on suppose, de plus, que

$$r \leq \frac{1}{2}. \tag{15''}$$

11. On observera que le lemme ci-dessus ne s'applique qu'aux domaines Γ bornés, dont l'aire est finie; voici comment on peut procéder pour l'appliquer aux domaines $\mathfrak{A}_n$, lesquels sont simplement connexes mais non bornés. Construisons la sphère de Riemann Σ_n dont le diamètre sera égal à la longueur L_n de la ligne polygonale P_n et tangente au plan Oxy en un point quelconque M' de P_n; nous effectuerons la projection stéréographique de $\mathfrak{A}_n$ sur Σ_n en prenant pour pôle de projection le point de Σ_n diamétralement opposé à M'. On vérifie aisément que l'aire σ_n de l'image de $\mathfrak{A}_n$ est telle que

$$\sigma_n \leq \frac{\pi L_n^2}{2} \leq \frac{\pi L^2}{2}. \tag{16}$$

Soit M un point quelconque de la portion BM' de P_n; nous appellerons y et y' les ordonnées respectives des points M et M', t et t', les affixes (réels) des images de M et M' dans le domaine $\mathfrak{D}$. Désignons alors par α_2, α_3, α_4 respectivement les images des points B, M et M' sur Σ_n; nous prendrons pour α_1 l'image du point $x = -\infty$ de $\mathfrak{A}_n$. Cela revient à prendre, eu égard aux conventions du précédent paragraphe,

$$t_1 = -\infty, \qquad t_2 = -1, \qquad t_3 = t, \qquad t_4 = t'$$

en sorte que [*cf.* (15')]

$$r = \frac{t' - t}{t' + 1};$$

([12]) *Cf.* J. K. 1, § 20.

l'arc $\widehat{\alpha_2\alpha_3}$ ne sera autre que l'image sur Σ_n de la portion BM de P_n alors que $\widehat{\alpha_4\alpha_1}$ comprendra l'ensemble des images (sur Σ_n) de la portion M'C de P_n, de $\lambda_{1,n}$ et de μ_1. On vérifie immédiatement que la condition (15″) est satisfaite si $t > \frac{1}{2}$ [donc, *a fortiori*, si $t' > \frac{1}{2}$, puisque $t' > t$; nous avons vu que $y_n(t)$ est une fonction croissante de son argument lorsque t varie de -1 à 1 et nous avons supposé d'autre part que $y' = y_n(t') > y_n(t) = y$ (13)] et si $t' - t \leq \frac{1}{2}$; on a alors, en effet,

$$0 \leq r \leq (t' - t) \leq \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Une discussion élémentaire, que le lecteur trouvera développée tout au long au paragraphe 24 de J. K. 1, montre que l'on a

$$\Lambda\left(\widehat{\alpha_2\alpha_3}, \widehat{\alpha_4\alpha_1}\right) \geq \frac{y_n(t') - y_n(t)}{2} > 0. \tag{18}$$

Compte tenu de (16), (17) et (18), l'inégalité fondamentale (15) s'écrit :

$$|y_n(t') - y_n(t)| \leq \frac{2\sqrt{2}\,\pi L}{|\log(t' - t)|^{\frac{1}{2}}} \qquad \left(t' - t \leq \frac{1}{2}\right), \tag{19}$$

pourvu que $t \geq \frac{1}{2}$. Pour se débarrasser de la restriction $t \geq \frac{1}{2}$ on pourra procéder comme il suit. Posons

$$t_1 = t, \qquad t_2 = t', \qquad t_3 = 1, \qquad t_4 = \infty,$$

les paramètres t et t' ayant la même signification que ci-dessus. On trouve alors

$$r = \frac{t' - t}{1 - t}.$$

Il est clair que l'inégalité (15″) sera encore satisfaite si $t \leq \frac{1}{2}$ et $t' - t \leq \frac{1}{4}$; alors

$$0 \leq r \leq 2(t' - t) \leq \frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, $\widehat{\alpha_2\alpha_3}$ devient l'image sur Σ_n de la portion M'C de P_n, alors que $\widehat{\alpha_4\alpha_1}$ comprend l'ensemble des images (sur la même sphère) de la portion BM de P_n, de $\lambda_{2,n}$ et de μ_2. Le raisonnement s'achève alors comme ci-dessus et aboutit encore à l'inégalité (19), valable, cette fois pour $t \leq \frac{1}{2}$; par suite, l'inégalité en

(13) Le symbole $y_n(t)$ désigne ici la partie imaginaire de la fonction $z_n(t) = x_n(t) + iy_n(t)$ pour t réel et tel que : $-1 \leq t \leq 1$; nous abandonnons donc, provisoirement et pour abréger les écritures, la notation $t = t_1 + it_2$.

cause est valable quel que soit t, pourvu que t' et t appartiennent à l'intervalle $-1 \leq t' \leq 1$ et que $t' - t \leq \frac{1}{4}$.

Cela posé, observons que d'après les conventions d'écriture adoptées au paragraphe 1, la partie réelle $x_n(t)$ de $z_n(t)$ pour t réel et compris entre -1 et 1 s'écrit :

$$x_n(t) = x_n[y_n(t)].$$

Il vient donc, d'après (3) et (19),

$$|x_n(t) - x_n(t')| = |x_n[y_n(t)] - x_n[y_n(t')]| \leq \cot\varphi\, |y_n(t) - y_n(t')| \leq \frac{2\sqrt{2}\,\pi L \cot\varphi}{|\log(t'-t)|^{\frac{1}{2}}}.$$

On tire de là et de (19)

$$(20)\quad |z_n(t) - z_n(t')| \leq |x_n(t) - x_n(t')| + |y_n(t) - y_n(t')| \leq \frac{2\sqrt{2}\,\pi L(1+\cot\varphi)}{|\log(t'-t)|^{\frac{1}{2}}} \quad \begin{cases} t' - t \leq \frac{1}{4} & (n = 1, 2, \ldots, \infty), \\ -1 \leq t \leq t' \leq 1. \end{cases}$$

L'inégalité (20) permet d'énoncer le résultat suivant :

Toute solution $z_n(t)$ du problème de Helmholtz, posé relativement à la configuration $\mathcal{C}_n$, définie au paragraphe 6, *possède sur le segment réel $-1 \leq t_1 \leq 1$, $t_2 = 0$ le même module de continuité* (20) *indépendant de n.*

En d'autres termes :

Les fonctions complexes $z_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$ sont également continues sur le segment réel $-1 \leq t_1 \leq 1$, $t_2 = 0$.

Les résultats rappelés au cours de ce chapitre vont maintenant nous servir à justifier la convergence du procédé d'approximation dont le principe a été esquissé au paragraphe 4.

III. — Passage à la limite. Théorème d'existence.

12. Faisons maintenant croître n indéfiniment; notre but est d'imiter les raisonnements de MM. Montel et Caratheodory et de faire voir que de la suite infinie $z_n(t)$ on peut extraire une suite infinie partielle, convergeant uniformément (14) dans le demi-plan supérieur $t_2 \geq 0$, vers une fonction limite $z(t)$ qui résout le problème de Helmholtz posé relativement au squelette donné $\mathcal{C}$ (*cf.* §§ 1, 2, 3).

---

(14) On observera que $z_n(t)$ présente des singularités dans son domaine de définition; on précisera dans la suite ce qu'il faut entendre par convergence en chacun des points en cause.

13. En premier lieu, observons que le domaine $\mathfrak{A}_n (n = 1, 2, \ldots, \infty)$ est étranger à la portion du plan z, limitée par P_n, les droites d'équations $y = y_1$ et $y = y_2$ (*cf.* § 1) et contenant le point $x = +\infty$; cela résulte immédiatement de la propriété rappelée au début du paragraphe 9 : l'intersection de $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$ avec toute droite d'équation $y = \text{const.}$ se réduit à un point unique. D'un autre côté, la ligne polygonale P_n peut être enfermée dans le rectangle borné, $-L \leq x \leq L$, $y_2 \leq y \leq y_1$. Par conséquent, il existe un domaine du plan z étranger à toute la suite des domaines $\mathfrak{A}_n (n = 1, 2, \ldots, \infty)$ ([15]). Cela veut dire que la suite $z_n(t)$ admet dans son domaine commun de définition $t_2 \geq 0$ une infinité de valeurs exceptionnelles.

14. Le théorème fondamental de M. P. Montel ([16]) montre alors, eu égard aux résultats du précédent paragraphe, que l'ensemble des fonctions $z_n(t)$, univalentes et holomorphes dans $\mathfrak{T}$, forme dans le domaine une famille normale.

Remarque. — Observons que la conclusion précédente peut être justifiée aussi comme il suit, d'une manière plus élémentaire mais aussi plus longue. Il suffit de montrer que les $z_n(t)$ sont uniformément bornées en module dans tout domaine Δ de $\mathfrak{T}$ dont la frontière Δ' ne contient pas les points a_n, b_n, ∞. Supposons d'abord que Δ' soit étrangère au segment $t_2 = 0$, $-1 \leq t_1 \leq 1$. La formule (12) montre que l'ensemble des fonctions $\Omega_n(t)$ est borné uniformément en module sur l'ensemble $\Delta + \Delta'$. En effet, d'après (10'), il existe une longueur fixe, δ dépendant de d, D, L et du contour Δ' lui-même qui majore la distance entre un point quelconque de l'ensemble $\Delta + \Delta'$ et un point du segment réel $a_n \leq t_1 \leq b_n$, $t_2 = 0$; de même, il existe une longueur constante δ_1 non nulle, dépendant de Δ seul, qui minore la distance entre un point quelconque de $\Delta + \Delta'$ et un point du segment réel $-1 \leq t_1 \leq 1$, $t_2 = 0$. Comme le point $t = 0$ appartient au segment $t_2 = 0$, $-1 \leq t_1 \leq 1$, le module $|t|$ de l'affixe d'un point de $\Delta + \Delta'$ vérifie l'inégalité

$$|t| \leq \delta.$$

Compte tenu de ces remarques, (12) donne [*cf.* (10')]

$$|\Omega_n(t)| \leq \frac{\delta^2}{K(d)\,\delta_1} \int_{-1}^{+1} \frac{dt'}{\sqrt{1 - t'^2}} = \frac{\pi \delta^2}{\delta_1 K(d)} = M,$$

([15]) Ce fait est évident dans le cas où μ_1 et μ_2 sont à distance finie ; car aucun $\mathfrak{A}_n$ n'atteint alors la portion infinie du plan z extérieure aux bords μ_1 et μ_2 de $\mathfrak{C}$. C'est, du reste, cette hypothèse que nous avons adoptée pour simplifier notre exposé [*cf.* les inégalités (10)]. Mais la démonstration du texte offre l'avantage de pouvoir s'appliquer au cas limite où les droites μ_1 et μ_2 sont rejetées à l'infini. Il ne faut pas oublier, d'autre part, que l'on a $z_n(t_{0,n}) = 0$, quel que soit n, l'origine des coordonnées dans le plan z varie donc, en général avec n mais cela de façon à rester intérieure a une bande ne contenant pas les points B et C.

([16]) *Leçons sur les familles normales des fonctions analytiques*, 1927, p. 61-64.

inégalité qui majore $|\Omega_n(t)|$ en chaque point t du domaine $\Delta + \Delta'$. D'après ce que nous avons vu au paragraphe 9, il en résulte

$$\left|\frac{dz_n(t)}{df_n(t)}\right| = |e^{i\Omega_n(t)}| \leq e^{M}.$$

Il serait d'ailleurs aisé d'étendre cette conclusion au cas où l'un des nombres $|a_n|$ ou b_n (ou les deux à la fois) ne serait pas supérieurement borné; de même, Δ' pourrait contenir $t = \infty$ (*cf.* § 9^{bis}), point ordinaire des $\Omega_n(t)$.

D'un autre côté, en combinant (9) et (10′) et en remarquant que $\psi_{j,n} \leq D$, $j = 1, 2$, il vient, sur $\Delta + \Delta'$,

$$\left|\frac{df_n(t)}{dt}\right| = \frac{\psi_{1,n} + \psi_{2,n}}{\pi}\left|\frac{t - t_{0,n}}{(t - a_n)(t - b_n)}\right| \leq \frac{2D\delta}{\pi\delta_1^2}.$$

Des deux dernières égalités il résulte que sur l'ensemble $\Delta + \Delta'$ on a

$$\left|\frac{dz_n(t)}{dt}\right| \leq \frac{2D\delta}{\pi\delta_1^2} e^{M}.$$

Un raisonnement, devenu classique, de M. P. Montel permet d'en déduire que la suite infinie des fonctions $z_n'(t)$, holomorphes dans $\Delta + \Delta'$ est normale dans ce domaine fermé puisqu'elle y est uniformément bornée. Il serait aisé d'en conclure que la famille $z_n(t)$ possède la même propriété; en reprenant les raisonnements du paragraphe 9 on montrerait que les $|z_n(t)|$ sont bornées, quel que soit n, en un point du domaine Δ; on étend facilement la conclusion a un domaine Δ dont Δ' contiendrait une portion de $t_2 = 0$, $-1 \leq t_1 \leq 1$ ([17]).

15. Cela posé, reprenons les paramètres a_n, b_n, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$ qui correspondent à la fonction $z_n(t)$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$). D'après (10′), on peut extraire de la

([17]) Pour préciser ce point, on partira de la relation

$$z_n(t) = \int_{t_0}^{t} e^{i\Omega_n(t)} \frac{df_n(t)}{dt}\, dt = \int_{t}^{1+\frac{1}{2}K(d)} e^{i\Omega_n(t)}\, df_n(t) + \int_{1+\frac{1}{2}K(d)}^{t} e^{i\Omega_n(t)}\, df_n(t),$$

le chemin d'intégration $\mathcal{L}$ de la deuxième intégrale du second membre étant choisi de manière à laisser à distance finie le segment $-1 \leq t_1 \leq 1$, $t_2 = 0$ et les points $t = a_n$ et $t = b_n$. Par exemple, prenons pour $\mathcal{L}$ un arc du cercle $|t| = 1 + \frac{1}{2}K(d)$; les relations du texte permettent de former le long de $\mathcal{L}$ une majorante de $|\Omega_n(t)|$ et $\left|\frac{df_n(t)}{dt}\right|$ ne dépendant que de d, D et L [*cf.* (10′)]. L'ensemble de ces faits montre qu'il existe une borne supérieure de

$$\left|\int_{1+\frac{1}{2}K(d)}^{t} e^{i\Omega_n(t)}\, df_n(t)\right|,$$

fonctionnelle compliquée de d, D, L. Comme par ailleurs, on a formé au paragraphe 9 une majorante

suite infinie a_n au moins une suite partielle infinie convergeant vers une limite a (18)

$$\lim_{n=\infty} a_n = a, \qquad -K_1(d, D, L) \leqq a \leqq -K(d) - 1.$$

Soit la suite b_n correspondant à la suite infinie $z_n(t)$ que nous venons de former. En répétant le raisonnement qui précède, on pourra former une suite b_n telle que

$$\lim_{n=\infty} b_n = b, \qquad 1 + K(d) \leqq b \leqq K_1(d, D, L).$$

Le raisonnement s'étend sans peine aux paramètres restants k_n, $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$; d'après les inégalités (14) et celles rappelées au renvoi (9), on peut définir, au moins une suite d'indices n de manière que

$$\lim_{n=\infty} k_n = k; \qquad \lim_{n=\infty} \psi_{1,n} = \psi_1; \qquad \lim_{n=\infty} \psi_{2,n} = \psi_2,$$

avec les conditions [*cf.* le renvoi (9) et (14)]

$$K_3(d) \leqq k \leqq K_2(d_1); \qquad E(d, y_1 - y_2) \leqq \psi_j \leqq D \quad (j = 1, 2).$$

Il résulte de là [*cf.* le paragraphe 7 et, au paragraphe 9 *bis*, l'inégalité (14′)], qu'on peut trouver dans la suite infinie $z_n(t)$ qu'on vient de définir une suite partielle telle que

$$\lim_{n=\infty} t_{0,n} = t_0, \qquad -1 + \varepsilon(d, \varphi) \leqq t_0 \leqq 1 - \varepsilon(d, \varphi),$$

donc, par voie de conséquence,

$$\lim_{n=\infty} \varphi_{1,n} = \varphi_1; \qquad \lim \varphi_{2,n} = \varphi_2,$$

avec les conditions

$$0 < \varphi_1 \leqq \text{const.}; \qquad 0 < \varphi_2 \leqq \text{const.}$$

les constantes du second membre dépendant de d, D et φ.

---

dépendant des mêmes quantités de $\int_{t_0}^{1+\frac{1}{2}K(d)} e^{i\Omega_n(t)}\, df_n(t)$, nous pouvons conclure que sur $\mathcal{L}$

$$|z_n(t)| \leqq, \quad \text{borne dépendant de } d, D, L, \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Cela justifie l'assertion du texte; car les $|z_n(t)|$, étant bornées sur la frontière du demi-cercle supérieur $|t| = 1 + \frac{1}{2}K(d)$, le seront à l'intérieur. D'une manière plus générale, on peut affirmer que l'image $z = z_n(t)$ de tout point t est à une distance finie de $\widehat{BC}$, la borne supérieure de cette distance étant une fonctionnelle convenable des longueurs d, D, L, de $|t|$, mais indépendante de n.

(18) Pour simplifier les écritures, nous désignerons encore par a_n la suite extraite de la suite primitive a_n, sans changer la notation de l'indice. A l'avenir, nous adopterons la même convention et nous affecterons toujours du même indice n les suites partielles infinies que nous aurons à former.

Il en résulte que la suite des domaines F_n définis au paragraphe 7 au moyen des quatre paramètres $\psi_{1,n}$, $\psi_{2,n}$, $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n}$ converge vers un domaine limite F, caractérisé par les constantes ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2. De même, les domaines $\mathfrak{C}_n$ correspondants, tendent, lorsque n augmente indéfiniment vers un domaine limite $\mathfrak{C}$, bien défini par a et b. Enfin, $f_n(t)$ tend vers la fonction limite $f(t)$

$$f(t) = -\frac{\psi_2}{\pi}\log\frac{t-a}{t_0-a} - \frac{\psi_1}{\pi}\log\frac{t-b}{b-t_0} + i\psi_1. \tag{21}$$

16. La suite des entiers n ayant été définie comme il a été dit au précédent paragraphe, envisageons la famille correspondante de fonctions univalentes $z_n(t)$. C'est une suite infinie partielle, extraite de la suite envisagée au paragraphe 14; la suite $z_n(t)$ est donc normale dans le domaine Δ (*cf.* § 14), et l'on peut donc en extraire une suite infinie partielle, que nous désignerons encore par $z_n(t)$, qui converge uniformément dans $\Delta + \Delta'$ vers une fonction limite $z(t)$, univalente et holomorphe dans le domaine $\Delta + \Delta'$. Le résultat subsiste, d'après le théorème de Stieltjes, pour l'*intérieur* de tout domaine Δ où les fonctions $z_n(t)$ sont bornées, en particulier pour un Δ dont Δ' contiendrait le segment réel $t_2 = 0$, $-1 \leq t_1 \leq 1$. Comme les fonctions $z_n(t)$ sont également continues sur ce segment réel, on peut, d'après le théorème d'Arzela, choisir cette suite de manière qu'elle converge uniformément sur tout le segment réel en cause, vers la fonction limite $z(t)$, celle-ci étant, d'ailleurs, assujettie à vérifier l'inégalité

$$|z(t) - z(t')| \leq \frac{2\sqrt{2}\,\pi(1+\operatorname{cotg}\varphi)\,L}{|\log(t-t')|^{\frac{1}{2}}},$$

où t et t' sont deux nombres réels de l'intervalle $(-1, 1)$ tels que $|t - t'| \leq \frac{1}{4}$ [*cf.* le paragraphe 11 et notamment, l'inégalité (20)]. Je dis que la fonction $z(t)$ ainsi définie résout le problème de Helmholtz posé relativement au squelette $\mathcal{C}$. La suite du mémoire sera consacrée à la vérification de ce fait, vérification que nous effectuerons en nous inspirant des raisonnements de M. Montel.

17. De la façon même dont on a formé la suite $z_n(t)$ il résulte que l'élément limite $z(t)$ de cette suite est analytique le long de chacun des segments réels : $t_2 = 0$, $-\infty < t_1 < a$, $b < t_1 < \infty$. En effet, la partie imaginaire de chacune des fonctions $\frac{dz_n(t)}{dt}$ est nulle sur les segments $t_2 = 0$, $-\infty \leq t_1 \leq a_n$, $b_n \leq t_1 \leq \infty$; il en résulte que l'élément limite $\frac{dz}{dt}$ possédera la même propriété sur les segments réels, limites des segments précédents et cela suffit pour justifier notre assertion. On voit aussi que la partie imaginaire de $z(t)$ demeure constante pour $t_2 = 0$ $(-\infty < t < a, b < t < \infty)$. Ce dernier point, d'ailleurs à

peu près évident *a priori*, résulte aussi de ce que la fonction $z_n(t)$ fait correspondre à $t_2 = 0$, $b_n < t_1 < \infty$ la droite μ_4 du plan z, en sorte que

$$\text{imag.}\,[z_n(t_1 + it_2) - z_n(1)] = d_1 \quad \text{pour } t_2 = 0 \qquad (b_n < t_1 < \infty).$$

En faisant $n = \infty$ dans la relation ci-dessus, on retrouve le résultat à établir (18).

18. D'après ce qu'on a vu, $\left|\frac{dz_n(t)}{df_n(t)}\right| = 1$ sur les images de $\lambda_{1,n}$ et $\lambda_{2,n}$; il en résulte que la fonction limite $\frac{dz(t)}{df(t)}$ vérifiera la même condition isopérimétrique sur chacun des segments

$$t_2 = 0, \qquad 1 < t_1 < b, \qquad a < t_1 < -1;$$

$\frac{dz(t)}{df(t)}$ sera donc analytique sur chacun de ces segments et il en sera de même de $z(t)$ puisque $\frac{df}{dt}$ est analytique.

Les conclusions des deux derniers paragraphes prouvent que le domaine de définition Δ de la suite des fonctions holomorphes $z_n(t)$ [*cf.* § 14] peut atteindre, et même traverser, les portions des images de μ_1, μ_2, $\lambda_{1,n}$, $\lambda_{2,n}$, ne contenant aucun point singulier tels que $t = \infty$; $t = a_n$, $t = b_n$, $t = \pm 1$. D'après (10'), de telles portions de l'axe $t_2 = 0$ existent; il suffira de prendre, par exemple,

$$1 + \frac{K(d)}{3} \leq |t_1| \leq 1 + \frac{2}{3}K(d) \quad \text{et} \quad K_1(d, D, L) \leq |t_1| \leq pK_1(d, D, L),$$

où p est un nombre positif arbitrairement grand. D'ailleurs, d'après le théorème de Stieltjes, la suite $z_n(t)$, après la suppression d'un certain nombre de termes du début, convergera uniformément dans tout domaine Δ étranger aux points $t = a$, $t = b$, $t = \infty$.

19. Comme $\lim_{n=\infty} b_n = b$, on peut choisir un entier p assez grand pour que pour $n \geq p$, le cercle γ de centre $t = b$ et de rayon $\frac{1}{4}K(d)$ soit intérieur à tous les cercles γ_n correspondants (*cf.*, pour les notations, le paragraphe 9). D'après ce que nous avons vu, les fonctions $M_n(t - b_n)$ et $\mathfrak{M}_n(t - b_n)$ seront holomorphes dans γ et leurs modules y seront uniformément bornés. Ces fonctions convergent donc uniformément dans γ vers des fonctions limites holomorphes $M(t - b)$ et $\mathfrak{M}(t - b)$. De même, la suite N_n étant uniformément bornée, converge vers la valeur limite N.

---

(18) Il n'en résulte pas que imag. $z_n(t_1)$ $(b_n < t_1 < \infty)$ soit indépendant de n; car la position de l'origine des coordonnées O, située dans le plan z sur la ligne ρ_n, variable avec n, est l'image du point $t_{0,n}$ (variable avec n) au moyen de la correspondance $z_n(t)$, variable aussi avec n. [*cf.* le renvoi (13)] que lorsque n varie, O peut se déplacer par rapport au squelette $\mathcal{C}$.

Il en résulte que la suite $g_n(t)$ converge uniformément dans γ vers une fonction limite $g(t)$ et comme $\lim_{n=\infty}\psi_{1,n}=\psi_1$ et [*cf.* § 9]

$$z_n(t)=-\frac{\psi_{1,n}}{\pi}\log(t-b_n)+g_n(t),$$

on peut écrire, en passant à la limite ([20]),

$$g(t)=\mathrm{M}(t-b)+\sqrt{t-b}\,\mathfrak{M}(t-b)+\mathrm{N},$$
$$z(t)+\frac{\psi_1}{\pi}\log(t-b)=g(t),\qquad (t-b)\leq\frac{1}{4}\mathrm{K}(d).$$

Compte tenu de (21), cela montre que dans la moitié supérieure de γ

$$z[t(f)]=f+\text{série entière en }\frac{1}{f};$$

un résultat analogue sera valable dans un cercle de centre a et de rayon $\frac{1}{4}\mathrm{K}(d)$.

Tout pareillement, on établirait, en utilisant les résultats rappelés au paragraphe 9 *bis* qu'à l'infini dans $\mathfrak{C}$

$$z[t(f)]=kf+\text{série entière en }\frac{1}{f},$$

où le coefficient k a été défini au paragraphe 15.

20. Il résulte des deux derniers paragraphes que la partie réelle $\mathcal{R}z(t)$ de $z(t)$ varie de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque t_1 varie de $+\infty$ à b ou de $-\infty$ à a pour $t_2=0$. La quantité imag. $z(t_1)$ reste alors constante. De plus, lorsque le point d'affixe t décrit l'un des segments réels $t_2=0$, $a\leq t_1\leq -1$, $1\leq t_1\leq b$, le point d'affixe $z=z(t_1)$ du plan z décrit une courbe analytique, λ_2 ou λ_1, joignant l'un des points B et C au point à l'infini du côté des x positifs; le long de λ_1 et de λ_2 la condition isopérimétrique (6) sera satisfaite. Enfin, le comportement de $z(t)$ aux points $t=a$, $t=b$, $t=\infty$ du domaine $\mathfrak{C}$, ou, ce qui revient au même, le comportement de la fonction $z=z(f)$ en les points à l'infini du domaine F, est conforme aux conditions de l'alinéa 4 du paragraphe 3.

21. Dans chaque domaine Δ la fonction $z(t)$ est, on l'a vu, la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions holomorphes univalentes; il s'ensuit que $z(t)$ est univalente dans chaque Δ (*cf.* M. Montel, *loc. cit.*, p. 100-101).

([20]) Il serait aisé de montrer en toute rigueur que la suite $g_n(t)$, définie à partir de la suite $z_n(t)$, cette dernière suite ayant été fixée une fois pour toutes au paragraphe 16, converge uniformément dans γ. Mais pour obvier aux développements que nécessiterait une telle démonstration, il suffirait le cas échéant, d'extraire de la suite $z_n(t)$ une suite infinie partielle $z_p(t)$, telle que la suite correspondante $g_p(t)$ converge dans γ. On procéderait ensuite de même pour les voisinages de $t=a$ et $t=\infty$.

Nous pouvons donc affirmer que la fonction $z(t)$ fait correspondre conformément à l'intérieur de $\mathfrak{T}$ un domaine $\mathfrak{A}$ d'un seul tenant, situé tout entier entre les droites données μ_1 et μ_2 et admettant pour frontière les courbes λ_1 et λ_2 analytiques, exemptes de singularités, sauf en B et C (dépourvues, notamment, des points doubles ou des points de rebroussement en vertu de la condition $\left|\frac{dz}{df}\right| \neq 0$, valable le long de chacune d'elles) le long desquelles $\left|\frac{dz}{df}\right| = 1$. D'après cela, la fonction $z(t)$ fournira une solution du problème de Helmholtz, posé relativement au squelette $\mathfrak{C}$ si nous montrons qu'au segment $t_2 = 0$; $-1 \leq t_1 \leq 1$, $z(t)$ fait correspondre dans le plan z l'arc de courbe $\overset{\frown}{BC}$ et cela de façon que cette correspondance ait lieu point par point et soit continue; la démonstration revient, au fond, à celle de M. Montel qu'on vient d'utiliser.

22. Montrons donc d'abord qu'à tout point d'affixe t_1 du segment réel $t_2 = 0$, $-1 \leq t_1 \leq 1$, correspond par $z(t)$ un point de $\overset{\frown}{BC}$. La suite $z_n(t)$ ayant été choisie comme il a été dit au paragraphe 16, soit M_n, l'image du point d'affixe t_1 par $z_n(t_1)$. Comme la suite $z_n(t)$ converge uniformément vers $z(t)$ sur l'intervalle réel considéré, la suite des points M_n, d'affixes respectifs $z_n(t_1)$ converge vers un point M *unique*, d'affixe $z(t_1)$; à partir d'un n assez grand, nous avons, quel que soit t_1, $-1 \leq t_1 \leq 1$ et aussi petit que soit le nombre $\varepsilon > 0$

$$M M_n = |z_n(t_1) - z(t_1)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Je dis que M est un point de $\overset{\frown}{BC}$. Désignons en effet, par (A, B) la distance des deux ensembles de points A et B; il s'agit de prouver que $(M, \overset{\frown}{BC}) = 0$. Sinon on aurait $(M, \overset{\frown}{BC}) = \delta > 0$. Mais chaque M_n est situé sur la ligne polygonale P_n de même indice; et la suite des P_n converge vers $\overset{\frown}{BC}$. Donc à partir d'un rang n assez élevé, on aurait

$$(M_n, \overset{\frown}{BC}) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On déduit des dernières inégalités $(M, \overset{\frown}{BC}) \leq \varepsilon$ quel que soit ε; cela contredit l'hypothèse $(M, \overset{\frown}{BC}) = \delta > 0$.

Ainsi, l'image de $t_2 = 0$, $-1 \leq t_1 \leq 1$ par $z(t)$ fait partie de BC. Réciproquement, les fonctions $y_n(t_1)$, parties imaginaires des $z_n(t_1) = x_n(t_1) + iy_n(t_1)$ sont strictement croissantes pour $-1 \leq t_1 \leq 1$; donc leur fonction limite $y(t_1)$ sera non décroissante et prendra toutes les valeurs comprises dans l'intervalle $y(-1) \leq y(t_1) \leq y(1)$. Il s'ensuit qu'à tout point de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ correspond au moins un point du segment réel.

Je dis qu'à un point de $\widehat{BC}$, il ne correspond qu'un point et un seul du segment; sinon, en effet, $z_n(t_1)$ convergerait uniformément vers une constante sur un intervalle fini du segment $t_2 = 0$, $-1 \leq t_1 \leq 1$, donc convergerait vers une constante dans tout son domaine d'existence, ce qui est absurde. Nous savons par ailleurs, qu'à un point du segment ne correspond qu'un point de $\widehat{BC}$; cela résulte de la continuité de $z(t)$ le long de $\widehat{BC}$. Ces remarques achèvent de justifier la proposition que nous avions en vue, concernant la correspondance entre l'arc $\widehat{BC}$ et son image dans $\mathfrak{S}$; du même coup, il est prouvé que le problème de Helmholtz, posé relativement au squelette $\mathcal{C}$ possède au moins une solution.

Remarque. — Des considérations analogues s'appliquent également au problème de Riemann ordinaire; elles permettent de construire, *a priori*, un module de continuité (valable jusque sur la frontière du domaine) de la fonction qui réalise l'application conforme du domaine donné sur un demi-plan et de simplifier ainsi, tout en les précisant, les raisonnements de MM. Montel et Carathéodory.

23. Les développements qui précèdent s'adaptent sans difficulté au cas particulier où la configuration $\mathcal{C}$ présenterait la symétrie par rapport à la droite équidistante des bords μ_1 et μ_2; on peut alors approcher $\mathcal{C}$ au moyen des configurations $\mathcal{C}_n$ offrant la même symétrie. Or, à chacun des squelettes $\mathcal{C}_n$ symétrique, on peut associer au moins une solution symétrique $z_n(t)$ du problème de Helmholtz correspondant.

Dès lors, un passage à la limite permet de justifier l'existence d'au moins une solution symétrique du problème de Helmholtz, posé pour la configuration symétrique $\mathcal{C}$ donnée.

SUR

LES VIBRATIONS DES FILS ÉLASTIQUES

ET DES FILS PARFAITS

PAR M. J. HAAG.

INTRODUCTION.

Le présent travail est une étude des *petites vibrations* des fils élastiques ou des fils parfaitement flexibles. Elle repose sur la théorie du trièdre mobile à deux paramètres,

Dans le cas du fil élastique, le trièdre est lié à l'une quelconque des sections droites du fil et dépend donc de l'abscisse curviligne s de cette section et du temps t. Dans le cas du fil parfait, le trièdre est constitué par les axes de Frenet; il dépend encore de s et t.

Dans un premier chapitre, j'établis les *équations générales des petits mouvements des fils élastiques*. J'étudie d'abord le cas exceptionnel où la fibre neutre est immobile, c'est-à-dire le cas des *vibrations torsionnelles*. Je montre qu'il existe une infinité de solutions, dont la seule intéressante est la vibration torsionnelle classique des tiges cylindriques. J'envisage ensuite le cas général et montre qu'il est subordonné à l'intégration d'un système de *douze équations aux dérivées partielles du premier ordre*. Ce système se décompose en *deux systèmes de six équations* dans le cas du *fil plan*. J'indique le principe de la détermination des mouvements *stationnaires* ou *entretenus*.

Dans le deuxième chapitre, j'établis de même les équations générales des *petits mouvements des fils parfaits*, en envisageant tout de suite le cas où il existe un *mouvement permanent* faisant glisser le fil sur lui-même. Le problème se ramène à un système de deux équations aux dérivées partielles d'ordres 2 et 4. Les variables se séparent dans le cas du *fil plan*. J'étudie aussi les mouvements d'un fil glissant sans frottement sur une surface.

Le Chapitre III est une courte étude du *flexible* rotatif ou coulissant.

Dans le Chapitre IV, j'applique la théorie générale du Chapitre I au *fil cylindrique* et à la *torsade*.

Le Chapitre V est consacré au cas important du *fil circulaire* et peut s'appliquer approximativement au *ressort à boudin* à spires très aplaties et au *spiral de montre*. Les fréquences propres sont déterminées par une équation transcendante compliquée, qui dépend des *liaisons imposées aux deux extrémités*, lesquelles donnent lieu à 36 combinaisons différentes.

Dans le Chapitre VI, j'étudie *l'équation de résonance* obtenue au chapitre précédent. Je donne des *formules asymptotiques* permettant le calcul de la fréquence, lorsque celle-ci n'est pas trop grande. La *résolution numérique* complète dans le cas des *vibrations planes du fil doublement encastré* me permet de contrôler la valeur pratique des dites formules asymptotiques. J'examine aussi le cas où l'angle au centre tend vers zéro, qui doit conduire au fil rectiligne. On trouve des solutions étrangères, qui s'expliquent par le fait que, pour chacune d'elles, *la tension ou les couples de flexion et de torsion deviennent infinis*. Le chapitre se termine par l'application à quatre *exemples concrets* ayant fait l'objet d'expériences déjà anciennes de M. Granier. L'accord est satisfaisant pour trois spiraux plans, mais pas pour le spiral cylindrique.

Le septième et dernier chapitre est consacré à quelques exemples de vibrations de fils parfaits. Je commence par étudier le cas du *fil pesant* ou de la *courroie de transmission*, en position verticale, horizontale ou oblique. Je traite un exemple numérique pour la courroie. Le cas de la *chaînette* est plus compliqué; il est cependant abordable dans les vibrations latérales. J'étudie aussi les vibrations d'un *fil tournant* et enfin d'un fil tendu sur une sphère, en totalité ou en partie.

Les questions d'Analyse soulevées par ces divers problèmes sont assez variées et font intervenir en particulier les *fonctions de Bessel* et la *fonction hypergéométrique*. J'ai eu aussi l'occasion d'utiliser certains travaux d'Émile Picard sur les équations différentielles.

CHAPITRE I.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PETITS MOUVEMENTS DES FILS ÉLASTIQUES.

1. *Choix du trièdre mobile.* — A chaque point M de la fibre neutre (Γ), nous ferons correspondre un trièdre trirectangle Mxyz choisi de la manière suivante.

La fibre neutre étant orientée, l'axe Mz sera dirigé suivant la *tangente positive*. Les axes Mx et My seront *invariablement liés à la section droite* du fil et choisis de telle manière qu'ils se confondent respectivement avec la normale principale et la binormale de la fibre neutre, quand le fil est dans sa position d'équilibre.

Nous appellerons s l'*abscisse curviligne* de M sur la fibre neutre, comptée à partir d'un point *matériel* déterminé de cette fibre. Il s'ensuit que si s est constant, M est aussi un point matériel déterminé de la fibre neutre, puisque la dilatation de celle-ci est pratiquement nulle (¹). Il y a toutefois exception dans le cas particulier des vibrations longitudinales d'un fil cylindrique, qui sera traité à part au Chapitre IV.

2. *Choix des paramètres.* — Le fil étant rapporté à un trièdre de référence déterminé, nous supposons que son mouvement est tel qu'il reste indéfiniment dans le voisinage d'une certaine position d'équilibre (Γ_0). Soient O le point de (Γ_0) correspondant au point M de (Γ) et $Ox_0y_0z_0$ le trièdre de Frenet en ce point. La déformation étant petite, le trièdre $Mxyz$ est voisin de $Ox_0y_0z_0$.

Nous appellerons u, v, w les coordonnées de M par rapport à $Ox_0y_0z_0$. Soit $Mx_1y_1z_1$ le trièdre déduit de $Ox_0y_0z_0$ par la translation $\overrightarrow{OM}$. Faisons tourner $Mx_1y_1z_1$ autour de Mx_1 jusqu'à ce que My_1 soit dans le plan xMy; soit λ l'angle mesurant cette rotation et soit $Mx_2y_2z_2$ la nouvelle position de $Mx_1y_1z_1$. L'axe My_2 est perpendiculaire à Mz_2 et à Mz. On peut donc amener Mz_2 sur Mz par une rotation autour de My_2; soit μ l'angle mesurant cette rotation, qui amène $Mx_2y_2z_2$ en $Mx_3y_3z_3$. L'axe Mz_3 se confondant avec Mz, on peut amener $Mx_3y_3z_3$ sur $Mxyz$ par une rotation de l'angle ν autour de Mz_3.

En utilisant les formules du changement de coordonnées résultant des trois rotations précédentes, on calcule aisément les cosinus directeurs des axes $Mxyz$ par rapport à $Mx_1y_1z_1$ (ou $Ox_0y_0z_0$); en voici le tableau :

	Ox_0	Oy_0	Oz_0
Mx.....	$\cos\mu\cos\nu$	$\cos\lambda\sin\nu + \sin\lambda\sin\mu\cos\nu$	$\sin\lambda\sin\nu - \cos\lambda\sin\mu\cos\nu$
My.....	$-\cos\mu\sin\nu$	$\cos\lambda\cos\nu - \sin\lambda\sin\mu\sin\nu$	$\sin\lambda\cos\nu + \cos\lambda\sin\mu\sin\nu$
Mz.....	$\sin\mu$	$-\sin\lambda\cos\mu$	$\cos\lambda\cos\mu$

Si les deux trièdres $Mxyz$ et $Ox_0y_0z_0$ ont des orientations infiniment voisines, les cosinus directeurs de Mz sont infiniment voisins de 0, 0, 1; donc, μ et λ sont très petits. Les cosinus directeurs de My sont infiniment voisins de 0, 1, 0; donc, ν est très petit (²).

Les six variables u, v, w, λ, μ, ν *déterminent la position du trièdre* $Mxyz$ *par rapport à* $Ox_0y_0z_0$. Ce sont des fonctions des variables indépendantes s et t. Elles sont toutes très petites et seront regardées comme des infiniment petits du premier ordre. Dans tout ce qui va suivre, nous conviendrons de *négliger les infiniment petits du second ordre*. Moyennant quoi, les cosinus directeurs de Mx, My, Mz ont les valeurs respectives suivantes

$$(1) \qquad 1, \quad \nu, \quad -\mu; \qquad -\nu, \quad 1, \quad \lambda; \qquad \mu, \quad -\lambda, \quad 1.$$

(¹) *Cf.* J. Haag. *Théorie des fils élastiques* (*Journ. de Math.*, t. XXV, 1; 1946; n° 30).

(²) Les angles d'Euler ne possèdent pas cette propriété.

3. Si s varie et joue le rôle du temps, le trièdre $Ox_0y_0z_0$ a pour rotations et translations o, q_0, r_0, o, o, 1 ; $q_0 = \frac{1}{R}$ désignant la courbure et $-r_0$ la torsion de (Γ_0). Le vecteur vitesse de M a pour composantes

$$\frac{\partial u}{\partial s} + q_0 w - r_0 u, \quad \frac{\partial v}{\partial s} + r_0 u, \quad \frac{\partial w}{\partial s} + 1 - q_0 u.$$

Or, ce vecteur est le vecteur unitaire de Mz. Les composantes ci-dessus sont donc les cosinus directeurs de Mz. En se reportant aux formules (1), on en déduit

$$\lambda = -\frac{\partial v}{\partial s} - r_0 u, \qquad \mu = \frac{\partial u}{\partial s} + q_0 w - r_0 v; \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = q_0 u. \tag{3}$$

4. *Rotations et translations du trièdre mobile.* — Si t varie, s restant constant, le vecteur vitesse de M a pour composantes $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ suivant les axes $Ox_0y_0z_0$. Le vecteur instantané de rotation du trièdre $Mxyz$ est la somme géométrique des vecteurs $\frac{\partial \lambda}{\partial t}$ porté par Mx_1, $\frac{\partial \mu}{\partial t}$ porté par My_2, $\frac{\partial \nu}{\partial t}$ porté par Mz. On en conclut immédiatement que les rotations et translations du trièdre $Mxyz$ sont, au second ordre près (1),

$$p_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \quad q_1 = \frac{\partial \mu}{\partial t}, \quad r_1 = \frac{\partial \nu}{\partial t}, \quad \xi_1 = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \eta_1 = \frac{\partial v}{\partial t}, \quad \zeta_1 = \frac{\partial w}{\partial t}. \tag{4}$$

Si s varie, t restant constant, les translations sont o, o, 1. Le vecteur instantané de rotation est la somme géométrique des vecteurs $\frac{\partial \lambda}{\partial s}$, $\frac{\partial \mu}{\partial s}$, $\frac{\partial \nu}{\partial s}$ portés respectivement par Mx_1, My_2, Mz et du vecteur de composantes (o, q_0, r_0) suivant $Ox_0y_0z_0$. Les rotations de $Mxyz$ sont donc, d'après (1) et au second ordre près (2),

$$p = \frac{\partial \lambda}{\partial s} + q_0 \nu - r_0 \mu, \qquad q = q_0 + \frac{\partial \mu}{\partial s} + r_0 \lambda, \qquad r = r_0 + \frac{\partial \nu}{\partial s} - q_0 \lambda. \tag{5}$$

5. *Équations indéfinies d'équilibre dynamique.* — Considérons les forces extérieures (F) appliquées à la portion de fil postérieure à la section droite (s). Elles comprennent d'abord les forces éventuellement *appliquées à la section*

(1) On peut facilement calculer les expressions exactes. Par exemple, les rotations ont les valeurs suivantes

$$\lambda' \cos\mu \cos\nu + \mu' \sin\nu, \quad -\lambda' \cos\mu \sin\nu + \mu' \cos\nu, \quad \lambda' \sin\mu + \nu',$$

les accents indiquant des dérivées par rapport à t.

(2) On vérifie facilement que les relations classiques (*Cf.* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 49 et 66) entre les douze rotations et translations sont satisfaites identiquement.

terminale (s_1); puis les *forces d'inertie*; et enfin les forces *permanentes* provenant du *champ* auquel le fil est soumis. Ces dernières sont généralement négligeables devant les forces d'inertie. En outre, leur seul effet est de produire une *déformation statique* donnant à la fibre neutre la forme (Γ_0). Convenons de substituer cette forme à la forme naturelle; nous pourrons ainsi *négliger le champ*.

Appelons X, Y, Z, L, M, N les coordonnées du système des forces (F) par rapport à $Mxyz$. Soient d'autre part X_V, Y_V, .. , N_V les quotients par ds des coordonnées du système des forces d'inertie appliquées à l'élément de fil compris entre les sections droites (s) et ($s + ds$). On a (1), au second ordre près,

$$(6)\quad \frac{\partial X}{\partial s} + q_0 Z - r_0 Y + X_V = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial s} + r_0 X + Y_V = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial s} - q_0 X + Z_V = 0;$$

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial s} + q_0 N - r_0 M - Y + L_V = 0, \qquad \dfrac{\partial M}{\partial s} + r_0 L + X + M_V = 0, \\ \dfrac{\partial N}{\partial s} - q_0 L + N_V = 0. \end{cases}$$

6. *Équations d'équilibre élastique.* — Soient Mx' et My' les axes principaux d'inertie de la section droite du fil et A', B' les moments d'inertie correspondants. Soient p', q', r les rotations du trièdre $Mx'y'z$ quand s joue le rôle du temps. On a (2)

$$L' = EA'(p' - p'_0), \qquad M' = EB'(q' - q'_0), \qquad N = GI(r - r_0),$$

E et G désignant le *module de Young* et le *module de torsion* et I le *pseudo-moment d'inertie polaire* (3).

D'autre part, si l'on pose $\varphi = \widehat{Mx, Mx'}$, on a

$$L = L'\cos\varphi - M'\sin\varphi, \qquad M = L'\sin\varphi + M'\cos\varphi;$$
$$p' = p\cos\varphi + q\sin\varphi, \qquad q' = -p\sin\varphi + q\cos\varphi.$$

On en déduit, au second ordre près et en tenant compte de (5),

$$(8)\quad \begin{cases} L = EA\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial s} + q_0\nu - r_0\mu\right) - EC\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial s} + r_0\lambda\right), \\ M = -EC\left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial s} + q_0\nu - r_0\mu\right) + EB\left(\dfrac{\partial\mu}{\partial s} + r_0\lambda\right), \\ N = GI\left(\dfrac{\partial\nu}{\partial s} - q_0\lambda\right), \end{cases}$$

avec

$$(9)\quad A = A'\cos^2\varphi + B'\sin^2\varphi, \qquad B = A'\sin^2\varphi + B'\cos^2\varphi, \qquad C = (B' - A')\sin\varphi\cos\varphi.$$

---

(1) *Cf.* J. Haag, *loc. cit.*, n° 9.

(2) *Loc. cit.*, n° 39.

(3) Rappelons que l'on a $0 < I \leq A' + B'$, le signe = devant être pris dans le seul cas du fil rond [*loc. cit.*, équation (51)].

Ces dernières quantités sont les *moments et produits d'inertie* de la section droite relativement aux axes Mxy. Ce sont des *fonctions de s* en général, car il en est ainsi de l'angle φ. Seuls, les invariants $A+C$ et $AC-B^2$ sont toujours des constantes.

Pour simplifier l'écriture, *nous supprimerons dorénavant l'indice de* q_0, r_0 et il sera bien entendu que q et r se rapporteront à la courbe (Γ_0) et non à (Γ). Convenons aussi de désigner par des accents les dérivées des fonctions dépendant uniquement de s.

7. *Calcul de la force d'inertie.* — Le vecteur accélération du point P de la section droite (s) qui a pour coordonnées $(x, y, 0)$ par rapport à $Mxyz$, a pour composantes suivant ces axes et au second ordre près

$$\gamma_x=\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}-y\frac{\partial r_1}{\partial t},\qquad \gamma_y=\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}+x\frac{\partial r_1}{\partial t},\qquad \gamma_z=\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}+y\frac{\partial p_1}{\partial t}-x\frac{\partial q_1}{\partial t}.$$

Si ρ désigne la *masse spécifique* du fil, on a (¹)

$$X_V=-\rho\iint_{(A)}h\gamma_x\,dx\,dy,\qquad Y_V=-\rho\iint_{(A)}h\gamma_y\,dx\,dy,$$

$$Z_V=-\rho\iint_{(A)}h\gamma_z\,dx\,dy,$$

$$L_V=-\rho\iint_{(A)}hy\gamma_z\,dx\,dy,\qquad M_V=\rho\iint_{(A)}hx\gamma_z\,dx\,dy,$$

$$N_V=\rho\iint_{(A)}h(y\gamma_x-x\gamma_y)\,dx\,dy,$$

où l'on a posé $h=1-qx$ et où (A) représente la section droite. En tenant compte des formules précédentes, il vient

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
X_V&=-\rho\left(S\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}+Cq\frac{\partial r_1}{\partial t}\right),\qquad Y_V=\rho\left(-S\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}+Bq\frac{\partial r_1}{\partial t}\right),\\
Z_V&=\rho\left(-S\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}+Cq\frac{\partial p_1}{\partial t}-Bq\frac{\partial q_1}{\partial t}\right),\\
L_V&=\rho\left(Cq\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}-A\frac{\partial p_1}{\partial t}+C\frac{\partial q_1}{\partial t}\right),\qquad M_V=\rho\left(-Bq\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2}+C\frac{\partial p_1}{\partial t}-B\frac{\partial q_1}{\partial t}\right),\\
N_V&=\rho\left[-Cq\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2}+Bq\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2}-(A+B)\frac{\partial r_1}{\partial t}\right],
\end{aligned}\right.$$

S désignant l'aire de (A). Signalons que nous avons négligé, dans L_V, M_V, N_V, des termes dont les coefficients sont des intégrales doubles portant sur des polynomes homogènes et du troisième degré en x, y.

Supposons maintenant qu'on rende le fil infiniment mince, en réduisant sa section droite par une homothétie de rapport k. Les termes que nous venons de

(¹) *Loc. cit.*, n° 9.

négliger sont de l'ordre de k^5. Nous avons maintenant deux cas à distinguer, suivant qne X_v, Y_v, Z_v sont de l'ordre de k^2 ou de k^4.

8. *Cas où la fibre neutre est immobile.* — Nous allons d'abord nous débarrasser du second cas (1).

L'accélération de chaque point M de la fibre neutre est nulle. Donc, chacun de ces points est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Si le vecteur vitesse n'est pas le même pour tous les points, il y a rupture du fil au bout d'un temps plus ou moins long. Nous devons donc faire l'hypothèse contraire et, en choisissant convenablement le trièdre de référence, nous nous ramenons au cas où le vecteur vitesse est nul, c'est-à-dire au cas où *tous les points de la fibre neutre sont immobiles*. Nous avons alors $u = v = w = 0$; d'où $\lambda = \mu = 0$, d'après (2). Puis, d'après (8) et (10),

$$L = EA q \nu, \qquad M = -EC q \nu, \qquad N = GI \frac{\partial \nu}{\partial s};$$

$$X_v = -\rho C q \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}, \qquad Y_v = \rho B q \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}, \qquad Z_v = L_v = M_v = 0, \qquad N_v = -\rho (A + B) \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}.$$

9. Examinons d'abord le cas particulier $q = 0$ (fil *rectiligne*). On a $L = M = X_v = Y_v = 0$. Portant dans (6) et (7), on obtient $X = Y = \frac{\partial Z}{\partial s} = 0$,

$$GI \frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} - \rho (A + B) \frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = 0.$$

On reconnaît l'équation classique des *vibrations torsionnelles* d'un cylindre.

10. Supposons maintenant $q \neq 0$ (fil *non rectiligne*). En éliminant X, Y, Z, L, M, N, X_v, Y_v, N_v entre les équations (6), (7) et (11), on obtient trois équations (E_1), (E_2), (E_3) linéaires et homogènes en ν, $\frac{\partial \nu}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2}$, $\frac{\partial^3 \nu}{\partial s^3}$, $\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}$. En éliminant $\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2}$ entre ces trois équations, on obtient deux équations qui peuvent être considérées comme des équations différentielles vérifiées par ν fonction de s. L'une est du second ordre et l'autre du troisième. Si elles ont une solution commune, cette solution est nécessairement de la forme

$$\nu = ST + S_1 T_1, \tag{12}$$

S, S_1 désignant des fonctions de s et T, T_1 des fonctions de t. En substituant cette expression dans (E_1), (E_2) par exemple, on obtient deux équations aux variables mêlées, contenant linéairement T, T_1, T″, T_1''. En donnant à s deux valeurs numériques telles que les valeurs numériques prises par S, S_1 ne

(1) Si les forces appliquées aux extrémités du fil forment un système dont les coordonnées sont de l'ordre de k^4, la valeur $k = 0$ n'est pas un pôle pour la déformation (*loc. cit.*, n° 27). *Le fil peut devenir infiniment mince sans qu'il y ait rupture.*

soient pas proportionnelles, on obtient un système de deux équations linéaires à coefficients constants entre T, T_1, T'', T_1'', et dont on ne peut retenir que les solutions sinusoïdales, si l'on veut que v reste fini quel que soit t. Portant dans (12), puis portant (12) dans (E_1), (E_2), (E_3) et écrivant que les équations sont vérifiées quel que soit t, on constate que *le mouvement cherché résulte nécessairement de la superposition de deux vibrations sinusoïdales stationnaires*. Il ne reste plus qu'à chercher ces vibrations, si elles existent.

Supposons donc qu'on ait $v = S \sin \omega t$. En portant dans (E_1), (E_2), (E_3), on obtient trois équations différentielles linéaires que doit vérifier la fonction S et dont les coefficients dépendent de q, r, φ d'une manière compliquée. *Si le fil est quelconque*, ces équations n'ont pas de solution commune; *il n'y a pas de vibrations torsionnelles*.

Mais, on peut aussi considérer qu'on a affaire à un système de trois équations différentielles à quatre inconnues S, q, r, φ et l'on en conclut qu'*il existe une infinité de fils élastiques susceptibles de donner lieu à une vibration torsionnelle; ces fils et cette vibration dépendent d'une fonction arbitraire de s*. Leur détermination explicite paraît extrêmement compliquée et sans intérêt pratique. On peut toutefois chercher des solutions particulières simples.

Examinons par exemple le cas du *ressort à boudin*. Dans ce cas, q, r, φ sont des constantes. Les équations différentielles ci-dessus sont à coefficients constants et l'on est ramené à chercher si les trois équations caractéristiques ont une racine commune. Si l'angle φ est quelconque, il peut exister des solutions. Mais, dans la pratique, cet angle est nul ou du moins très petit. Si l'on admet que $\varphi = 0$, les trois équations différentielles sont du second ordre et très simples. Malheureusement, elles n'admettent *pas de solution commune* dans le domaine réel, sauf si $r = 0$.

Dans ce dernier cas, c'est-à-dire dans le *cas du cercle*, l'une des équations disparaît et la compatibilité des deux autres exige que l'on ait

$$\rho \omega^2 R^2 = \frac{EA(EA + GI)}{EA(A + B) + GI(A + 2B)}. \tag{13}$$

On a ensuite

$$S = a \operatorname{ch} m\theta + b \operatorname{sh} m\theta, \tag{14}$$

avec

$$s = R\theta, \qquad m^2 = \frac{EAB}{EA(A + B) + GI(A + 2B)}.$$

La formule (13) détermine la *fréquence de la vibration*. Pour avoir une idée de sa grandeur, traitons un exemple concret. Supposons du *fil rond* en acier et adoptons les valeurs suivantes, dans le système d'unités habituel de la Résistance des matériaux

$$E = 25000, \qquad G = 10000, \qquad \rho = \frac{7,8}{9,81} \cdot 10^{-9}.$$

On a approximativement $\omega R = 3600000$. La fréquence est $\frac{3600000}{l}$, l désignant la longueur du fil en millimètres. Si $l = 1000$ par exemple, on a $f = 3600$. Comme on le voit, *la fréquence est très élevée*. Il est à remarquer qu'elle est *indépendante de la grosseur du fil*, pourvu toutefois que celui-ci soit assez mince pour qu'on puisse lui appliquer la théorie approchée des fils élastiques.

11. *Vibrations de la fibre neutre.* — Arrivons maintenant au cas général où la fibre neutre est en mouvement. Cette fois, X_v, Y_v, Z_v sont de l'ordre de k^2 (n° 7) et la valeur $k = 0$ est un pôle pour la déformation (¹). Il en résulte que X, Y, Z, L, M, N sont aussi du second ordre (²). Comme L_v, M_v, N_v sont du quatrième ordre, on peut les négliger (³) dans les équations (7). Quant à X_v, Y_v, Z_v, nous les réduisons à leur partie principale; nous obtenons, en appelant dorénavant ρ la *densité linéaire*,

$$(15) \qquad X_v = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad Y_v = -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad Z_v = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Pour se rendre compte de l'ordre du système d'équations aux dérivées partielles dont dépend la recherche du mouvement, on peut procéder de la manière suivante. Prenons comme fonctions inconnues les douze fonctions ξ_1, η_1, ζ_1, λ, μ, ν, X, Y, Z, L, M, N. Nous avons d'abord les six équations (6) et (7), qui sont du premier ordre; puis les trois équations (8), qui sont aussi du premier ordre. Enfin, en dérivant les équations (2) et (3) par rapport à t, nous obtenons trois équations, qui sont encore du premier ordre. On peut donc dire que la détermination du mouvement est subordonnée à l'intégration d'un *système de douze équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre à douze inconnues*.

On peut aussi garder seulement les inconnues u, v, w, ν. D'après (8) et (2), on a

$$(16) \quad \begin{cases} \dfrac{L}{E} = -C\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} - A\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2r\left(C\dfrac{\partial v}{\partial s} - A\dfrac{\partial u}{\partial s}\right) - Cq\dfrac{\partial w}{\partial s} \\ \qquad + (Cr^2 - Ar')u + (Ar^2 + Cr')v - (Aqr + Cq')w + Aq, \\ \dfrac{M}{E} = B\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + C\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2r\left(C\dfrac{\partial u}{\partial s} - B\dfrac{\partial v}{\partial s}\right) + Bq\dfrac{\partial w}{\partial s} \\ \qquad + (Cr' - Br^2)u - (Br' + Cr^2)v + (Bq' + Cqr)w - Cq\nu, \\ N = GI\left(\dfrac{\partial \nu}{\partial s} + q\dfrac{\partial v}{\partial s} + qru\right). \end{cases}$$

(¹) *Loc. cit.*, n° 31. Il s'ensuit que *le fil se rompt s'il devient infiniment mince*.

(²) Cela résulte des équations (6) et (7). On peut le voir aussi en intégrant la somme géométrique des forces d'inertie et leur moment par rapport au point M d'abscisse curviligne s, le long de la portion de fil postérieure à la section droite (s). Il y a exception toutefois, dans le cas du fil cylindrique, pour N, qui est alors du quatrième ordre (*Cf.* n° 13).

(³) Sauf N_v dans le cas du fil cylindrique (n° 13).

En portant ces expressions dans la troisième équation (7), on obtient une équation (E_1) du second ordre. D'autre part, en tirant X, Y des deux premières équations (7) et portant dans la deuxième équation (6), on obtient une équation (E_2) du quatrième ordre. En éliminant Z entre les première et troisième équations (6), puis remplaçant, dans le résultat obtenu, X et Y par les expressions déduites de (7) comme ci-dessus, on obtient une équation (E_3) du cinquième ordre. Nous avons enfin l'équation (3), ou équation (E_4), qui est du premier ordre. On se trouve donc en présence d'un *système de quatre équations linéaires aux dérivées partielles à quatre inconnues* et dont les ordres respectifs sont 2, 4, 5 et 1.

Comme on le voit, le problème n'est pas simple.

12. *Cas du fil plan.* — Supposons en outre que le plan de la fibre neutre soit *plan de symétrie pour les sections droites*. On a $r = C = 0$, A et B = const.

Les formules (16) et les équations (6) et (7) deviennent

$$(17)\quad L = EA\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + q\nu\right), \qquad M = EB\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + q\frac{\partial w}{\partial s} + q' w\right), \qquad N = GI\left(\frac{\partial \nu}{\partial s} + q\frac{\partial v}{\partial s}\right);$$

$$(18)\quad \frac{\partial X}{\partial s} + qZ - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial s} - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial s} - qX - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;$$

$$(19)\quad \frac{\partial N}{\partial s} - qL = 0, \qquad X = -\frac{\partial M}{\partial s}, \qquad Y = \frac{\partial L}{\partial s} + qN.$$

Les équations (E_1), (E_2), (E_3), (E_4) prennent la forme suivante

$$(E_1)\quad GI\frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} + (EA + GI)q\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + GIq'\frac{\partial v}{\partial s} - EAq^2\nu = 0;$$

$$(E_2)\quad EA\left[\frac{\partial^4 v}{\partial s^4} - \frac{\partial^2 (q\nu)}{\partial s^2} + q^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - q^2\nu\right] - GIq'\left(\frac{\partial \nu}{\partial s} + q\frac{\partial v}{\partial s}\right) + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$(E_3)\quad EB\frac{\partial}{\partial s}\left[R\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + R\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(q\frac{\partial w}{\partial s} + q' w\right)\right] + EBq\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + q\frac{\partial w}{\partial s} + q' w\right) + \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial (Ru)}{\partial s} - w\right] = 0;$$

$$(E_4)\quad \frac{\partial w}{\partial s} - qu = 0.$$

Les deux premières ne contiennent que v et ν et les deux autres que u et w. On voit donc que le système du douzième ordre *se décompose en deux systèmes du sixième ordre*. Le premier détermine v et ν, c'est-à-dire les mouvements perpendiculaires au plan du fil et que nous appellerons *mouvements latéraux;* le second détermine les mouvements ayant lieu dans le plan du fil et que nous appellerons *mouvements plans*.

Connaissant v, ou bien u et w, on a λ ou μ par (2). On a ensuite L, M, N par (17); X, Y par (19); Z par la première équation (18); ce qui détermine le *système de forces appliqué à chaque extrémité du fil.*

13. *Cas du fil cylindrique.* — On a $q = 0$. De plus, la normale principale étant indéterminée, on peut toujoure choisir Ox et Oy suivant les axes principaux d'inertie de la section droite, ce qui entraine $C = 0$, A et $B = \text{const.}$, $r = 0$.

L'équation (E_1) nous redonne, en remarquant (1) que N_ν est du même ordre que N, l'équation des *vibrations torsionnelles* (n° 9)

$$GIS\frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} - \rho(A+B)\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = 0. \tag{20}$$

Les équations (E_2) et (E_3) deviennent (2)

$$EA\frac{\partial^4 v}{\partial s^4} + \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \qquad EB\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \tag{21}$$

équations classiques des *vibrations transversales*.

L'équation (E_4) est remplacée par la suivante (3)

$$ES\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{22}$$

équation classique des *vibrations longitudinales*.

14. *Cas de la torsade* (4). — Ce cas diffère du précédent par le fait que la rotation r n'est pas nulle, mais simplement constante. L'équation (22) subsiste; mais, les autres sont modifiées. On a d'abord (5)

$$N = GI\frac{\partial \nu}{\partial s} + GI'r\frac{\partial w}{\partial s},$$

avec

$$I' = 2(1+k)(A+B) - (1+2k)I,$$

k désignant le *coefficient de Poisson*. Dès lors, l'équation (E_1) devient

$$GI\frac{\partial^2 \nu}{\partial s^2} + GI'r\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\rho}{S}(A+B)\frac{\partial^2 \nu}{\partial t^2} = 0. \tag{23}$$

Comme on le voit, *les vibrations torsionnelles sont liées aux vibrations longitudinales*.

---

(1) *Cf.* notes (2) et (3) de la page 193.

(2) L'équation (E_3) se déduit de la première équation (18) et de la deuxième équation (19).

(3) Elle résulte de la troisième équation (18) et de la formule $Z = ES\frac{\partial w}{\partial s}$. Dans ce cas, s désigne l'abscisse curviligne de O sur (Γ_0).

(4) Cf. *loc. cit.*, n° 70.

(5) Cf. *loc. cit.*, formules (155) et (51).

Quant aux *vibrations transversales*, elles sont données par le système des équations (E_2), (E_3), qui s'écrivent

$$(24)\quad \begin{cases} A\dfrac{\partial^4 v}{\partial s^4} - 2(A+2B)r^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} + Ar^4 v + \dfrac{\rho}{E}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2(A+B)r\left(\dfrac{\partial^3 u}{\partial s^3} - r^2\dfrac{\partial u}{\partial s}\right) = 0, \\ B\dfrac{\partial^4 u}{\partial s^4} - 2(2A+B)r^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} + Br^4 u + \dfrac{\rho}{E}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2(A+B)r\left(\dfrac{\partial^3 v}{\partial s^3} - r^2\dfrac{\partial v}{\partial s}\right) = 0. \end{cases}$$

Les vibrations dans les deux directions principales ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, comme dans le cas du cylindre.

15. *Mouvements stationnaires.* — Un tel mouvement se caractérise par la condition que u, v, w, ν sont de la forme

$$(25)\qquad u = UT, \qquad v = VT, \qquad w = WT, \qquad \nu = HT,$$

T désignant une fonction de t et U, V, W, H des fonctions de s. En substituant ces expressions dans les équations générales, on voit, comme d'habitude, que T est une *fonction sinusoïdale*, par exemple $\sin\omega t$. Puis les fonctions U, V, W, H doivent satisfaire à un système d'équations différentielles linéaires et homogènes, dont les coefficients sont des fonctions connues de s et que l'on ne sait pas intégrer en général. Ce système admet une infinité de solutions dépendant de douze constantes arbitraires. Une de ces solutions étant connue, on a L, M, N par les formules (16); puis, X, Y, Z par (7) et (6).

16. *Liaisons imposées aux extrémités du fil.* — Considérons une extrémité du fil et le trièdre $Mxyz$ qui lui est attaché. La position de ce trièdre dépend des six paramètres $u, v, \ldots, \nu$. Les forces extérieures appliquées à la section droite terminale admettent pour coordonnées X, Y, ..., N par rapport à $Mxyz$.

Imaginons qu'on impose aux six paramètres $u, v, \ldots \nu$ certaines équations de liaison

$$(26)\qquad f_i(u, v, \ldots, \nu, t) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ p \leq 6).$$

A chaque instant t, les déplacements virtuels compatibles avec les liaisons doivent vérifier p équations obtenues en différentiant les équations (26) à t constant

$$(27)\qquad a_{i1}\delta u + a_{i2}\delta v + \ldots + a_{i6}\delta\nu = 0.$$

Si les liaisons sont *sans frottement*, les équations (27) doivent entrainer la suivante

$$(28)\qquad X\delta u + Y\delta v + \ldots + N\delta\nu = 0;$$

ce qui se traduit par $6-p$ équations linéaires imposées à X, Y, ..., N. Le nombre

total des équations que doivent vérifier u, v, ..., w, X, Y, ..., N est donc égal à six.

17. *Mouvements entretenus.* — Supposons en particulier qu'on se donne certains des paramètres u, v, ..., w en fonction sinusoïdale du temps, de pulsation déterminée ω. Nous obtenons p équations de la forme (26), mais dont chacune renferme un seul des paramètres. Chaque équation (27) exprime que la différentielle de ce paramètre est nulle. Dès lors, les coefficients, dans (28), des différentielles des paramètres non liés doivent être nuls. Quant aux autres coefficients, on peut les choisir arbitrairement en fonction du temps. Supposons encore qu'ils soient des fonctions sinusoïdales, de pulsation ω. Nous avons finalement, pour l'extrémité considérée, six équations de la forme

$$(29)\qquad \varepsilon_1 u + \varepsilon'_1 X = \sin\omega t, \qquad \varepsilon_2 v + \varepsilon'_2 Y = \sin\omega t, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_6 w + \varepsilon'_6 N = \sin\omega t;$$

où les ε_i, ε'_i désignent douze constantes astreintes à la condition que, pour chaque valeur de i, *une seule des constantes* ε_i *et* ε'_i *soit nulle*. Nous imposons des conditions analogues pour l'autre extrémité du fil, ce qui nous donne en tout douze équations (*conditions aux limites*).

18. Ces conditions ne déterminent évidemment pas le mouvement du fil, car il faudrait encore se donner les *conditions initiales* (position et vitesse de chaque point au temps zéro). Mais, nous admettons que, grâce aux frottements internes et conformément à la théorie classique des mouvements entretenus, le mouvement du fil, au bout d'un temps suffisamment long, est un des mouvements stationnaires envisagés au n° 15. Nous avons vu que ces mouvements dépendent de douze constantes arbitraires. En écrivant les douze conditions aux limites, on obtient douze équations du premier degré à douze inconnues, d'où l'on tire les constantes cherchées.

Chacune de ces constantes se présente sous la forme d'une fraction dont le dénominateur est le déterminant $D(\omega)$ du système. Si la pulsation ω est telle que ce déterminant soit nul, les douze constantes deviennent infinies; *l'amplitude du mouvement entretenu est infiniment grande* pour chaque point du fil.

Ce résultat est d'ailleurs purement théorique, car il ne tient pas compte des frottements. Dans la réalité, l'amplitude est, non pas infinie, mais seulement *très grande* comparativement aux amplitudes obtenues pour d'autres valeurs de ω. C'est le phénomène bien connu de la *résonance*. Les *pulsations de résonance* sont données par l'équation $D(\omega) = 0$, que nous appellerons l'*équation de résonance*. Or, cette équation exprime la condition qui doit être remplie pour que puisse exister un mouvement stationnaire satisfaisant aux conditions déduites de (29) en remplaçant chaque second membre par zéro. Ces mouvements *libres* sont les *mouvements propres* du fil soumis aux liaisons ci-dessus. Les fréquences de résonance sont donc aussi les *fréquences propres*.

19. *Différentes espèces de liaisons.* — Les liaisons pour les mouvements libres se traduisent, pour chaque extrémité, par les six équations

$$\varepsilon_1 u + \varepsilon'_1 X = 0, \quad \ldots, \quad \varepsilon_6 \nu + \varepsilon'_6 N = 0, \tag{30}$$

avec la condition précisée au n° 17 pour les ε_i, ε'_i. Le nombre des liaisons distinctes possibles est donc $2^6 = 64$ pour chaque extrémité. En combinant les liaisons des deux extrémités, on obtient 2080 combinaisons différentes.

Pour réaliser matériellement une des 64 *liaisons* imposables à une extrémité du fil, on peut encastrer cette extrémité dans un petit tube de masse négligeable, lequel est guidé de manière à conserver les degrés de liberté indiqués par les six équations de liaison. Ce guidage est facile à imaginer, en utilisant les procédés bien connus qui permettent de réaliser une translation ou une rotation.

Signalons en particulier l'*encastrement complet*, obtenu quand tous les ε'_i sont nuls, Le cas opposé est celui de la *liberté complète*, obtenu quand tous les ε_i sont nuls.

CHAPITRE II.

THÉORIE GÉNÉRALE DES PETITS MOUVEMENTS DES FILS PARFAITS.

20. *Choix du trièdre mobile.* — Dans le cas du fil parfait, qui est assimilé à une ligne géométrique, la notion de section droite disparaît et nous ne pouvons plus lier un trièdre à cette section (¹). Nous prendrons alors comme trièdre mobile attaché à chaque point M du fil le *trièdre de Frenet* (Mz suivant la tangente, Mx suivant la normale principale, My suivant la binormale).

21. *Choix des paramètres.* — Nous nous proposons d'étudier les petits mouvements du fil au voisinage d'une *position d'équilibre* (Γ_0). L'équilibre dont il s'agit peut être un *équilibre véritable*, en ce sens que chaque point du fil est au *repos* par rapport au trièdre de référence. Mais, nous aurons aussi à envisager l'extension suivante.

Supposons que le fil puisse être animé d'un *mouvement permanent*, au cours duquel il *glisse sur lui-même*, de sorte qu'il occupe constamment la ligne fixe (Γ_0), chacun de ses points parcourant cette ligne avec la vitesse *constante* V_0. Pour retomber sur le cas de l'équilibre véritable, il nous suffira de faire $V_0 = 0$.

Avec cette extension, le problème consiste à étudier les *mouvements voisins du mouvement permanent*. Le fil (F) ayant un tel mouvement, associons-lui un *fil fictif* (F_0) animé du mouvement permanent. Établissons entre les deux fils une correspondance ponctuelle conservant les longueurs (²) et telle que deux

(¹) Il y a cependant exception dans le *problème du flexible* (Chap. III).

(²) Nous supposons les fils *inextensibles*.

points homologues quelconques O et M soient constamment voisins l'un de l'autre (¹). Nous définirons la position du trièdre $Mxyz$ par rapport au trièdre voisin $Ox_0y_0z_0$ exactement comme au n° 2.

Appelons s l'abscisse curviligne de O sur (Γ_0), comptée à partir d'une *origine fixe* sur cette ligne. Il s'ensuit que le point M de (F) correspondant à une valeur donnée de s est un point matériel du fil qui change avec le temps t et qui se déplace sur (F) avec la vitesse $-V_0$. Mais, dans l'espace, il reste voisin du point fixe O; de sorte que l'étude des fonctions u, v, w à s constant et t variable déterminera le mouvement de la ligne géométrique (Γ) occupée par (F) dans le voisinage de la ligne fixe (Γ_0).

Dans le cas actuel, les variables λ, μ, ν n'ont pas d'intérêt en elles-mêmes, mais serviront d'auxiliaires.

Les six fonctions u, v, ..., ν vérifient toujours les équations (2) et (3). De plus, comme $Mxyz$ est trièdre de Frenet pour (Γ), la rotation p est nulle; on a donc, d'après (5), l'équation supplémentaire

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s} + q\nu - r\mu = 0. \tag{31}$$

22. *Équations indéfinies d'équilibre dynamique.* — Dans le chapitre précédent, les vibrations étaient produites par les forces élastiques, devant lesquelles nous avons négligé le champ des forces extérieures. Dans le présent chapitre, ce sont au contraire ces dernières forces, jointes à la tension du fil, qui produisent les vibrations. Nous ne devons donc plus les négliger.

Nous appellerons X, Y, Z les composantes, suivant $Mxyz$, de la force extérieure (F) appliquée à l'unité de longueur du fil au voisinage de M. Soient γ_x, γ_y, γ_z les composantes du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ du point M. Avec les notations du n° 5, on a

$$X_V = X - \rho\gamma_x, \qquad Y_V = Y - \rho\gamma_y, \qquad Z_V = Z - \rho\gamma_z,$$

ρ désignant toujours la densité linéaire du fil.

Les coordonnées appelées X, Y, ..., N au n° 5 sont toutes nulles (²), à l'exception de Z, qui devient la *tension du fil* en M et que nous représenterons maintenant par la lettre T. Les équations (6) s'écrivent alors

$$qT + X - \rho\gamma_x = 0, \qquad Y - \rho\gamma_y = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial s} + Z - \rho\gamma_z = 0; \tag{32}$$

ce sont les *équations intrinsèques* bien connues de l'équilibre des fils parfaits.

(¹) En vertu des hypothèses faites, il suffit que cette condition soit remplie au temps zéro pour qu'elle le soit constamment.

(²) Cf. *loc. cit.*, n° 38.

Pour le fil fictif, nous avons de même,

$$(33)\qquad q_0 T_0 + X_0 - \rho V_0^2 q_0 = 0, \qquad Y_0 = 0, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial s} + Z_0 = 0.$$

Appelons ΔX, ΔY, ΔZ les composantes suivant $Ox_0 y_0 z_0$ de l'accroissement infiniment petit subi par le champ extérieur quand on passe du point O au point voisin M. Si ce champ est une fonction analytique de M, ces composantes sont, au second ordre près, des fonctions linéaires de u, v, w, à coefficients fonctions connues de s. En tenant compte des formules (1), on a, au second ordre près,

$$X - X_0 = \Delta X + Y_0 \nu - Z_0 \mu, \qquad Y - Y_0 = \Delta Y + Z_0 \lambda - X_0 \nu,$$
$$Z - Z_0 = \Delta Z + X_0 \mu - Y_0 \lambda.$$

La deuxième formule (5) nous donne d'autre part

$$q - q_0 = \frac{\partial \mu}{\partial s} + r_0 \lambda.$$

Posons enfin

$$(34)\qquad T - T_0 = \theta$$

et retranchons (33) de (32); il vient, au second ordre près,

$$(35)\qquad \begin{cases} q_0 \theta + T_0 \left(\dfrac{\partial \mu}{\partial s} + r_0 \lambda \right) + \Delta X - Z_0 \mu - \rho (\gamma_x - V_0^2 q_0) = 0, \\ \Delta Y + Z_0 \lambda - X_0 \nu - \rho \gamma_y = 0, \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial s} + \Delta Z + X_0 \mu - \rho \gamma_z = 0. \end{cases}$$

Les composantes de $\vec{\gamma}$ suivant $Ox_0 y_0 z_0$ sont, au second ordre près,

$$\gamma_x, \quad \gamma_y + q_0 V_0^2 \nu, \quad \gamma_z - q_0 V_0^2 \mu.$$

Celles de $\vec{\gamma}_0$ sont $q_0 V_0^2$, 0, 0. Or, $\vec{\gamma} - \vec{\gamma}_0 = \dfrac{d^2 \left(\overrightarrow{OM} \right)}{dt^2}$, cette dérivée étant prise *en suivant le mouvement* de O sur (Γ_0), comme on le fait en Hydrodynamique. On a, par exemple,

$$\frac{du}{dt} = V_0 \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{d^2 u}{dt^2} = V_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + 2 V_0 \frac{\partial^2 u}{\partial s \, \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

La seconde expression n'est autre que $\gamma_x - V_0^2 q_0$ et l'on a $\gamma_y + q_0 V_0^2 \nu$ et $\gamma_z - q_0 V_0^2 \mu$ par des formules analogues.

Portons ces résultats dans (35); éliminons λ, μ, ν au moyen des formules (2) et (31) et X_0, Y_0, Z_0 au moyen de (33); il vient, en supprimant les indices

de T_0, q_0, r_0, pour simplifier l'écriture

$$(36)\qquad q\theta+(T-\rho V_0^2)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+T\left(q\frac{\partial v}{\partial s}-2r\frac{\partial v}{\partial s}\right)+T'\frac{\partial u}{\partial s}$$
$$+(Tq)'w-(Tr)'v-Tr^2u+\Delta X-\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V_0\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t}\right)=0,$$

$$(37)\qquad (T-\rho V_0^2)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+T\left(2r\frac{\partial u}{\partial s}+r'u-r^2v+rqw\right)$$
$$+T'\left(\frac{\partial v}{\partial s}+ru\right)+\Delta Y-\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V_0\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial t}\right)=0,$$

$$(38)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial s}-\rho V_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+qT\left(-\frac{\partial u}{\partial s}+rv-qw\right)+\Delta Z-\rho\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+2V_0\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial t}\right)=0.$$

Reproduisons enfin l'équation (3)

$$(39)\qquad u=R\frac{\partial w}{\partial s}.$$

On obtient ainsi un système de quatre équations à quatre inconnues u, v, w, θ. En portant (39) dans (37), on obtiendrait une équation (E_1) en v et w, qui serait du second ordre. En opérant de même sur (36) et (38), puis éliminant θ, on obtiendrait une équation (E_2) du quatrième ordre.

Remarque. — D'après les équations (33), les conditions du mouvement permanent sont les mêmes que les conditions d'équilibre, à cela près que la tension T_0 doit être remplacée par $T_0-\rho V_0^2$. Il revient au même de dire que *la courbe sur laquelle glisse le fil est une position d'équilibre;* mais, *la tension du fil mobile surpasse de* ρV_0^2 *la tension du fil au repos.*

23. *Cas du fil plan.* — On a $r=0$. Supposons de plus que le plan de (Γ_0) soit *plan de symétrie pour le champ de forces*, de sorte que ΔX et ΔZ ne contiennent pas v, tandis que ΔY ne contient pas u et w. L'équation (37), ou (E_1), ne contient que l'inconnue v; elle détermine les *mouvements latéraux*. Les équations (36) et (38) ne contiennent que u et w; donc, l'équation (E_2) ne contient que w; elle détermine les *mouvements plans*.

24. *Cas du fil rectiligne.* — On a $q=r=0$. L'équation (39) nous donne d'abord $\frac{\partial w}{\partial s}=0$. Les équations (36) à (38) se réduisent à

$$(40)\qquad (T-\rho V_0^2)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+T'\frac{\partial u}{\partial s}+\Delta X-\rho\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2V_0\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t}\right)=0,$$

$$(41)\qquad (T-\rho V_0^2)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+T'\frac{\partial v}{\partial s}+\Delta Y-\rho\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+2V_0\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial t}\right)=0,$$

$$(42)\qquad \frac{\partial v}{\partial s}+\Delta Z-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0.$$

Si l'on néglige le champ de forces et si l'on suppose $V_0 = 0$, on retrouve, en tenant compte de la troisième équation (33), l'équation bien connue des *cordes vibrantes*.

25. *Mouvements stationnaires.* — Pour un tel mouvement, on a

$$u = U \sin \omega t, \qquad v = V \sin \omega t, \qquad w = W \sin \omega t,$$

U, V, W désignant des fonctions de s. En portant dans (E_1) et (E_2), on obtient un système de deux équations différentielles linéaires en V et W, qui sont respectivement du second et du quatrième ordre. L'intégrale générale comporte six constantes d'intégration. On a ensuite, d'après (39),

$$U = RW'. \tag{43}$$

Puis, d'après (2),

$$\lambda = -(V' + rU)\sin \omega t, \qquad \mu = (U' + qW - rV)\sin \omega t. \tag{44}$$

On a θ par (36).

26. *Conditions aux limites.* — Nous envisagerons les liaisons suivantes :

A. *Une extrémité* M *du fil a un mouvement donné.* — On connaît u, v, w en fonction de t, pour la valeur s_0 de s correspondant à M.

B. *Une extrémité* M *du fil glisse sans frottement sur une courbe* (C) *donnée.* — L'absence de frottement exige que le fil soit orthogonal à (C). Il en est ainsi en particulier pour la position d'équilibre O. Il s'ensuit que la tangente en O à (C) est nécessairement dans le plan Ox_0y_0. Soient (a, b, o) ses paramètres directeurs. On a, au second ordre près,

$$w = o, \qquad av - bu = o, \qquad a\mu - b\lambda = o. \tag{45}$$

C. *Une extrémité* M *du fil glisse sans frottement sur une surface* (S) *donnée.* — Comme précédemment, le fil doit être orthogonal à (S), laquelle doit donc être tangente en O au plan x_0Oy_0. On a d'abord

$$w = o. \tag{46}$$

Supposons la surface analytique et le point O non singulier. L'équation de (S) au voisinage de O est de la forme

$$2z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots. \tag{47}$$

La condition d'orthogonalité de Mz et de (S) nous donne

$$\lambda = Bu + Cv, \qquad -\mu = Au + Bv. \tag{48}$$

D. *L'extrémité* M *est libre.* — Aucune condition n'est imposée à u, v, w. Mais, la tension en M doit être nulle. On a donc l'unique équation

$$\theta = 0. \tag{49}$$

E. *Le fil est enroulé partiellement sur une courbe* (C) *donnée.* — Il en est ainsi en particulier de (Γ_0). Soit O le point où (Γ_0) quitte (C) tangentiellement. Soit de même A le point, voisin de O, où (Γ) quitte (C). Si nous prenons pour origine des arcs sur (Γ_0) et (Γ) un même point de la partie enroulée, le point M homologue de O se trouve, au second ordre près, sur la tangente en A à (C). Sa distance au point O est donc un infiniment petit du second ordre par rapport à l'arc AO ou, ce qui revient au même (¹), par rapport à l'angle des tangentes Oz_0 et Mz. Dès lors, les équations de liaison sont

$$u = v = w = 0. \tag{50}$$

27. *Mouvements entretenus. Équation de résonance.* — *Imposons un mouvement sinusoïdal* (²) de phase ωt *à l'une des extrémités du fil.* Nous avons trois équations de liaison du type A.

Pour *l'autre extrémité*, nous pouvons supposer qu'on lui impose également un mouvement sinusoïdal de même phase; ou bien qu'elle est soumise à l'une des liaisons B et C. Nous obtenons, dans tous les cas, trois autres équations de liaison.

On peut déterminer un mouvement stationnaire satisfaisant à toutes ces conditions. Les six équations de liaison permettent de calculer les six constantes d'intégration. Le déterminant $D(\omega)$ du système est le même que dans le cas où les mouvements imposés aux extrémités sont nuls. Si $D = 0$, le mouvement entretenu a, théoriquement (*cf.* n° 18), une amplitude infinie. L'équation $D(\omega) = 0$ est donc *l'équation de résonance.*

Si la deuxième extrémité du fil est libre, on n'a plus que quatre équations de liaison; le mouvement n'est pas déterminé, du moins en apparence. Mais, il peut arriver (*cf.* n°s 68 et 82) que l'existence d'une singularité de l'intégrale générale à l'extrémité libre réduise le nombre des constantes d'intégration, permettant ainsi la détermination du mouvement et le calcul des pulsations de résonance.

28. *Fil tendu sur une surface parfaitement polie.* — *Négligeons le champ de forces.* La force (F) du n° 22 se réduit à la réaction normale de la surface (S) sur le fil. Dans la position d'équilibre, la réaction en O est portée par Ox_0 et vaut $-qT$, d'après (33). En M, elle a une valeur infiniment voisine. On a donc,

(¹) Nous admettons que le rayon de courbure de (C) en O n'est pas infiniment grand.

(²) On pourrait aussi imaginer qu'on fasse agir sur cette extrémité une force sinusoïdale. On obtiendrait alors des équations de liaison analogues à (30).

au second ordre près, $\Delta Y = -qT\beta$, en appelant β le deuxième cosinus directeur de la normale en M à (S) par rapport aux axes $Ox_0y_0z_0$. Soit

$$2u = av^2 + 2bvw + cw^2 + \dots \tag{51}$$

l'équation de (S) au voisinage de O. On a $\beta = -av - bw$, au second ordre près. D'autre part, $\frac{\partial w}{\partial s} = qu$ est du second ordre, d'après (51). On peut donc écrire $\frac{\partial w}{\partial s} = 0$. Nous supposerons que *le fil a au moins un point fixe;* il s'ensuit que $w = 0$. Donc, $\beta = -av$ et $\Delta Y = qTav$.

Portons dans (37), où nous faisons en outre $u = w = V_0 = 0$; il vient, en remarquant que $T' = 0$, d'après (33)

$$T\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + T(qa - r^2)v = 0$$

Il reste à évaluer $qa - r^2$. A cet effet, imaginons que la surface (S) soit rapportée à un système de coordonnées curvilignes orthogonales (s, s_1), les lignes $s_1 = \text{const.}$ étant des géodésiques comprenant (Γ_0), laquelle correspond par exemple à $s_1 = 0$. De plus, s représente, comme ci-dessus, l'abscisse curviligne de O sur (Γ_0). Considérons un trièdre mobile dépendant des deux paramètres s et s_1, dont l'axe Ox est normal à la surface et l'axe Oz tangent à la ligne $s_1 = \text{const.}$ passant par O. Les translations de ce trièdre sont toutes nulles, sauf $\zeta = 1$ et η_1. Quant aux rotations, elles satisfont aux deux conditions (1) $p = 0$, $q_1 + r\eta_1 = 0$.

Cela posé, en employant la méthode classique du trièdre mobile, on trouve que la courbure normale correspondant à la tangente OT définie par $\widehat{Oy, OT} = \varphi$ a pour valeur

$$-\frac{r_1}{\eta_1}\cos^2\varphi - 2r\sin\varphi\cos\varphi + q\sin^2\varphi.$$

Comme elle vaut aussi $a\cos^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi$, on a $c = q$, $b = -r$; d'où $qa - r^2 = ac - b^2$. On sait que cette dernière expression représente la *courbure totale* Γ de la surface. En définitive, les petits mouvements du fil sur la surface sont déterminés par l'équation (2)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \Gamma v = 0. \tag{52}$$

On vérifie, comme il fallait s'y attendre, que *cette équation se conserve quand on déforme la surface.* En particulier, *si la surface est développable,* on retrouve *l'équation des cordes vibrantes.*

---

(1) Elles résultent des relations rappelées au n° 4.

(2) On peut aussi obtenir cette équation en utilisant les *équations intrinsèques* de l'équilibre d'un fil sur une surface.

CHAPITRE III.

LE FLEXIBLE.

29. *Le flexible rotatif.* — C'est un fil qui a pour mission de transmettre une rotation uniforme entre deux axes dont les positions dans l'espace ne sont pas fixes l'une par rapport à l'autre. Une extrémité du fil est encastrée longitudinalement dans l'un des axes (*axe menant*); l'autre extrémité est encastrée de même dans le second axe (*axe mené*). Le *couple moteur* et le *couple résistant* appliqués aux deux axes sont *faibles*, mais *non nuls*. Ils se transmettent aux deux extrémités du fil sous la forme de *couples de torsion*.

On pourrait évidemment laisser le fil entièrement libre entre ses deux extrémités. Il pourrait alors prendre des mouvements latéraux plus ou moins compliqués, se superposant à la rotation qu'il est chargé de transmettre. Pratiquement, on évite ces mouvements latéraux en enfermant le fil dans une *gaine* flexible, qui l'oblige à *tourner sur lui-même*.

Nous allons examiner dans quelles conditions peut fonctionner ce dispositif.

30. Supposons d'abord que notre fil soit un *fil élastique* ordinaire, comme ceux dont nous nous sommes occupés au Chapitre I. Nous devons revenir au cas particulier où *la fibre neutre est immobile*. Mais, nous ne pouvons utiliser tels quels les résultats obtenus aux n^{os} 8 à 10, car, cette fois, *l'angle* $\nu = \omega t + \nu_0$ *ne reste pas très petit*, contrairement à ce que nous avons supposé au Chapitre I. Par contre, on a $\lambda = \mu = 0$.

Les formules (4) subsistent; mais, les formules (5) sont remplacées par les suivantes

$$p = q_0 \sin\nu, \qquad q = q_0 \cos\nu, \qquad r = r_0 + \nu'_0. \tag{53}$$

Supposons d'abord le *fil entièrement libre entre ses deux extrémités*. Les formules (8) sont remplacées par

$$L = EA q_0 \sin\nu, \qquad M = EA q_0(\cos\nu - 1), \qquad N = 2GA\nu'_0,$$

en supposant le *fil rond*. Les moments fléchissants L, M oscillent respectivement entre EAq_0 et $-EAq_0$, 0 et $-2EAq_0$. La fatigue maximum due à M est le produit de E par le rapport du diamètre du fil à son rayon de courbure. Elle n'est inférieure à la limite élastique que si ce rapport est très petit. Autrement dit, le fil doit être *très mince* ou *presque rectiligne*. La seconde hypothèse est à rejeter, en raison même des conditions d'emploi du flexible. Quant à la première, elle nécessite *que le couple de torsion* N *soit très petit*, si l'on veut éviter la rupture par cisaillement.

Supposons par exemple que le fil soit en acier et prenons $E = 25000$. Imposons-nous que la fatigue due à M ne dépasse pas 50 kg/mm^2. Si R est le *rayon de courbure minimum* du flexible, le rayon du fil doit être $\frac{R}{1000}$. Si l'on veut que la fatigue au cisaillement ne dépasse pas 30^{kg}, N ne doit pas dépasser $15\pi R^3 . 10^{-9}$ kg/mm. Si $R = 10^{cm}$, le maximum de N serait $0{,}015\pi$, soit environ 0,05 kg/mm. Pour $R = 10^{mm}$, le couple maximum serait 1000 fois plus petit, soit environ 0,05 gr/mm; il serait *extrêmement faible*.

Dans la pratique, on remédie à cet inconvénient en remplaçant le fil unique par un *câble constitué par plusieurs fils très minces*, donc très flexibles. La théorie exacte d'un tel câble ne paraît pas abordable. Mais on peut admettre que, pour un rayon donné du câble, la flexibilité est considérablement augmentée, sans que soit diminuée sensiblement la résistance au cisaillement. Tout se passe à peu près comme si le rapport $\frac{E}{G}$ devenait très petit.

Passons à la limite et supposons $E = 0$. Nous obtenons un *fil parfait en ce qui concerne la flexion*, mais *élastique en ce qui concerne la torsion* (1). Nous avons alors

$$L = M = 0, \qquad N = 2GA\nu'_0. \tag{54}$$

31. Revenons maintenant au calcul du n° 7. On a cette fois (2)

$$\gamma_x = -\omega^2 x, \qquad \gamma_y = -\omega^2 y, \qquad \gamma_z = 0, \qquad h = 1 + py - qx.$$

On en déduit

$$X_V = -\rho\omega^2 A q, \qquad Y_V = \rho\omega^2 A p, \qquad Z_V = L_V = M_V = N_V = 0.$$

Les équations (7) nous donnent ensuite (3)

$$X = pN, \qquad Y = qN, \qquad \frac{\partial N}{\partial s} = 0. \tag{55}$$

Les équations (6) deviennent

$$\frac{\partial X}{\partial s} + q\Pi - rY = 0, \qquad \frac{\partial Y}{\partial s} + rX - p\Pi = 0, \qquad \frac{\partial Z}{\partial s} = 0, \qquad \Pi = Z - \rho A\omega^2. \tag{56}$$

La troisième équation (55) nous montre que *le couple de torsion a la même valeur tout du long du fil*. Cette valeur est déterminée par les couples moteur et

(1) Bien entendu, cette théorie n'a aucune prétention à la rigueur mathématique.

(2) Les termes $-\omega^2 x$ et $-\omega^2 y$ avaient été négligés au n° 7, parce que $r_1 = \omega$ était très petit, ce qui n'est pas le cas actuellement.

(3) Il faut y remplacer q_0 et r_0 par q et r; de plus, il faut ajouter le terme $-pN$ au premier membre de la seconde équation. De même, il faut compléter les deuxième et troisième équations (6) par les termes respectifs $-pZ$ et pY.

résistant exercés aux extrémités. En se reportant à (54), on voit que $\nu'_0 = \text{const.}$, comme dans le problème classique de la torsion d'un cylindre.

En tenant compte de (55) et (53), les équations (56) deviennent

$$N q'_0 \sin\nu + [H - N(r_0 + \nu'_0)] q_0 \cos\nu = 0,$$
$$N q'_0 \cos\nu - [H - N(r_0 + \nu'_0)] q_0 \sin\nu = 0;$$

d'où

$$q'_0 = 0, \qquad Z - \rho A \omega^2 = N(r_0 + \nu'_0).$$

Comme Z, ω, N, ν'_0 sont des constantes, il en est de même de r_0. Comme $q'_0 = 0$, $q_0 = \text{const.}$ On en conclut que *si le flexible est libre entre ses deux extrémités, il a nécessairement la forme d'une hélice circulaire.*

32. Dans la pratique, *il doit pouvoir prendre une forme quelconque.* Ce résultat ne peut être atteint qu'en exerçant des forces sur la surface latérale. D'où la *nécessité de la gaine*, dont les réactions sur le flexible constituent les forces latérales ci-dessus. Ces réactions sont à peu près normales à la surface latérale du fil, grâce à une *lubrification intérieure* de la gaine. Aux premiers membres des première et deuxième équations (6) et (7), on doit alors ajouter les termes (¹) X_Σ, Y_Σ, L_Σ, M_Σ représentant les quotients par ds des composantes transversales de la somme géométrique et du moment résultant des réactions appliquées à la tranche (ds) du fil.

Ces quatre termes sont déterminés par les équations qui les contiennent, dès que l'on se donne q_0 et r_0, c'est-à-dire la forme du fil.

Si le frottement n'est pas négligeable, il faut ajouter au premier membre de la troisième équation (58) un terme N_Σ représentant le couple de frottement s'exerçant sur l'unité de longueur du fil. Ce couple est négatif, si $\omega > 0$. Si l'on appelle N_1 le couple moteur et N_0 le couple résistant (pris en valeur absolue), on a

$$N_1 - N_0 = \int_0^{s_1} - N_\Sigma \, ds > 0.$$

Le couple moteur surpasse le couple résistant d'une quantité d'autant plus grande, pour un coefficient de frottement donné, que le fil est plus long. *La lubrification doit donc être d'autant plus abondante que le flexible est plus long.* Ce résultat, tout intuitif, est bien confirmé par l'expérience.

Signalons aussi que l'hypothèse de la flexibilité parfaite n'est pratiquement réalisée que si le diamètre du fil est petit vis-à-vis du rayon de courbure de la fibre neutre. Il faut donc éviter que ce rayon devienne trop petit; autrement dit, il faut *éviter les coudes.* Il y a d'ailleurs une autre raison qui s'ajoute à la précédente. C'est que la réaction normale de la gaine augmente avec la courbure.

(¹) *Loc. cit.*, n° 9.

Il s'ensuit que *chaque coude* augmente notablement l'intégrale ci-dessus et par conséquent *accroît l'influence du frottement.*

33. *Flexible coulissant.* — Dans ce cas, le fil *glisse longitudinalement* sur lui-même. Pratiquement, le mouvement est assez lent pour qu'on puisse négliger les forces d'inertie. On est alors ramené à un simple problème de Statique.

Si le fil est *libre* et si son poids est négligeable devant les tractions exercées à ses deux extrémités, il doit être *rectiligne*. Si l'on veut qu'il puisse prendre une forme quelconque, il faut encore l'enfermer dans une *gaine*. Dans ce cas, $N_\Sigma = 0$; mais, il faut ajouter le terme Z_Σ au premier membre de la troisième équation (56). Si l'on appelle Z_1 et Z_0 les tractions exercées aux extrémités, on a

$$Z_1 - Z_0 = \int_0^{s_1} - Z_\Sigma ds.$$

On a des *conclusions analogues* à celles du numéro précédent.

CHAPITRE IV.

LE FIL ÉLASTIQUE RECTILIGNE.

34. *Vibrations torsionnelles du fil cylindrique.* — Les vibrations des fils cylindriques (ou *verges*) sont classiques. Nous en rappellerons néanmoins rapidement les résultats, parce que nous les retrouverons comme cas limites au Chapitre VI.

Dans le cas des vibrations torsionnelles, l'équation (20) nous donne, avec la notation (25),

$$H = a\cos ms + b\sin ms, \qquad m^2 = \frac{\rho(A+B)}{GIS}\omega^2.$$

Les conditions aux limites sont de la forme $\varepsilon v + \varepsilon' N = 0$ ou $\varepsilon H + \varepsilon' H' = 0$. On a donc, en appelant s_1 la longueur du fil et affectant les ε de l'indice 0 pour $s = 0$ et de l'indice 1 pour $s = s_1$,

$$\varepsilon_0 a + \varepsilon'_0 mb = 0, \quad a(\varepsilon_1 \cos ms_1 - \varepsilon'_1 m \sin ms_1) + b(\varepsilon_1 \sin ms_1 + \varepsilon'_1 m \cos ms_1) = 0.$$

D'où l'*équation de résonance*

$$m(\varepsilon_0\varepsilon'_1 - \varepsilon'_0\varepsilon_1)\cos ms_1 + (\varepsilon_0\varepsilon_1 + m^2\varepsilon'_0\varepsilon'_1)\sin ms_1 = 0.$$

On a les trois combinaisons suivantes :

A. $\varepsilon'_0 = 0$, $\varepsilon'_1 = 0$ (double encastrement); $ms_1 = \lambda\pi$, λ entier;

B. $\varepsilon_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ (extrémités libres); $ms_1 = \lambda\pi$;

C. $\varepsilon'_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$ (un encastrement, une extrémité libre); $ms_1 = (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2}$.

35. *Vibrations longitudinales du fil cylindrique.* — L'équation (22) nous donne des résultats analogues aux précédents, H étant remplacé par W et m^2 par $\frac{\rho\omega^2}{ES}$.

36. *Vibrations transversales du fil cylindrique.* — La première équation (21) nous donne

$$V'' - m^4 V = 0, \qquad m^4 = \frac{\rho\omega^2}{EA}.$$

D'où

$$V = a\cos ms + b\sin ms + a'\operatorname{ch} ms + b'\operatorname{sh} ms.$$

Les conditions aux limites sont

$$\varepsilon v + \varepsilon' Y = 0, \qquad \varepsilon_1 \lambda + \varepsilon'_1 L = 0$$

ou, d'après (7), (8) et (2),

$$\varepsilon V + \varepsilon' V''' = 0, \qquad \varepsilon_1 V' + \varepsilon'_1 V'' = 0.$$

Pour chaque extrémité, nous avons les quatre espèces suivantes de liaisons

A.	$\varepsilon' = \varepsilon'_1 = 0$,	encastrement complet;	$V = V' = 0$;
B.	$\varepsilon' = \varepsilon_1 = 0$,	pivotement;	$V = V'' = 0$;
C.	$\varepsilon = \varepsilon'_1 = 0$,	translation;	$V''' = V' = 0$;
D.	$\varepsilon = \varepsilon_1 = 0$,	liberté complète;	$V''' = V'' = 0$.

Il en résulte six combinaisons distinctes, pour chacune desquelles l'élimination des constantes a, b, a', b' est très facile. On obtient ainsi les équations suivantes, où l'on a posé $ms_1 = x$:

AA, DD.	$\cos x \operatorname{ch} x = 1$;
AD.	$\cos x \operatorname{ch} x = -1$;
AB, BD.	$\operatorname{tg} x = \operatorname{th} x$;
AC, CD.	$\operatorname{tg} x = -\operatorname{th} x$;
BC.	$x = (2\lambda + 1)\frac{\pi}{2}$;
BB, CC.	$x = \lambda\pi$.

Signalons que les équations de la première ligne se décomposent respectivement en

$$\operatorname{th}\frac{x}{2} = \pm \operatorname{tg}\frac{x}{2}; \qquad \text{et} \qquad \operatorname{th}\frac{x}{2} = \pm \cot\frac{x}{2}.$$

Toutes ces équations admettent une infinité de racines positives (*Cf. Jahnke und Emde, Funktionentafeln*, p. 3).

37. *Vibrations longitudinales et torsionnelles de la torsade.* — Les vibrations *longitudinales* sont les mêmes que pour le fil cylindrique (n° 14). On a

$$W = a\cos ms + b\sin ms, \qquad m^2 = \frac{\rho\omega^2}{ES}. \tag{57}$$

Quant aux vibrations *torsionnelles*, l'équation (23) nous donne

$$H'' + m'^2 H = -\lambda r W'',$$

avec

$$\lambda = \frac{I'}{I} = 2(1+k)\frac{A+B}{I} - 1 - 2k \geq 1, \qquad m'^2 = \frac{\rho(A+B)}{GIS}\omega^2.$$

D'où

$$H = a'\cos m's + b'\sin m's + \mu W, \qquad \mu = \frac{\lambda r m^2}{m'^2 - m^2}. \tag{58}$$

Signalons tout de suite que $m'^2 - m^2$ est toujours > 0, car $A + B \geq I$ et $G < E$. Donc, μ est fini.

Les conditions aux limites sont $\varepsilon W + \varepsilon' Z = 0$, $\varepsilon_1 v + \varepsilon'_1 N = 0$ ou

$$\varepsilon W + \varepsilon' W' = 0, \qquad \varepsilon_1 H + \varepsilon'_1 H' = 0. \tag{59}$$

La première équation est la même que pour le cylindre. Si ω n'est pas une des pulsations de résonance déterminées au n° 35, on a nécessairement $a = b = 0$, $W = 0$. En portant (58) dans la deuxième équation (59), on obtient des formules analogues à celles du n° 35, m étant simplement remplacé par m'. Dans ce cas, on a une *vibration torsionnelle pure*.

Si ω est une des pulsations de résonance du n° 35, la fonction W n'est pas nulle; elle est déterminée à un facteur constant près. La deuxième équation (59) permet ensuite le calcul de a', b', si ω n'est pas en même temps une pulsation des vibrations torsionnelles pures. On a, dans ce cas, la *superposition d'une vibration longitudinale et d'une vibration torsionnelle*, ayant la fréquence des vibrations longitudinales du cylindre et déterminées à un facteur constant près.

Il peut arriver que ω soit simultanément une pulsation des vibrations longitudinales et des vibrations torsionnelles (1). Dans ce cas, le système déterminant a' et b' est incompatible ou indéterminé. Si le déterminant caractéristique n'est pas nul, il faut prendre $W = 0$ et l'on retombe sur la vibration torsionnelle pure. S'il est nul, on a la superposition des deux vibrations, mais avec deux constantes arbitraires au lieu d'une.

Il est facile de former un tableau analogue à celui du n° 36, et donnant, pour chacune des dix combinaisons possibles, les valeurs de m et de m'.

---

(1) Ceci exige que le rapport $\frac{E(A+B)}{GI}$ soit le carré d'un nombre commensurable.

38. *Vibrations transversales de la torsade.* — Les équations (24) nous donnent un système de deux équations différentielles linéaires à coefficients constants en U et V; chacune de ces équations est du quatrième ordre. Si l'on cherche une solution en e^{mx}, on obtient une équation caractéristique du quatrième degré en m^2. Connaissant ses quatre racines, on peut écrire l'intégrale générale, qui contient huit constantes arbitraires. En éliminant ces constantes entre les huit conditions aux limites, on obtient *l'équation de résonance* sous une forme *compliquée*. Nous n'insistons pas davantage sur cette question, en raison de son faible intérêt pratique.

CHAPITRE V.

LE FIL ÉLASTIQUE CIRCULAIRE.

39. *Vibrations planes.* — Reprenons les équations (E_3), (E_1) du n° 12, mais en supposant R et q constants. A la variable s, substituons l'angle polaire θ défini par $s = R\theta$. L'équation (E_1) devient

$$u = \frac{\partial w}{\partial \theta}. \tag{60}$$

Portant dans (E_3), nous obtenons

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\rho R^4}{EB}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w\right) = 0.$$

Si l'on pose $w = W \sin \omega t$, on a l'équation différentielle

$$W^{(6)} + 2W^{(4)} + W'' + \frac{\rho R^4 \omega^2}{EB}(W - W'') = 0; \tag{61}$$

dont l'intégrale générale est

$$W = a \operatorname{ch} m\theta + b \operatorname{sh} m\theta + a' \operatorname{ch} m'\theta + b' \operatorname{sh} m'\theta + a'' \operatorname{ch} m''\theta + b'' \operatorname{sh} m''\theta, \tag{62}$$

$a, b, \ldots, b''$ désignant des constantes arbitraires et m^2, m'^2, m''^2 les racines de l'équation

$$y(x-1) = x(x+1)^2, \tag{63}$$

en posant

$$y = \frac{\rho R^4 \omega^2}{EB}. \tag{64}$$

La courbe représentée par l'équation (64) a la forme ci-contre. Elle nous montre que pour $y < 0{,}1135$, m, m', m'' sont des imaginaires pures: pour $0{,}1135 < y < 17{,}64$, m est imaginaire pure, m' et m'' sont de la forme $\alpha \pm i\beta$: pour $17{,}64 < y$, m est imaginaire pure, m' et m'' sont réels.

Connaissant W, on a $U = W'$. Puis, par les formules (2), (17), (19) et (18),

$$\mu = \frac{W'' + W}{R}\sin\omega t, \qquad M = \frac{EB}{R^2}(W''' + W')\sin\omega t, \qquad X = -\frac{EB}{R^3}(W'''' + W'')\sin\omega t,$$

$$Z = \frac{EB}{R^3}[W^{(5)} + W''' - \gamma W']\sin\omega t.$$

Les équations de liaison (30) deviennent

$$(65)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 W' + \varepsilon_1'(W''' + W'') = 0, \qquad \varepsilon_3 W + \varepsilon_3'[W^{(4)} + W'' - \gamma W'] = 0, \\ \varepsilon_2(W'' + W) + \varepsilon_2'(W''' + W') = 0. \end{cases}$$

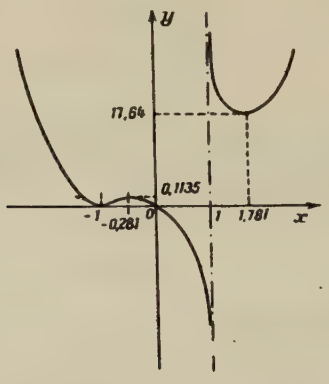

Fig. 1.

Elles sont de la forme

$$(66)\qquad \sum_{j=0}^{5} a_{ij} W^{(j)} = 0; \qquad i = 1, 2, 3.$$

Dans chacune d'elles, tous les j ont même parité et nous dirons que *la liaison est paire ou impaire* suivant que les j sont tous pairs ou tous impairs. Convenons en outre d'appeler a_{ij} les coefficients correspondant à l'extrémité $\theta = 0$ et b_{ij} ceux qui correspondent à l'extrémité $\theta = \theta_1$. Posons

$$(67)\qquad \sum_j a_{ij} m^j = \alpha_i, \qquad \sum_j b_{ij} m^j = \beta_i$$

et

$$(68)\qquad f = \operatorname{ch} m\theta_1, \qquad g = \operatorname{sh} m\theta_1.$$

Nos équations de liaison deviennent

$$(69)\qquad \begin{cases} a\alpha_i + a'\alpha_i' + a''\alpha_i'' = 0, & \text{liaison paire;} \\ b\alpha_i + b'\alpha_i' + b''\alpha_i'' = 0, & \text{liaison impaire;} \end{cases}$$

$$(70)\qquad \begin{cases} \beta_i(af + bg) + \beta_i'(a'f' + b'g') + \beta_i''(a''f'' + b''g'') = 0, & \text{liaison paire;} \\ \beta_i(ag + bf) + \beta_i'(a'g' + b'f') + \beta_i''(a''g'' + b''f'') = 0, & \text{liaison impaire.} \end{cases}$$

Convenons d'écrire en premier lieu, dans chaque groupe, les liaisons de même parité.

Le déterminant $D(\omega)$ se présente sous différentes formes, selon la parité des liaisons à chaque extrémité. Remarquons d'ailleurs que l'on peut toujours intervertir les deux extrémités et, par conséquent, choisir arbitrairement celle qui correspond à $s = 0$.

Dans tous les cas, chacune des trois premières lignes du déterminant comprend trois éléments nuls, tandis que les éléments des trois dernières lignes sont tous non nuls. Dès lors, nous développerons $D(\omega)$ par la *règle de Laplace*. Appelons D_{ijk} le déterminant constitué par les éléments appartenant aux trois premières lignes et aux colonnes de rangs i, j, k; appelons Δ_{ijk} le déterminant complémentaire, c'est-à-dire constitué par les éléments appartenant aux trois dernières lignes et aux colonnes dont les rangs sont différents de i, j, k. On a

$$D(\omega) = \Sigma(-1)^{i+j+k} D_{ijk} \Delta_{ijk}. \tag{71}$$

Cela posé, passons en revue les différents cas.

40. Convenons d'appeler cas C_{pq} tout cas pour lequel il y a p liaisons paires à la première extrémité ($\theta = 0$) et q liaisons paires à l'autre extrémité ($\theta = \theta_1$). D'après une remarque faite plus haut, nous pouvons supposer $p \geqq q$.

Le cas $C_{3-p,3-q}$ se déduit de C_{pq} en intervertissant les lettres a et b dans les équations (69) et (70), ce qui ne change pas $D(\omega)$. Le cas $C_{p,3-q}$ se déduit de C_{pq} en intervertissant les lettres f et g dans (70), donc aussi dans $D(\omega)$. Il résulte de ces remarques que nous pouvons, dans la discussion qui va suivre, ne donner à p et q que les valeurs 3 et 2.

Nous poserons

$$\gamma = \alpha'_1 \alpha''_2 - \alpha''_1 \alpha'_2, \qquad \delta = \beta'_1 \beta''_2 - \beta''_1 \beta'_2$$

et les formules déduites de celles-ci par permutation circulaire des accents. Convenons de désigner par le symbole Σ une somme obtenue par cette permutation circulaire.

Cas C_{33}. — On a immédiatement

$$D(\omega) = AB g g' g'', \qquad A = \| \alpha_i \quad \alpha'_i \quad \alpha''_i \|, \qquad B = \| \beta_i \quad \beta'_i \quad \beta''_i \|.$$

On en déduit que les *pulsations de résonance* sont données par les formules

$$im\theta_1 = \lambda\pi, \qquad im'\theta_1 = \lambda'\pi, \qquad im''\theta_1 = \lambda''\pi, \tag{72}$$

où λ, λ', λ'' désignent des nombres entiers réels arbitraires.

On a les *mêmes formules pour le cas* C_{00}. *Dans le cas* C_{30}, il suffit d'intervertir f et g, ce qui donne

$$im\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \lambda\pi, \qquad im'\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \lambda'\pi, \qquad im''\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \lambda''\pi. \tag{73}$$

Cas C_{32}. — On a

$$D(\omega) = A(\Sigma_i \beta_i \delta f g' g''). \tag{74}$$

L'*équation de résonance* s'obtient en annulant la parenthèse.

Dans le cas C_{31}, il suffit de *permuter* f *et* g. *Les cas* C_{01} *et* C_{02} donnent la *même équation que* C_{32} *et* C_{31}.

Cas C_{22}. — On a

$$D(\omega) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha'_1 & \alpha''_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha'_2 & \alpha''_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_3 & \alpha'_3 & \alpha''_3 \\ \beta_1 f & \beta'_1 f' & \beta''_1 f'' & \beta_1 g & \beta'_1 g' & \beta''_1 g'' \\ \beta_2 f & \beta'_2 f' & \beta''_2 f'' & \beta_2 g & \beta'_2 g' & \beta''_2 g'' \\ \beta_3 g & \beta'_3 g' & \beta''_3 g'' & \beta_3 f & \beta'_3 f' & \beta''_3 f'' \end{vmatrix}.$$

On calcule facilement les D_{ijk} et Δ_{ijk} et l'on obtient finalement

$$\begin{aligned} D(\omega) = {} & \Sigma g(\alpha'_3 \beta''_3 \gamma'' \delta' + \alpha''_3 \beta'_3 \gamma' \delta'') \\ & - \Sigma g f' f''(\alpha'_3 \beta''_3 \gamma' \delta'' + \alpha''_3 \beta'_3 \gamma'' \delta') - g g' g''(\Sigma \alpha_3 \beta_3 \gamma \delta). \end{aligned} \tag{75}$$

Si l'on considère les f, g, ... comme des variables indépendantes, la première somme doit être remplacée par

$$\Sigma g[\alpha'_3 \beta''_3 \gamma'' \delta'(f''^2 - g''^2) + \alpha''_3 \beta'_3 \gamma' \delta''(f'^2 - g'^2)].$$

Le cas C_{11} *donne le même* $D(\omega)$ que C_{22}.

Dans le cas C_{21}, on doit *permuter* f *et* g dans l'expression homogène en f, g, ..., g''. Ceci revient à faire la même permutation dans (75), mais en *changeant le signe de la première somme.*

41. On peut calculer les *coefficients des mouvements entretenus*. Il suffit en effet de remplacer les seconds membres des équations (69) et (70) par des constantes données c_i et d_i, puis de résoudre le système par rapport à a, a', a'', b, b', b''. Cela revient à *calculer les mineurs* du déterminant $D(\omega)$. Le mineur correspondant à l'élément α_i se déduit de $D(\omega)$ en y remplaçant α_i par *un* et α'_i, α''_i par zéro. Les mineurs correspondant aux éléments $\beta_i f$ ou $\beta_i g$ s'obtiennent en remplaçant β_i par *un* et β'_i, β_i par zéro, puis prenant le coefficient de f ou le coefficient de g. Toutefois, cette dernière opération n'est justifiée que si l'on considère f, g, ..., g'' comme des variables indépendantes. Par conséquent, dans le cas où $D(\omega)$ a la forme (75), il faut utiliser l'expression homogène indiquée au n° 40. Par exemple, les mineurs correspondant aux éléments $\beta_3 f$ et $\beta_3 g$ sont respectivement

$$\gamma f(\alpha''_3 \delta'' g' + \alpha'_3 \delta' g'') - \delta(\alpha''_3 \gamma'' g' f'' + \alpha'_3 \gamma' g'' f') \qquad \text{et} \qquad -\gamma(\Sigma \alpha_3 \delta g' g'').$$

42. *Vibrations latérales.* — Les équations (E_1), (E_2) du n° 12 deviennent

$$GIR\frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} + (EA + GI)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - EAR\nu = 0,$$

$$EA\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - R\frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} - R\nu\right) + \rho R^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

D'où l'on tire

$$(EA + GI)R\nu = GI\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^4} + (EA + 2GI)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \rho\frac{GI}{EA}R^4\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{76}$$

$$\frac{\partial^6 \varphi}{\partial \theta^6} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\rho R^4}{EA}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \frac{\rho R^4}{GI}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \tag{77}$$

Si l'on pose $\varphi = V\sin\omega t$, on a l'équation différentielle

$$V^{(6)} + 2V^{(4)} + V'' + \frac{\rho R^4 \omega^2}{EA}(kV - V'') = 0,$$

avec

$$k = \frac{EA}{GI}. \tag{78}$$

L'intégrale générale de cette équation est de la forme (62); mais, l'équation (63) est remplacée par

$$y(x - k) = x(x + 1)^2, \tag{79}$$

avec

$$y = \frac{\rho R^4 \omega^2}{EA}. \tag{80}$$

La courbe représentée par (79) a même allure que celle du n° 39. Les seules différences sont que l'asymptote a pour équation $x = k$ et que les racines de y' autres que -1 sont données par l'équation

$$2x^2 - 3kx - k = 0.$$

En ce qui concerne la réalité de m, m', m'', on a des conclusions analogues à celles du n° 39; la seule différence est que les valeurs limites de y dépendent de k.

Connaissant V, on a, d'après (76), (2), (17) et (19),

$$R\nu = \frac{V'''' + (2 + k)V'' - yV}{1 + k}\sin\omega t, \qquad R\lambda = -V'\sin\omega t,$$

$$L = \frac{EA}{(1 + k)R^2}(V'''' + V'' - yV)\sin\omega t,$$

$$N = \frac{GI}{(1 + k)R^2}[V^{(5)} + (2 + k)V''' + (1 + k - y)V']\sin\omega t,$$

$$Y = \frac{GI}{R^3}[V^{(5)} + 2V''' + V'(1 - y)]\sin\omega t.$$

Les équations de liaison (30) deviennent

$$(81)\quad \begin{cases} \varepsilon_2 V + \varepsilon'_2[V^{(5)} + 2V''' + V'(1-y)] = 0, \\ \varepsilon_4 V' + \varepsilon'_4(V'''' + V'' - yV) = 0, \\ \varepsilon_6[V^{(5)} + (2+k)V'' - yV] + \varepsilon'_6[V^{(5)} + (2+k)V''' + (1+k-y)V'] = 0. \end{cases}$$

Elles sont encore de la forme (66) et l'on continue comme dans le cas des vibrations planes.

43. *Tableau des liaisons.* — Pour chaque extrémité, on peut avoir une des liaisons ci-après. Dans ce tableau, nous indiquons les équations de liaison, avec leur interprétation concrète et leur expression par la fonction W ou V. Nous indiquons ensuite (1) les expressions de $\alpha = \alpha_3$ et de γ. Lorsque α, α', α'' ont un facteur commun, nous l'avons supprimé, car cela ne change pas l'équation de résonance. Nous avons fait de même pour γ. Nous avons posé $m^2 = x$, comme aux nos 39 et 42. Enfin, nous avons quelquefois simplifié l'expression de α ou de γ, en tenant compte de (63) ou (79).

Vibrations planes.

A. $u = w = \mu = 0$; encastrement complet; $W = W'' = W' = 0$; m; $x'' - x'$.

B. $X = w = \mu = 0$; translation suivant Ox; $W = W'' = W''' = 0$.

C. $u = Z = \mu = 0$; translation suivant Oz; $W' = W''' + W^{(5)} = W + W'' = 0$;
$1 + x$; $m'm''(1+x)(x'-x'')$.

D. $u = w = M = 0$; rotation autour de Oy; $W' = W'' = W = 0$; 1;
$m'm''(x''-x')$.

E. $u = Z = M = 0$; translation suivant Oz et rotation autour de Oy;
$W' = W''' = W^{(3)} = 0$.

F. $X = w = M = 0$; translation suivant Ox et rotation autour de Oy;
$W = W'' + W'''' = W' + W''' = 0$; $m(1+x)$; $(1+x)(x'-x'')$.

G. $X = Z = \mu = 0$; translation arbitraire dans zOx;
$W + W'' = W'' + W'''' = W''' + W^{(5)} - yW' = 0$; $m(x + x^2 - y)$ ou $\dfrac{mx(1+x)}{1-x}$;
$(1+x')(1+x'')(x'-x'')$.

H. $X = Z = M = 0$; liberté; $W' + W''' = W''' + W^{(5)} - yW' = W'' + W'''' = 0$;
$x(1+x)$; $m'm''(1+x-x'x''-y)(x'-x'') = m'm''[(1+x')(1+x'')+y](x''-x')$.

Vibrations latérales.

A. $\rho = \lambda = \nu = 0$; encastrement complet; $V = (2+k)V'' + V'''' = V' = 0$;
m; $(k-x)(x''-x')$.

B. $\rho = L = \nu = 0$; rotation autour de Ox; $V = V'' = V'''' = 0$.

(1) Sauf pour les liaisons B et E, pour lesquelles ces expressions sont inutiles.

C. $Y = \lambda = \nu = 0$; translation suivant Oy;

$$V' = 2V''' + V^{(5)} = -yV + (2+k)V'' + V'''' = 0;$$

$$-y + (2+k)x + x^2 \qquad \text{ou} \qquad \frac{x}{x-k}; \qquad m(x''-x').$$

D. $\gamma = \lambda = N = 0$; rotation autour de Oz; $V' = (2+k)V''' + V^{(5)} = V = 0$; 1;

$$m'm''(k-x)(x''-x').$$

E. $Y = \lambda = N = 0$; translation suivant Oy et rotation autour de Oz;

$$V' = V''' = V^{(5)} = 0.$$

F. $Y = L = \nu = 0$; translation suivant Oy et rotation autour de Ox;

$$V'' = yV - V''' = (1-y)V' + 2V''' + V^{(5)} = 0; \qquad \frac{1}{m}; \qquad (y + x'x'')(x' - x'').$$

G. $\gamma = L = N = 0$; pivotement autour de O;

$$V = V'' + V'''' = (1 + k - y)V' + (2+k)V''' + V^{(5)} = 0; \qquad \frac{m(x+1)}{k-x};$$

$$(1+x)(x'-x'').$$

H. $Y = L = N = 0$; liberté; $V' + V''' = (1+y)V''' + V^{(5)} = -yV + V'' + V'''' = 0$;

$$x(1+x) - y; \qquad m(1+x)(x''-x').$$

On en déduit les 36 combinaisons suivantes, rangées suivant les catégories indiquées au n° 40 :

C_{33} : BB; C_{00} : EE; C_{30} : BE;

C_{32} : BA, BF, BG; C_{31} : BC, BD, BH; C_{01} : EC, ED, EH; C_{02} : EA, EF, EG;

C_{21} : AC, AD, AH, FC, FD, FH, GC, GD, GH.

En utilisant les formules du n° 40 et les tableaux ci-dessus, on peut immédiatement écrire l'équation de résonance correspondant à chacun de ces cas. Nous nous occuperons de sa résolution au Chapitre suivant.

44. *Ressort hélicoïdal.* — Dans ce cas, q et r sont des constantes quelconques. Les équations (E_1), (E_2), (E_3), (E_4) du n° 11 sont des équations linéaires à coefficients constants. En cherchant les *solutions stationnaires*, on est conduit à un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ce système est du douzième ordre et son équation caractéristique se ramène à une équation du sixième degré. On pourrait, en principe, former l'*équation de résonance* par une méthode analogue à celle que nous venons d'employer pour le fil circulaire. Mais, les calculs seraient extrêmement compliqués.

Si, comme il arrive généralement dans la pratique, le ressort est à *spires très aplaties*, r est très petit vis-à-vis de q et l'on peut approximativement *assimiler le ressort à un fil circulaire* et lui appliquer les résultats précédemment obtenus dans le présent chapitre.

Signalons en particulier le cas du *ressort de soupape* d'un moteur à explosion. Le ressort est fortement comprimé entre une cuvette fixe et une cuvette mobile animée d'une translation alternative suivant l'axe du ressort. Il est vraisemblable d'admettre que le frottement s'oppose à toute rotation de chaque extre-

mité autour de la tangente Oz ou autour de l'axe du ressort. On a dès lors la liaison A dans chaque cuvette. On se trouve donc dans le *cas* AA *des vibrations latérales*.

45. *Spiral.* — Dans le cas du *spiral de montre*, on a un *fil plan*, dont le rayon de courbure est approximativement de la forme $R = R_0 - h\theta$, h désignant une constante très petite vis-à-vis de R et θ l'angle polaire de la normale.

On peut former l'équation différentielle linéaire du sixième ordre qui détermine les vibrations planes ou latérales. Mais, cette équation ne s'intègre pas par les méthodes élémentaires. En tenant compte du fait que h est petit vis-à-vis de R, on pourrait calculer l'intégrale générale sous la forme d'une série entière en h, qui convergerait rapidement. Mais, l'équation de résonance, déjà compliquée pour $h = 0$, serait inextricable. Le seul moyen pratique pour obtenir approximativement les pulsations de résonance consiste à *remplacer le spiral par un fil circulaire, dont le rayon est la moyenne arithmétique des rayons extrêmes*. Il resterait à voir quel est l'ordre de grandeur de l'erreur commise; cela paraît difficile.

La même méthode peut s'appliquer au *ressort conique* à spires très aplaties et de faible pas radial.

Dans le cas du spiral de montre, on peut se poser le problème suivant. Imaginons que *la montre soit soumise à un mouvement vibratoire* sinusoïdal et que, pour simplifier, nous supposons réduit à une translation. Proposons-nous de calculer les pulsations de résonance.

Chacune des deux extrémités du spiral est animée du mouvement vibratoire de la montre. En outre, l'extrémité encastrée dans le balancier est animée du mouvement de rotation de ce dernier autour de son axe, lequel est très sensiblement sinusoïdal, mais de grande amplitude. Comme nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que les vibrations sont très petites, il ne semble pas qu'on puisse appliquer notre théorie aux oscillations du balancier, à moins de s'en tenir au cas de très petites oscillations.

En appliquant le principe de la superposition des petits mouvements, on peut alors décomposer le problème en *trois problèmes simples :*

I. *Oscillations du balancier, montre au repos;*

II. *Vibration de la montre parallèlement au plan du spiral, balancier calé;*

III. *Vibration de la montre perpendiculairement au plan du spiral, balancier calé.*

On a une vibration plane dans les deux premiers problèmes, latérale dans le troisième. L'équation de résonance est chaque fois donnée par le cas AA.

Nous verrons, au chapitre suivant, que *la plus basse fréquence de résonance est très supérieure à celle du balancier*. Comme le mouvement de ce dernier est

pratiquement dénué d'harmoniques, *la résonance est impossible dans le problème* I. Mais, elle est possible dans les deux autres problèmes, si la fréquence des vibrations de la montre est convenablement choisie.

CHAPITRE VI.

ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE RÉSONANCE DU FIL ÉLASTIQUE CIRCULAIRE.

46. *Méthode générale.* — Étant donné la valeur numérique de y dans le cas des vibrations planes, ou les valeurs numériques de y et de k dans le cas des vibrations latérales, on peut se proposer de calculer les valeurs de 0 qui annulent $D(\omega)$. La seule méthode pratique pour atteindre ce but nous paraît être la méthode rudimentaire qui consiste à faire des substitutions convenablement échelonnées, de manière à séparer les racines; puis à resserrer chaque intervalle jusqu'à ce que la méthode des parties proportionnelles donne une approximation suffisante.

On peut montrer facilement que, dans chacun des 36 cas énumérés au n° 43, il existe une infinité de racines en 0. On en déduit ensuite que, pour une valeur donnée de 0, il existe une *infinité de pulsations de résonance*.

Mais, les calculs numériques sont très longs et je me suis contenté de les faire dans le cas AA des vibrations planes. Les résultats de ce calcul seront donnés au n° 59.

Une autre méthode consiste à établir des *formules asymptotiques* permettant la résolution approchée de l'équation pour les valeurs de y d'un certain domaine. Pour découvrir ce domaine, il y a lieu de chercher *quel est, dans la pratique, l'ordre de grandeur de* y.

47. *Ordre de grandeur de* y. — Considérons d'abord le cas des *vibrations planes*, de sorte que y est donné par la formule (64). Adoptons pour unités le kilogramme-poids, le millimètre et la seconde. Si S est évalué en millimètres carrés et si d est la densité du fil par rapport à l'eau, on a

$$\rho = \frac{Sd}{9{,}81} \cdot 10^{-9}.$$

Appelons K le rayon de giration de la section droite par rapport à Oy. On a

$$y = \frac{d R^4 \omega^2 \cdot 10^{-9}}{9{,}81\, E K^2}.$$

Supposons par exemple un *ressort à boudin* à spires très aplaties (n° 44) et fabriqué avec du *fil rond* de rayon r, de sorte que $K = \frac{r}{2}$. Si le ressort est en

acier, le rapport $\frac{d}{E}$ est de l'ordre de $\frac{1}{3000}$. Donc, y est de l'ordre de $\frac{R^2\omega^2}{r^2}\cdot 10^{-13}$. Admettons que le rapport $\frac{R}{r}$ soit de l'ordre de 10; y est alors de l'ordre de $r^2\omega^2\cdot 10^{-9}$. *Supposons que r ne dépasse pas* 5^{mm} et *que la fréquence ne dépasse pas* 100, de sorte que $\omega^2 < 4\cdot 10^5$. Dans ces conditions, y ne dépasse pas $\frac{1}{100}$.

Si le ressort est fabriqué avec du *fil plat* d'épaisseur e, on a $K^2 = \frac{e^2}{12}$.

Si l'on admet que le rapport $\frac{R}{e}$ est de l'ordre de 10, y est trois fois plus grand que précédemment, donc de l'ordre de $\frac{3}{100}$.

On peut dès lors admettre que y *ne dépasse pas quelques centièmes*. Bien entendu, cette hypothèse peut se trouver en défaut si la fréquence est très supérieure à 100 ou si le rayon du ressort est très supérieur à 10 fois l'épaisseur du fil qui le constitue. Il en est de même si le métal est très mou. Par exemple, si le ressort est en *bronze*, $\frac{d}{E}$ est de l'ordre de $\frac{1}{600}$, soit cinq fois plus grand que précédemment.

Dans le cas des *vibrations latérales*, y est donné par la formule (80). Si l'on a du fil rond, rien n'est à changer dans les conclusions précédentes. Si l'on a du fil plat, $K^2 = \frac{h^2}{12}$ au lieu de $\frac{e^2}{12}$. Nos conclusions sont renforcées, car y est réduit dans le rapport $\frac{e^2}{h^2}$.

Cette discussion nous montre que *le cas particulier où y est très petit présente un certain intérêrêt pratique*. Nous allons donc en faire l'étude.

48. *Cas où y est très petit.* — L'équation (63) étant un cas particulier de l'équation (79), obtenu pour $k = 1$, occupons-nous seulement de cette dernière. Posant $y = 2\varepsilon^2$, elle s'écrit

$$x(x+1)^2 = 2\varepsilon^2(x-k).$$

Ses trois racines x, x', x'' sont fonctions holomorphes de ε au voisinage de $\varepsilon = 0$. Un calcul élémentaire donne, en posant

$$2h = \sqrt{2(k+1)}, \quad h' = \sqrt{2k}; \tag{82}$$

$$\begin{cases} x = -1 - 2h\varepsilon + k\varepsilon^2 - \dfrac{k(5k+4)}{4h}\varepsilon^3 + \dots, \\ x'' = -2k\varepsilon^2[1 + 2(2k+1)\varepsilon^2 + 4(7k^2+6k+1)\varepsilon^4 + \dots]; \end{cases} \tag{83}$$

x' se déduit de x en changeant ε en $-\varepsilon$.

Les fonctions x'' et $x + x' = -2 - x''$ sont *paires*; $x - x'$ est *impaire*. On a ensuite

$$m = in, \qquad m' = in', \qquad m'' = in''; \tag{84}$$

$$n = p + q\varepsilon, \qquad n' = p - q\varepsilon, \qquad n'' = r\varepsilon; \tag{85}$$

p, q, r désignant trois fonctions *paires* :

$$(86)\quad p=1-p_1\varepsilon^2+\dots,\qquad q=h(1+q_1\varepsilon^2+\dots),\qquad r=h'(1+r_1\varepsilon^2+r_2\varepsilon^4+\dots);$$

$$(87)\quad p_1=\frac{3k+1}{4},\qquad q_1=\frac{8k^2+8k+1}{4(k+1)},\qquad r_1=2k+1,\qquad r_2=\frac{24k^2+20k+3}{2},\ \dots$$

Dans le cas particulier $k=1$, on a

$$(88)\quad \begin{cases} h=1, \quad h'=\sqrt{2}, \quad x=-1-2\varepsilon+\varepsilon^2-\dfrac{9}{4}\varepsilon^3+\dots, \\ x''=-2\varepsilon^2(1+6\varepsilon^2+56\varepsilon^4+\dots); \\ p_1=1, \quad q_1=\dfrac{17}{8}, \quad r_1=3, \quad r_2=\dfrac{47}{2}. \end{cases}$$

Nous allons maintenant chercher à résoudre approximativement l'équation de résonance dans les différents cas énumérés au n° 40.

49. *Cas* BB, EE, BE. — Les formules (72) et (73) nous donnent les solutions *exactes*

BB, EE. $$\theta=\frac{\lambda\pi}{n},\qquad \frac{\lambda'\pi}{n'},\qquad \frac{\lambda''\pi}{n''}.$$

BE. $$\theta=\frac{2\lambda+1}{2n}\pi,\qquad \frac{2\lambda'+1}{2n'}\pi,\qquad \frac{2\lambda''+1}{2n''}\pi.$$

50. *Cas* C_{32}, C_{01}, C_{31}, C_{02}. — Posons

$$(89)\qquad \varphi=\alpha\gamma,\qquad \varphi'=\alpha'\gamma',\qquad \varphi''=\alpha''\gamma'',$$

les α, ... γ'' étant donnés par les tableaux du n° 43 et se rapportant à la seconde liaison. Posons ensuite

$$(90)\qquad 2a=\varphi+\varphi',\qquad 2b=\varphi-\varphi',\qquad c=\varphi'';$$

$$(91)\qquad \varepsilon\theta=x,\qquad p\theta=u,\qquad qx=v,\qquad rx=w.$$

De l'équation (74), nous déduisons les suivantes :

Cas C_{32} *et* C_{01}

$$(92)\qquad \sin w(a\sin 2u-b\sin 2v)+c\cos w(\sin^2 u-\sin^2 v)=0.$$

Cas C_{31} *et* C_{02}

$$(93)\qquad \cos w(a\sin 2u+b\sin 2v)+c\sin w(\cos^2 u-\sin^2 v)=0.$$

51. *Cas* C_{22}, C_{11}, C_{21}. — Affectons de l'indice $_1$ les quantités relatives a la deuxième liaison et posons

$$(94)\quad \begin{cases} 4A = \alpha'\gamma''\alpha_1''\gamma_1' + \alpha''\gamma'\alpha_1'\gamma_1'' + \alpha''\gamma\alpha_1\gamma_1'' + \alpha\gamma''\alpha_1''\gamma_1, & 2B = ca_1 + ac_1, \\ 4A' = \alpha'\gamma''\alpha_1''\gamma_1' + \alpha''\gamma'\alpha_1'\gamma_1'' - \alpha''\gamma\alpha_1\gamma_1'' - \alpha\gamma''\alpha_1''\gamma_1, & 2B' = cb_1 + bc_1, \\ 4C = 4aa_1 + cc_1, \quad 4C' = 4bb_1 + cc_1, & 4D = (\alpha_1\alpha' - \alpha\alpha_1')(\gamma_1\gamma' - \gamma\gamma_1'). \end{cases}$$

De (75), on déduit

Cas C_{22} *et* C_{11}. —

$$(95)\quad \sin u(A\cos v - B\cos u\cos w) + \sin v(A'\cos u + B'\cos v\cos w) - \sin w(D - C\sin^2 u + C'\sin^2 v) = 0.$$

Cas C_{21}. —

$$(96)\quad \cos u(-A\cos v + B\sin u\sin w) + \sin v(A'\sin u + B'\cos v\sin w) + \cos w(D - C\cos^2 u + C'\sin^2 v) = 0.$$

Remarques. — 1° Chacun des coefficients a, b, c, A, A', B, B', C, C', D est une fonction paire ou impaire de ε.

2° Dans les *cas symétriques* AA, CC, ..., HH, on a $A = B$, $A' = -B'$, $D = 0$.

3° Chaque coefficient est une fonction holomorphe de ε au voisinage de $\varepsilon = 0$. Il peut donc être développé en série *convergente* suivant les puissances de ε. J'ai calculé le premier terme de chacun de ces développements (1). Pour ne pas allonger ce Mémoire, je ne les reproduirai pas.

52. *Cas où* θ *reste fini quand* ε *tend vers zéro.* — En utilisant les parties principales des coefficients des équations (92), (93), (95) et (96), on obtient immédiatement *l'équation limite*.

On trouve d'abord (2), en affectant d'un accent les liaisons correspondant aux vibrations latérales,

$$\sin^2\theta = 0, \quad \text{pour BF, EC, ED, CC, B'F', B'G', E'D', F'F';}$$
$$1 - \cos\theta = 0, \quad \text{pour DD, FF, D'D', G'G';}$$
$$(1 - \cos\theta)^2 = 0, \quad \text{pour FD, D'G';}$$
$$\cos^2\theta = 0, \quad \text{pour BC, FC, E'F', D'F'.}$$

(1) Dans les cas DF (vibrations planes) et DG (vibrations latérales), j'ai dû calculer deux termes pour trois des coefficients.

(2) On peut trouver ces solutions *a priori*, en cherchant les mouvements stationnaires de *fréquence nulle*. Un tel mouvement est un *déplacement uniforme, sans déformation*, de vitesse infiniment petite. Il suffit de chercher, dans chaque cas, s'il existe un tel déplacement qui soit compatible avec les liaisons imposées aux deux extrémités du fil. On retrouve les cas énumérés ci-dessus. Mais, on en trouve d'autres, pour lesquels l'angle θ est indéterminé. Ces cas sont à rejeter. Dans chacun d'eux, le déterminant $D(\omega)$ est infiniment petit d'ordre supérieur à 3 par rapport à ε, tandis qu'il est seulement d'ordre 3 dans les autres cas.

Dans les autres cas, le premier membre de l'équation est une combinaison à coefficients positifs (¹) des fonctions suivantes :

$$P(x) = x - \sin x,$$
$$Q(x) = x + \sin x,$$
$$F(x) = x(2 + \cos x) - 3\sin x,$$
$$G(x) = 3x + \sin x(\cos x - 1),$$
$$H(x) = x(1 + 2\sin^2 x) + \sin x(3\cos x - 4),$$
$$K(x) = x(3 + \cos x) - 4\sin x,$$
$$R(x) = x^2 + x\sin x - 4(1 - \cos x),$$
$$S(x) = 3x^2 - 2x\sin x(2 + \cos x) - (1 - \cos x)(1 - 7\cos x),$$
$$T(x) = 2x^2 - x\sin x(2 - \cos x) - \sin^2 x,$$
$$U(x) = x^2 - x\sin x\cos x - 2(1 - \cos x)^2;$$

où l'on doit remplacer x par θ, 2θ ou $\frac{\theta}{2}$. Toutes ces fonctions étant positives (²) avec x, *les équations n'ont pas de racines*.

53. *Formules asymptotiques.* — Si l'on pose $u = p\theta$, $v = qx$, $w = rx$, $x = \varepsilon\theta$, l'équation de résonance est toujour de la forme

$$F(u, v, w, \varepsilon) = 0, \tag{97}$$

F désignant un polynome en $\sin u$, $\cos u$, $\sin v$, $\cos v$, $\sin w$, $\cos w$, dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de ε au voisinage de $\varepsilon = 0$.

(¹) Pour les vibrations latérales, ordonner suivant les puissances de k. Dans le cas AA, le premier membre de l'équation admet le facteur $P(\theta)$ ou $kP(\theta) + Q(\theta)$. Dans les cas DD (vibrations planes ou latérales), FF (vibrations planes), GG (vibrations latérales), il admet le facteur $1 - \cos\theta$.

(²) Pour F et K, on est ramené à prouver que la fonction $y = x - \frac{a\sin x}{b + \cos x}$ est positive quand $a = b + 1$ et $b \geq 2$. La dérivée a le signe de $(1 - u)(b^2 - a - u)$, avec $u = \cos x$. Le second facteur est positif, car $b^2 - a = b^2 - b - 1 \geq 4 - 2 - 1 = 1$.

La dérivée de G est $2(1 - \cos x)^2 > 0$.

Pour H, la fonction $y = x + \frac{\sin x(3\cos x - 1)}{1 + 2\sin^2 x}$ est > 0. En effet, sa dérivée a le signe de $u(1 - u)(1 + u - u^2)$. Pour les valeurs de x annulant u, $y = x - \frac{4}{3}\sin x \geq \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} > 0$. Pour les valeurs de x annulant le troisième facteur, on a

$$y = x - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\sin x. \qquad \text{Comme } \cos x < -\frac{1}{2},\ x > \frac{2\pi}{3},\ y > \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} > 0.$$

Donc, la fonction est toujours positive.

On a ensuite

$$R'(x) = F(x), \qquad S'(x) = 4(1 - u)F(x), \qquad U'(x) = H(x).$$

Toutes ces dérivées sont positives, donc aussi les fonctions R, S, U. Enfin, $T'(x)$ est le produit du facteur positif $D = 3 - 2u + 2u^2$ par la fonction $y = x - \frac{\sin x(2 + u)}{D}$, dont la dérivée a le signe de $(1 - u)^2(8 + 3u + 2u^2) > 0$. Donc, $y > 0$, $T' > 0$, $T > 0$.

Si l'on remplace u, v, w par leurs valeurs en fonction de θ et ε, l'équation (97) peut s'écrire

$$G(\theta) = \varepsilon^{2\alpha} H(\theta, \varepsilon^2), \qquad \alpha \geq 1, \tag{98}$$

G et H désignant des fonctions holomorphes (¹). Dans les cas énumérés au n° 52, l'équation $G(\theta) = 0$ admet une infinité de racines. Ces racines sont doubles, sauf dans les cas FD, D'G', où elles sont quadruples. Soit θ_0 l'une d'elles. En posant $u = \theta_0 + \varphi$, on peut développer φ suivant les puissances de ε ou de $\sqrt{\varepsilon}$ (cas FD, D'G') et ce développement est *convergent* pour ε assez petit. On en déduit le développement de $\theta = \frac{u}{p}$.

Je n'ai calculé effectivement que la partie principale de φ, qui est toujours de l'ordre de ε ou de $\sqrt{\varepsilon}$. Dans ce cas, on a

$$\theta = \theta_0 + \varphi.$$

Nous appellerons ce cas le *cas* I.

Si l'équation $G(\theta) = 0$ n'a pas de racines, x ne peut tendre vers zéro avec ε. On cherche alors les solutions pour lesquelles x tend vers une limite finie x_0.

Développons F suivant les puissances de ε, en considérant u, v, w comme des constantes. En divisant par une certaine puissance de ε, l'équation prend la forme

$$f(u, v, w) = \varepsilon^p g(u, v, w) + \ldots, \tag{99}$$

f, g, ... étant des polynomes trigonométriques en u, v, w. La série du second membre est uniformément convergente quels que soient u, v, w, pour ε assez petit. La fonction $f(u, v, w)$ a l'une des formes suivantes, où α, β désignent des constantes

$$\left\{\begin{array}{c} \sin w \sin 2v, \quad \cos w \sin 2v, \quad \sin w \cos^2 v, \quad \sin w \sin^2 v, \quad \cos w \cos^2 v, \\ \cos w \sin^2 v, \quad \sin v(\operatorname{tg} v - \alpha \operatorname{tg} w), \quad \cos v(\operatorname{tg} v - \alpha \operatorname{tg} w), \\ \sin v(\cot v - \beta \operatorname{tg} w), \quad \cos v(\cot v - \beta \operatorname{tg} w); \end{array}\right. \tag{100}$$

$$\sin^2 \theta - \sin v(\sin v + \alpha \cos v \cot w), \qquad \cos^2 \theta - \sin v(\sin v + \beta \cos v \cot w). \tag{101}$$

Si elle est de l'une des formes (100), l'équation limite admet une *infinité de racines en x*. Soit x_0 l'une d'elles. Si l'on exprime le second membre de (99) en fonction de ε et de x, on obtient une fonction z qui admet $\varepsilon = 0$ comme *point singulier essentiel*. Il n'est donc *pas question de développer* $\varphi = x - x_0$ *suivant les puissances de* ε. Toutefois, on peut développer φ suivant les puissances de ε^2 et de z ou $\sqrt{z}$ et ensuite remplacer z par son développement. Mais ces deux développements doivent être *limités*. En prenant *un seul terme* dans chacun d'eux, on obtient une *formule asymptotique* de la forme

$$\varphi = \varepsilon^m G(u, v, w). \tag{102}$$

(¹) Le déterminant $D(\omega)$ est toujours une fonction paire ou impaire de ε.

Dans le second membre, on peut remplacer v et w par $v_0 = hx_0$ et $w_0 = h'x_0$; on commet sur G une erreur infiniment petite. Quant à u, sa valeur exacte est $u = \frac{x_0}{\varepsilon} + \frac{\varphi}{\varepsilon}$.

Si $m > 1$, $\frac{\varphi}{\varepsilon}$ est infiniment petit et la partie principale de φ s'écrit

$$\varepsilon^m G\left(\frac{x_0}{\varepsilon}, v_0, w_0\right).$$

Dans la pratique, x_0 résulte de la connaissance directe de v_0 ou w_0 ou de la résolution d'une équation transcendante de la forme

$$\alpha \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} v \qquad \text{ou} \qquad \beta \operatorname{tg} w = \cot v.$$

Suivant le cas, nous poserons $\varphi = v - v_0$, ou $w - w_0$, ou $x - x_0$. L'ordre m de φ sera au plus 3, 4 ou 2. Connaissant la partie pricipale de φ, on aura l'une des trois formules

$$(103) \qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{v_0}{\varepsilon}(1 - q_1\varepsilon^2) + \dfrac{\varphi}{\varepsilon h}, \qquad \theta = \dfrac{w_0}{\varepsilon}[1 - r_1\varepsilon^2 + (r_1^2 - r_2)\varepsilon^4] + \dfrac{\varphi}{\varepsilon' h}, \\ \theta = \dfrac{x_0}{\varepsilon} + \dfrac{\varphi}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Dans les deux premières, on ne devra garder, bien entendu, que les termes d'ordre $\leq m - 1$.

Nous appellerons ce cas le *cas* II.

Si $m = 1$, $z = \frac{\varphi}{\varepsilon}$ n'est plus infiniment petit. Sa limite finie pourrait être obtenue en résolvant l'équation transcendante

$$z = G\left(\frac{x_0}{\varepsilon} + z, v_0, w_0\right).$$

Mais, il est plus simple d'écrire cette équation sous la forme

$$\theta - \frac{x_0}{\varepsilon} = G(\theta, v_0, w_0) = H(\theta)$$

et d'en tirer

$$(104) \qquad \varepsilon = \frac{x_0}{\theta - H(\theta)}.$$

Dans cette formule, on peut *choisir arbitrairement* θ, pourvu *que le second membre soit assez petit*. On obtient ainsi ε *en fonction de* θ. Ce cas sera appelé le *cas* III.

Il reste le cas où $f(u, v, w)$ a l'une des formes (101). L'équation limite s'écrit

$$(105) \qquad \begin{cases} \sin^2\theta = \sin v_0(\sin v_0 + \alpha \cos v_0 \cot w_0) \\ \text{ou} \quad \cos^2\theta = \sin v_0(\sin v_0 + \beta \cos v_0 \cot w_0). \end{cases}$$

On choisit arbitrairement x, sous réserve que le second membre, où l'on remplace φ_0 et ϖ_0 par hx et $h'x$, soit compris entre zéro et *un*; ce qui est évidemment toujours possible. On calcule ensuite θ, en adoptant une *détermination très grande* par rapport à x. On a ensuite $\varepsilon = \frac{x}{\theta}$.

On obtient ainsi θ *et* ε *en fonction du paramètre* x. Ce cas sera appelé le *cas* IV.

Dans les quatre cas, *on pourrait améliorer l'approximation* en poussant plus loin les développements; mais, nous ne l'avons pas fait en général et nous nous contenterons de donner les résultats concernant la première approximation.

54. *Résultats.* — On trouvera, dans les tableaux ci-après, les résultats obtenus par les méthodes précédentes (¹). Dans chaque cas, on indique d'abord, entre parenthèses, le cas correspondant à la solution considérée. On donne ensuite la valeur de θ_0, ou de φ_0, ou de ϖ_0, ou de α, ou de β; puis la valeur de φ; ceci pour les cas I ou II. Pour le cas III, on donne la fonction $H(\theta)$. Pour le cas IV, on donne simplement la valeur de α ou de β.

Dans toutes les formules, λ désigne un nombre entier positif arbitraire. Pour simplifier l'écriture, on a posé

$$\frac{kh'}{h} = h'', \qquad \frac{3k+1}{2} = k', \qquad \frac{k-1}{k+1} = k'';$$

$$K = \frac{\cos\varphi_0 - (-1)^\lambda \cos\theta_0}{\sin\varphi_0}, \qquad P = \frac{\cos^2\theta_0 - \sin^2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0}, \qquad P' = \frac{\sin^2\theta_0 - \sin^2\varphi_0}{\sin 2\varphi_0}.$$

$$2Q = \frac{1}{k' + \cos^2\varphi_0}, \qquad 2Q' = \frac{1}{k' + \sin^2\varphi_0},$$

$$R = 2\,\frac{kh'\sin^2\theta_0 - h'(2k+1)\sin^2\varphi_0 - 4kh(-1)^\lambda \cos\theta_0 \sin\varphi_0}{h\sin 2\varphi_0},$$

$$R' = \frac{\cos^2\theta_0 + \cos 2\varphi_0 - 2(-1)^\lambda \cos\theta_0 \cos\varphi_0}{\sin 2\varphi_0},$$

$$S = P'\sin\theta\left(4\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varpi_0} - \cos\theta\right), \qquad S' = Q'\sin\theta\left[4k\frac{\cos\varphi_0}{\cos\varpi_0} + (1-k)\cos\theta\right],$$

$$T = \sqrt{3\theta_0^2 - 4\theta_0(-1)^\lambda}, \qquad T' = \sqrt{\theta_0^2 + 4(-1)^\lambda - 4}, \qquad T'' = \sqrt{\theta_0^2 - 2}.$$

On a rangé les différentes liaisons par ordre alphabétique, afin qu'on puisse retrouver rapidement la solution correspondant à une combinaison quelconque.

Vibrations planes.

AA. (II) $\varpi_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 4K\varepsilon^2\sqrt{2}$; (III) $\varphi_0 = \lambda\pi$, $H = \pm\sin\theta$.

AB. (II) $\varpi_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 4P'\varepsilon^2\sqrt{2}$; (III) $2\varphi_0 = \lambda\pi$, $2H = -(-1)^\lambda \sin 2\theta$.

AC. (II) $\varphi_0 = \lambda\pi$, $\varphi = 4R'\varepsilon^2\sqrt{2}$; (III) $2\varphi_0 = \lambda\pi$, $2H = (-1)^\lambda \sin 2\theta$,

AD. (III) $\varphi_0 = \lambda\pi$, $2H = \sin 2\theta$; (III) $\alpha = -\sqrt{2}$, $H = S$.

AE. (II) $2\varpi_0 = (2\lambda+1)\pi$, $\varphi = 4P\varepsilon^2\sqrt{2}$; (III) $2\varphi_0 = \lambda\pi$, $2H = (-1)^\lambda \sin 2\theta$.

(¹) Les calculs étant assez fastidieux, je ne réponds pas de leur complète exactitude, malgré les vérifications et recoupements auxquels je les ai soumis.

AF. (III) $2v_0=(2\lambda+1)\pi,\quad 2\Pi=\sin 2\theta;\qquad$ (III) $\alpha=-\sqrt{2},\quad \Pi=S.$

AG. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=-2\varepsilon^2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,v_0;\qquad$ (II) $2v_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=z\varepsilon^2,$

avec $z^3\sin w_0-2z\sqrt{2}\cos w_0+\frac{5}{2}\sin w_0\sin^2\theta_0-4(-1)^\lambda\sqrt{2}\cos\theta_0=0.$

AH. (II) $2w_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=-\varepsilon^2\,\mathrm{tg}\,v_0\left[4(-1)^\lambda\frac{\sin\theta_0}{\cos v_0}+3\sqrt{2}\right];$

(III) $2v_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \Pi=\pm 4\sqrt{(-1)^\lambda\frac{\sin\theta}{\cos w_0}}.$

BB. $\theta=\lambda\pi$ (solution exacte).

BC. (I) $2\theta_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon T''.$

BD. (IV) $2\beta=\sqrt{2}.$

BE. $2\theta=(2\lambda+1)\pi$ (solution exacte).

BF. (I) $\theta_0=\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon\theta_0\sqrt{3}.$

BG. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=16P'\varepsilon^4\sqrt{2};\qquad$ (II) $2v_0=\lambda\pi,\quad \varphi=-\frac{5}{4}(-1)^\lambda\varepsilon^3\sin 2\theta_0.$

BH. (II) $2w_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=2P\varepsilon^2\sqrt{2};$

(II) $2v_0=\lambda\pi,\quad \varphi=(-1)^\lambda\varepsilon^2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,w_0(\sin^2 v_0-\cos^2\theta_0).$

CC. (I) $\theta_0=\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon T'.$

CD. (IV) $2\alpha=-\sqrt{2}.$

CE. (I) $\theta_0=\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon\theta_0.$

CF. (I) $2\theta_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon T.$

CG. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=-2\varepsilon^2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,v_0;$

(II) $v_0=\lambda\pi,\quad \varphi=\frac{5}{4}\varepsilon^3\sin 2\theta_0\qquad$ ou $\qquad 2v_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=2\varepsilon^2\sqrt{2}\,\mathrm{cot}\,w_0.$

CH. (II) $2w_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=R\varepsilon^2;$

(II) $v_0=\lambda\pi,\quad \varphi=-\varepsilon^2\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,w_0\sin^2\theta_0\qquad$ ou $\qquad 2v_0=(2\lambda+1)\pi,$
$\varphi=\varepsilon^2\left[\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,w_0(\sin^2\theta_0-3)-8(-1)^\lambda\cos\theta_0\sec w_0\right].$

DD. (I) $\theta_0=2\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon\theta_0\sqrt{2}.$

DE. (I) $\theta_0=\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon\theta_0\sqrt{2}.$

DF. (I) $\theta_0=2\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\sqrt{\varepsilon}(24\theta_0^2-14)\frac{1}{4}.$

DG. (II) $2v_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=-\varepsilon^3\sin\theta_0\left[2{,}5\cos\theta_0+6\sqrt{2}(-1)^\lambda\,\mathrm{cosec}\,w_0\right];$

(II) $\beta=\sqrt{2},\quad \varphi=-8\varepsilon^2 Q'\cos\theta_0\sin w_0\sec v_0.$

DH. (II) $2v_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=\varepsilon^2\left[\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,w_0\sin^2\theta_0-3(-1)^\lambda\cos\theta_0\sec w_0\right];$

(III) $2\alpha=-\sqrt{2},\quad \Pi=4Q'\sin\theta\cos v_0\sec w_0.$

EE. $\theta=\lambda\pi$ (solution exacte).

EF. (IV) $\beta=-\sqrt{2}.$

EG. (II) $2w_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=16P\varepsilon^4\sqrt{2};$

(II) $2v_0=\lambda\pi,\quad \varphi=\frac{5}{4}(-1)^\lambda\varepsilon^3\sin 2\theta_0.$

EH. (II) $w_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = 2P'\varepsilon^2\sqrt{2}.$

(II) $2v_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = (-1)^\lambda \varepsilon^2\sqrt{2}P' \sin 2v_0 \cot w_0.$

FF. (I) $\theta_0 = 2\lambda\pi, \quad \varphi = \pm \varepsilon\theta_0\sqrt{3}.$

FG. (II) $2v_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad \varphi = -8\varepsilon^2(-1)^\lambda \cos\theta_0 \sec w_0;$

(II) $\alpha = \sqrt{2}, \quad \varphi = 16\varepsilon^2 P' \cos\theta_0 \sin v_0 \sec w_0.$

FH. (II) $v_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = \varepsilon^2\sqrt{2}[\cot w_0(1+\cos^2\theta_0) - 2(-1)^\lambda \cos\theta_0 \operatorname{cosec} w_0].$

(III) $2\alpha = -\sqrt{2}, \quad H = 4Q' \sin\theta \cos v_0 \sec w_0.$

GG. (II) $w_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = 16K\varepsilon^4\sqrt{2}; \qquad$ (II) $v_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = \pm 2{,}5\,\varepsilon^3 \sin\theta_0.$

GH. (II) $2w_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad \varphi = \varepsilon^2\sqrt{2}\cot w_0;$

(II) $v_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = z\varepsilon^2 \qquad$ avec $z^2 + z\sqrt{2}\operatorname{tg} w_0 - 46 = 0.$

HH. (II) $w_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = 2K\varepsilon^2\sqrt{2}; \qquad$ (II) $v_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = z\varepsilon^2$

avec $z^2 - 2z\varepsilon^2\sqrt{2}[\cot w_0 - (-1)^\lambda \cos\theta_0 \operatorname{cosec} w_0] - 2\sin^2\theta_0 = 0.$

Vibrations latérales.

AA. (II) $w_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = 2h''K\varepsilon^2; \qquad$ (III) $v_0 = \lambda\pi, \quad H = \pm k'' \sin\theta.$

AB. (II) $w_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = 2h''P'\varepsilon^2; \qquad$ (III) $2v_0 = \lambda\pi, \quad 2H = -(-1)^\lambda k'' \sin 2\theta.$

AC. (II) $2w_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad \varphi = h''\varepsilon^2 \cot v_0; \qquad$ (III) $v_0 = \lambda\pi, \quad H = \pm k'' \sin\theta.$

AD. (III) $v_0 = \lambda\pi, \quad 2H = k'' \sin 2\theta; \qquad$ (III) $\alpha = -\dfrac{h'}{2h}, \quad H = S'.$

AE. (II) $2w_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad \varphi = \dfrac{4kh'}{k+1}P\varepsilon^2;$

(III) $2v_0 = \lambda\pi, \quad 2H = (-1)^\lambda k'' \sin 2\theta.$

AF. (II) $2w_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad \varphi = R\varepsilon^2; \qquad$ (III) $2v_0 = \lambda\pi, \quad 2H = -(-1)^\lambda k'' \sin 2\theta.$

AG. (III) $2v_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad 2H = k'' \sin 2\theta; \qquad$ (III) $\alpha = -\dfrac{h'}{2h}, \quad H = S'.$

AH. (II) $2w_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad \varphi = -h'\varepsilon^2\left[\dfrac{2k+1}{h}\operatorname{tg} v_0 + (-1)^\lambda h' \cos\theta_0 \sec v_0\right].$

(III) $2v_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad H = \pm h\sqrt{-k''}\cos\theta.$

BB. $\theta = \lambda\pi$ (solution exacte).

BC. (II) $2w_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad \varphi = 8hh'(k+1)P\varepsilon^4;$

(III) $2v_0 = \lambda\pi, \quad 2H = (-1)^\lambda \sin 2\theta.$

BD. (IV) $\beta = -\dfrac{2h}{h'}.$

BE. $2\theta = (2\lambda+1)\pi$ (solution exacte).

BF. (I) $\theta_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = \pm \varepsilon h\theta_0.$

BG. (I) $\theta_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = \pm \varepsilon\theta_0\sqrt{k'}.$

BH. (II) $2w_0 = (2\lambda+1)\pi, \quad \varphi = 4hh'P\varepsilon^2; \qquad$ (III) $2v_0 = \lambda\pi, \quad 2H = (-1)^\lambda \sin 2\theta.$

CC. (II) $w_0 = \lambda\pi, \quad \varphi = 8hh'(k+1)K\varepsilon^2; \qquad$ (III) $v_0 = \lambda\pi, \quad H = \pm k'' \sin\theta.$

CD. (III) $v_0 = \lambda\pi, \quad 2H = k'' \sin 2\theta; \qquad$ (III) $\beta = \dfrac{2h}{h'}, \quad 2H = (1-k)Q' \sin 2\theta.$

CE. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=8hh'(k+1)P'\varepsilon^4;$
(III) $2\nu_0=\lambda\pi,\quad 2H=(-1)^\lambda k''\sin 2\theta.$

CF. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=-2hh'\varepsilon^2\operatorname{tg}\nu_0;$
(III) $2\nu_0=\lambda\pi,\quad 2H=-(-1)^\lambda k''\sin 2\theta.$

CG. (III) $2\nu_0=(2\lambda+1)\pi,\quad 2H=k''\sin 2\theta;$
(III) $\beta=\frac{2h}{h'},\quad 2H=(1-k)Q'\sin 2\theta.$

CH. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=-2hh'\varepsilon^2\operatorname{tg}\nu_0;$
(III) $2\nu_0=(2\lambda+1)\pi,\quad H=\pm\sqrt{k''}\sin\theta.$

DD. (I) $\theta_0=2\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon h\theta_0\sqrt{3}.$

DE. (I) $\theta_0=\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon\theta_0\sqrt{k'}.$

DF. (I) $2\theta_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon hT.$

DG. (I) $\theta_0=2\lambda\pi,\quad \varphi^4h^2=\varepsilon^2[k^2(5\theta_0^2-6)+8k(\theta_0^2-1)+3\theta_0^2].$

DH. (III) $2\nu_0=(2\lambda+1)\pi,\quad 2H=\sin 2\theta;$ (III) $\alpha=-\frac{2h}{h'},\quad H=(k+1)S.$

EE. $\theta=\lambda\pi$ (solution exacte).

EF. (I) $2\theta_0=(2\lambda+1)\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon hT'.$

EG. (IV) $\beta=\frac{h'}{2h}.$

EH. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=4hh'P'\varepsilon^2;$ (III) $2\nu_0=\lambda\pi,\quad 2H=-(-1)^\lambda\sin 2\theta.$

FF. (I) $\theta_0=\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon hT'.$

FG. (IV) $\alpha=\frac{h'}{2h}.$

FH. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=2hh'R'\varepsilon^2;$ (III) $2\nu_0=\lambda\pi,\quad 2H=(-1)^\lambda\sin 2\theta.$

GG. (I) $\theta_0=2\lambda\pi,\quad \varphi=\pm\varepsilon\theta_0\sqrt{k'}.$

GH. (III) $\nu_0=\lambda\pi,\quad 2H=\sin 2\theta;$ (III) $\alpha=-\frac{2h}{h'},\quad H=-h^2P'\sin 2\theta.$

HH. (II) $w_0=\lambda\pi,\quad \varphi=4hh'K\varepsilon^4;$ (III) $\nu_0=\lambda\pi,\quad H=\pm\sin\theta.$

55. *Cas où le rayon du cercle devient infini.* — Supposons que, la longueur s du fil demeurant constante, son rayon R croisse indéfiniment. Si l'on pose $\frac{1}{R}=\varepsilon$, on peut calculer les développements de m, m', m'' suivant les puissances de ε. Les premiers termes de ces développements sont $i\eta_1$, η et $h\varepsilon$, en posant $\eta_1^4=\gamma\varepsilon^4=\frac{\rho\omega^2}{EB}$ ou $\frac{\rho\omega^2}{EA}$. On peut ensuite chercher *l'équation de résonance limite*.

A priori, on doit évidemment s'attendre à retrouver les équations de résonance de la tige cylindrique relatives aux différentes liaisons (Chap. IV). La question n'est toutefois pas aussi simple. On retrouve bien, dans leur ensemble, toutes les équations prévues; mais, on en obtient d'autres, que nous appelons provisoirement les équations (E). L'explication de cette anomalie est la suivante.

Dans le cas des vibrations planes, on constate que *la tension* Z *du fil devient infinie*, toutes les fois que ω vérifie une équation (E). Dans le cas des

vibrations latérales, ce sont *l'effort tranchant* Y, *le moment fléchissant* L *et le couple de torsion* N *qui deviennent infinis*. On en conclut que *les solutions des équations* (E) *sont physiquement inacceptables*.

J'ai calculé l'équation limite dans tous les cas et séparé chaque fois la solution véritable de la solution étrangère. Mais, il me paraît inutile de reproduire ces calculs, dont l'intérêt est purement théorique (¹). Je me bornerai à indiquer l'équation limite, à titre d'exemple, dans le cas AA.

Pour les vibrations planes, on trouve, en posant $\gamma_1 s = x$,

$$\left(\operatorname{th}\frac{x}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\left[4\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2} - x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{th}\frac{x}{2}\right)\right] = 0.$$

Pour les vibrations latérales on obtient

$$1 - \cos x \operatorname{ch} x = 0, \qquad \text{soit } \operatorname{th}^2\frac{x}{2} - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = 0.$$

Dans le premier cas, les solutions véritables sont fournies par le premier facteur; le deuxième facteur donne les solutions étrangères. Dans le deuxième cas, il n'y a pas de solutions étrangères.

Je signalerai enfin que, *si* ω *est une solution véritable*, w et ν tendent toujours vers zéro; autrement dit, *la dilatation longitudinale et la torsion disparaissent*.

56. *Étude complète du double encastrement pour les vibrations planes*. — J'ai résolu numériquement l'équation de résonance, en limitant supérieurement θ par 24π (douze spires). Les calculs sont de difficulté différente, suivant la nature des racines de l'équation (63).

1° *Les trois racines sont négatives*. Autrement dit, y est compris entre zéro et

$$\frac{71 - 17\sqrt{17}}{8} = 0,1134005.$$

Au lieu de se donner la valeur de y, il est plus commode de se donner la valeur de l'une des racines ou, ce qui revient au même, de $n = \sqrt{-x}$. Convenons par exemple que n correspondra à la plus petite racine. La résolution d'une équation du second degré permet le calcul de n' et n''. De plus, n doit varier entre *un* et

$$n_1 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2} = 1,199353.$$

J'ai calculé θ en donnant à n des valeurs échelonnées de centième en centième, depuis 1,03 jusqu'à 1,19. Pour chaque valeur de n, il y a une infinité de racines en θ; mais, leur nombre est limité si l'on s'impose la condition $\theta < 24\pi$. Dans ce cas, elles n'existent que pour $n \geq 1,03$.

(¹) Sauf pour servir de guide aux calculs numériques, si l'on voulait résoudre complètement l'équation de résonance.

Voici maintenant la méthode employée pour leur calcul. Pour diminuer les tâtonnements, je me suis guidé par la formule asymptotique (n° 54) $w = \lambda\pi$, avec $w = n''\theta$. On pourrait aussi se guider sur la formule $v = \lambda\pi$. J'avais d'abord songé à mener de front les deux formules, ce qui devait me donner deux séries de racines. Mais, je me suis vite aperçu que les deux séries empiétaient l'une sur l'autre pour $n \leq 1{,}13$. Dès lors, j'ai abandonné la seconde.

Posons (n^{os} 50, 48, 51)

$$w = \lambda\pi + \varphi, \qquad u = \frac{n+n'}{2n''}w, \qquad v = \frac{n-n'}{2n''}w;$$

$$a = \frac{C}{C'}, \qquad b = -\frac{A'}{C'}, \qquad c = -\frac{A}{C'}.$$

L'équation (95) s'écrit

$$G(\varphi) = \sin\varphi(a\sin^2 u - \sin^2 v) + b\sin v[\cos v\cos\varphi - (-1)^\lambda \cos u] + c\sin u[\cos u\cos\varphi - (-1)^\lambda \cos v] = 0.$$

Pour chaque valeur de λ, on calcule φ par substitutions successives et interpolation finale. On obtient chaque fois une ou trois racines comprises entre $-90°$ et $121°$. On en déduit une ou trois valeurs de θ.

Pour séparer la plus petite racine, il faut connaître le signe de $D(\omega)$ pour θ infiniment petit. J'ai donc dû calculer la partie principale de D. Sous la forme (75), le calcul est pénible; j'y ai renoncé. Mais, il est assez simple si l'on garde à D sa forme primitive de déterminant. En faisant des combinaisons de colonnes, on trouve

$$D(\omega) = \frac{nn'n''(n'^2-n''^2)^2(n''^2-n^2)^2(n^2-n'^2)^2}{15.(24)^2}\theta^9.$$

On voit que $D(\omega)$ est extrêmement petit avec θ et cela constituerait une grosse difficulté si l'on voulait calculer directement les petites racines, lesquelles n'existent fort heureusement que pour les hautes fréquences.

Pour $n = n_4$, on a

$$n' = n'' = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-3}{2}} = 0{,}529883.$$

L'équation de résonance est, en posant $u = n\theta$, $v = n'\theta$,

$$(106)\quad n'^2(n^2-n'^2)^2u^2\sin u + 4n^2n'^2(n^2-n'^2)u(\cos u - \cos v) + n^2\sin v[4nn'(n^2+n'^2)(1-\cos u\cos v) - (n^4+n'^4+6n^2n'^2)\sin u\sin v] = 0.$$

Pour les grandes valeurs de θ, on peut poser $u = \lambda\pi + \varphi$ et l'on a asymptotiquement

$$\varphi = \frac{\cos u\cos v - 1}{u^2}(4{,}975\,u + 16{,}68\cos u\sin v).$$

La comparaison avec le calcul direct montre que cette formule donne une erreur relative $< \frac{1}{1000}$ à partir de $\lambda = 4$. Il n'y a d'ailleurs qu'une seule racine inférieure à celle qui correspond à $\lambda = 4$; elle vaut $437°$.

57. 2° *Il y a deux racines imaginaires.* Autrement dit, y est compris entre $\frac{71-17\sqrt{17}}{8}=0{,}1134$ et $\frac{71+17\sqrt{17}}{8}=17{,}6366$. Cette fois, n' et n'' sont de la forme $i\alpha-\beta$ et $i\alpha+\beta$, α et β étant des nombres réels et positifs faciles à à calculer. L'équation de résonance prend la forme suivante :

$$(107)\qquad a_0\operatorname{ch}2\alpha\theta\sin n\theta+a_1\operatorname{sh}2\alpha\theta\cos n\theta+a_2\operatorname{sh}\alpha\theta\cos\beta\theta+a_3\operatorname{ch}\alpha\theta\sin\beta\theta \\ +a_4\sin n\theta\cos 2\beta\theta+a_5\cos n\theta\sin 2\beta\theta+a_6\sin n\theta=0,$$

les a_i se calculant aisément pour chaque valeur de n.

Cette équation, en apparence plus compliquée que celle du cas précédent, est en réalité beaucoup plus facile à résoudre, grâce à la présence des exponentielles. Lorsque θ est grand, on a la formule asymptotique évidente

$$(108)\qquad \operatorname{tg}n\theta=-\frac{a_1}{a_0}.$$

La comparaison avec le calcul direct m'a montré que cette formule est suffisamment approchée à partir de la deuxième racine. Quant à la première racine, je l'ai calculée par une méthode d'approximations successives, partant de (108) comme première approximation; l'expérience m'a d'ailleurs montré que la deuxième approximation est pratiquement suffisante.

J'ai donné à n les valeurs 1,22; 1,24; 1,26; 1,28; 1,3; 1,4; ...; 2,3. Quand n atteint la valeur-limite $n_2=\sqrt{\frac{7+\sqrt{17}}{2}}=2{,}3593$, on obtient une équation se déduisant de (106) par le changement de n' en im'; elle se résout comme (107).

58. 3° *Il y a deux racines positives.* Autrement dit $y>17{,}6366$ ou $n>2{,}3583$. L'équation de résonance prend la forme

$$a_0\sin n\theta\,(\operatorname{ch}m'\theta\operatorname{ch}m''\theta-1)+a_1\operatorname{sh}m'\theta(\operatorname{ch}m''\theta\cos n\theta-1) \\ +a_2\operatorname{sh}m''\theta(\operatorname{ch}m'\theta\cos n\theta-1)+a_3\sin n\theta\operatorname{sh}m'\theta\operatorname{sh}m''\theta=0.$$

Elle se résout comme (107) et admet, pour θ grand, la formule asymptotique évidente

$$(109)\qquad \operatorname{tg}n\theta=-\frac{a_1+a_2}{a_0+a_3}.$$

Cette formule ne convient pas pour n très grand et θ très petit. En effet, on a asymptotiquement $m'=1$, $m''=n$, $a_0=a_2=2n^5$, $a_1=-n^6$, $a_3=\frac{11}{2}n^4$. Si l'on pose $n\theta=x$, on voit immédiatement que l'équation devient à la limite

$$2\sin x(\operatorname{ch}x-1)+2\operatorname{sh}x(\cos x-1)+x(1-\operatorname{ch}x\cos x)=0,$$

qui se décompose en

$$(110)\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\operatorname{th}\frac{x}{2},\qquad 4\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-x\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)=0.$$

On a vu, au n° 55, que la première de ces deux équations est seule physiquement acceptable.

Si θ n'est pas très petit, on a asymptotiquement

$$\operatorname{tg} n\theta = \frac{n(n-2)}{2n-5,5}; \tag{111}$$

d'où, approximativement

$$n\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda\pi. \tag{112}$$

Or, les grandes racines des deux équations (110) ont les valeurs limites respectives $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$. Il s'ensuit que, dans la formule (112), on ne doit accepter que les *valeurs paires de* λ.

Les premières racines des équations (110) sont approximativement en degrés : 450, 810, 1170, ... et 604, 975, 1341, etc.

Si l'on range les valeurs de $n\theta$ par ordre de grandeur croissante, on doit *seulement garder les valeurs de rang impair;* ceci pour n très grand. Mais, pour les valeurs finies de n, on peut évidemment garder toutes les racines.

59. Les résultats numériques obtenus par tous ces calculs ont été rassemblés graphiquement de la manière suivante.

Pour $n \leq 1,3$, on a porté en abscisse la quantité

$$z = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi} \cdot 10^4 = \frac{n(n^2-1)}{2\pi\sqrt{n^2+1}} \cdot 10^4; \tag{113}$$

de sorte que la *fréquence* f est, d'après (64), donnée par la formule

$$f = \frac{z \cdot 10^{-4}}{R^2} \sqrt{\frac{EB}{\rho}}. \tag{114}$$

En ordonnée, on a porté 0, en graduant l'échelle en nombres de spires. On a ainsi obtenu le graphique ci-après (*fig.* 2) (¹).

(¹) J'ai aussi construit un autre réseau de courbes obtenu en portant $x = (n-1)\theta$ en ordonnée. L'avantage de cette méthode est que x reste toujours fini. Quand n tend vers ∞, x tend vers $\lambda\pi$ ou $\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}$. Les courbes correspondant à la seconde série arrivent au point limite avec une tangente parallèle à l'axe des z. Les autres n'ont pas de tangente en ce point, le rayon vecteur oscillant entre deux positions symétriques par rapport à la parallèle à Oz. Ces dernières courbes aboutissent deux par deux au même point, de sorte que, pour z petit, elles sont très voisines, comme on le voit d'ailleurs sur le graphique reproduit en annexe.

L'inconvénient de cette méthode est que, pour trouver facilement les valeurs de z correspondant à une valeur donnée de θ, il faut construire les courbes $\theta = \text{const}$; ce qui embrouille le graphique. C'est pourquoi j'ai renoncé à reproduire celui-ci.

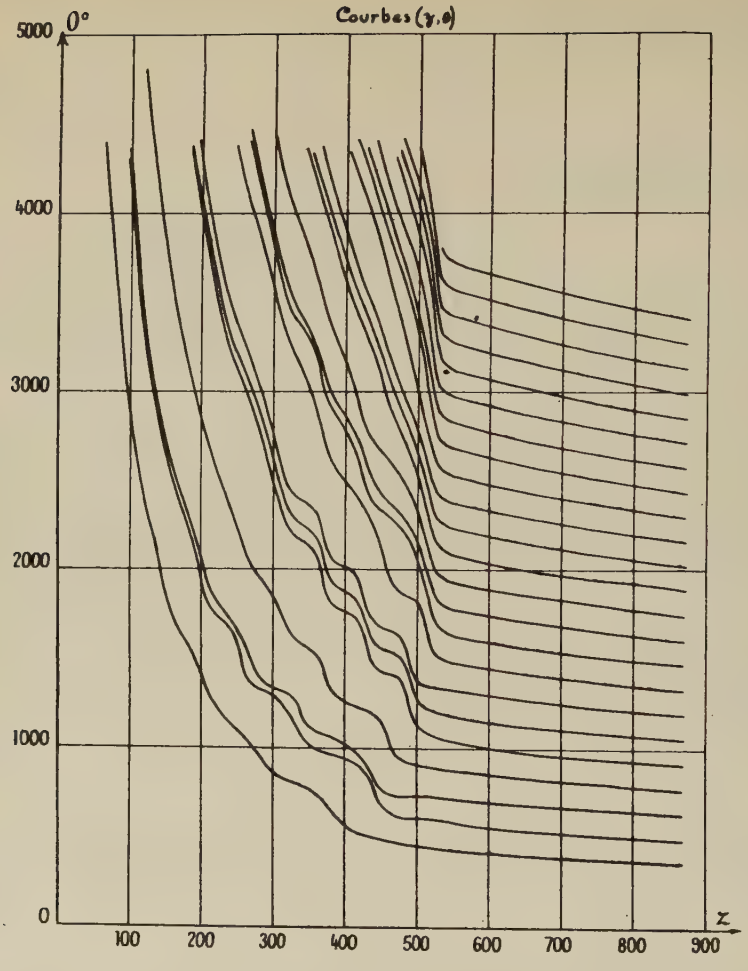

Fig. 2.

Pour $1{,}3 \leq n \leq 4$, on a, pour la première racine, les valeurs suivantes de $u = n\theta$:

n.....	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,6	2,8
u.....	474	456	446	440	437	435	433	433	432	432	432	432	432	433
z_n.....	467	448	438	432	428	426	424	423	423	422	422	422	421	423
n.....	3	3,5	4											
u.....	434	436	439											
z_n.....	424	426	428											

Pour la $k^{\text{ième}}$ racine, on a approximativement $u = 180\,k + z_n$, avec les valeurs ci-dessus de α_n.

Pour $n > 4$, u varie entre 439 et 450, dans le cas de la première racine.

Pour la $k^{\text{ième}}$ racine, α_n varie entre 428 et 450.

Connaissant 0, on cherche deux valeurs voisines de n telles que les valeurs correspondantes de $\frac{u}{n}$ encadrent 0; puis on interpole.

Le tableau ci-dessous donne les premières valeurs de z correspondant à un nombre entier de N spires ($N \leq 12$):

N = 1..... 915, 2146, 5350, 9190, 13 900, 19 500.
N = 2..... 364, 443, 545, 959, 2106, 3336, 4900, 6550, 8425, 10 580, 12 920, 15 540, 18 300, 22 930.
N = 3..... 252, 336, 365, 454, 513, 768, 1297, 1957, 3220, 3620, 4640, 5780, 6920, 8200, 9650, 11 080, 12 630, 14 200, 16 080, 19 470 19 900, 21 880.
N = 4..... 197, 257, 273, 368, 443, 483, 491, 608, 951, 1373, 1870, 2456, 3095, 3790, 4530, 5350, 6235, 7140, 8070, 9140, 10 170, 11 320, 12 480.
N = 5..... 152, 208, 222, 304, 380, 417, 427, 503, 515, 532, 755, 1018, 1423, 1838, 2330, 2585, 3010, 3460, 3940, 4450.
N = 6..... 132, 185, 190, 253, 336, 360, 368, 445, 485, 497, 510, 524, 635, 865, 1152, 1473, 1806, 2186, 2575, 3080, 3460, 3940, 4450.
N = 7..... 112, 156, 162, 222, 297, 304, 313, 392, 422, 434, 476, 500, 508, 517, 553, 733, 1097, 1242, 1490, 1798, 2152, 2440, 2804.
N = 8..... 98, 136, 140, 196, 271, 279, 291, 358, 382, 394, 419, 462, 476, 489, 505, 518, 528, 641, 826, 1043, 1257, 1505, 1765.
N = 9..... 89, 122, 125, 175, 237, 244, 261, 323, 353, 358, 391, 433, 444, 455, 483, 504, 509, 517, 526, 573, 725, 1108.
N = 10.... 80, 110, 113, 157, 216, 220, 230, 297, 309, 317, 360, 399, 410, 423, 460, 480, 487, 503, 513, 518, 524, 534, 650.
N = 11.... 77, 103, 105, 143, 198, 202, 212, 272, 289, 293, 331, 372, 380, 393, 435, 450, 458, 473, 492, 503, 510, 517.
N = 12.... 65, 93, 95, 131, 185, 188, 199, 250, 268, 274, 305, 345, 354, 368, 405, 421, 430, 445, 465, 474, 484, 501.

Pour les fréquences supérieures, on peut prendre approximativement $n = \frac{2k+1}{4N}$, avec $k \geq 8$, pour N = 1; $k \geq 16$, pour N = 2; $k \geq 24$, pour N = 3; $k \geq 25$, pour $N \geq 4$. On a ensuite z par (113).

60. *Comparaison des formules asymptotiques avec le calcul direct.* — D'après le n° 54, on a les deux formules asymptotiques suivantes :

$$0 = \frac{\lambda\pi}{\varepsilon\sqrt{2}} + \varepsilon\left(4K - \frac{3\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right), \quad K = \frac{\cos c_0 - (-1)^\lambda \cos 0_0}{\sin c_0}, \quad 0_0 = \frac{\lambda\pi}{\varepsilon\sqrt{2}}, \quad c_0 = \frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}, \tag{115}$$

$$\varepsilon = \frac{\lambda\pi}{0 \pm \sin 0}, \tag{116}$$

avec

$$z = \frac{\varepsilon \cdot 10^5}{\pi\sqrt{2}}. \tag{117}$$

Afin de me rendre compte de leur valeur pratique, j'ai comparé les résultats déduits de ces formules avec ceux du calcul direct, pour les valeurs de n utilisées dans ce dernier. La formule (115) donne directement θ_a. D'où l'erreur absolue et l'erreur relative commises sur θ. Celles-ci sont inscrites dans les deux dernières lignes du tableau ci-dessous, l'erreur relative étant évaluée en millièmes.

n.....	1,03	1,04	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,08	1,09
λ.....	1	1	1	1	2	1	2	1	2	3	1
θ_a.....	4099	3032	2407	1960	3911	1664	3346	1453	2835	4334	1237
θ.....	4096	3030	2385	1952	3974	1638	3348	1450	2910	4405	1222
	3	2	22	8	—63	26	— 2	3	—75	—71	15
	1	1	9	4	16	16	— 1	2	—26	—26	12
n.....	1,09	1,09	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11	1,11	1,11	1,12	1,12
λ.....	2	3	1	2	3	1	2	3	4	1	2
θ_a.....	2476	3811	1115	2236	3390	1013	1932	3004	3985	868	1751
θ.....	2550	3788	1103	2251	3395	986	1972	3041	3933	850	1828
	—74	23	12	—15	— 5	27	—40	—37	52	18	—77
	—29	6	11	— 7	— 2	27	—20	—12	13	21	—42
n.....	1,12	1,12	1,12	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,14	1,14	1,14
λ.....	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
θ_a.....	2742	3584	4558	774	1539	2466	3245	4067	736	1482	2219
θ.....	2710	3552	4434	800	1601	2413	3202	4004	751	1514	2311
	32	32	124	—26	—62	53	43	63	—15	—32	—92
	12	9	28	—33	—39	22	13	16	—20	—21	—40
n.....	1,14	1,14	1,15	1,15	1,15	1,15	1,15				
λ.....	4	5	1	2	3	4	5				
θ_a.....	2965	3720	682	1223	2073	2708	3569				
θ.....	2874	3637	608	1291	2025	2563	3294				
	91	83	74	—68	48	145	275				
	32	23	120	—53	24	56	83				

Pour la formule (116), on part de θ déduit du calcul direct. On en déduit ε_a, en prenant le signe devant $\sin\theta$ de telle manière que l'on obtienne, pour chaque valeur de λ, le plus petit ε pour le plus petit θ et le plus grand ε pour le plus grand θ. On connaît d'autre part la valeur exacte de ε. D'où les erreurs absolues et relatives. Dans le tableau ci-dessous, on donne les valeurs de $10^4\varepsilon_a$ et $10^4\varepsilon$ dans les quatrième et cinquième lignes, puis la différence de ces deux nombres et enfin l'erreur relative en millièmes.

n.....,	1,04	1,04	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08	1,08	1,08
λ.....	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2
θ.....	4312	4363	3362	3420	2760	2824	2363	2451	2024	2114	4049
	417	416	529	527	640	650	755	751	873	870	877
	416	416	525	525	635	635	749	749	863	863	863
	1	0	4	2	5	15	6	2	10	7	14
	2	0	8	4	8	24	8	3	12	8	16

n.....	1,08	1,09	1,09	1,09	1,09	1,10	1,10	1,10	1,10	1,11	1,11
λ.....	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
0.....	4122	1728	1808	3515	3616	1607	1679	3136	3233	1338	1439
	878	1010	999	1010	1000	1112	1106	1130	1117	1291	1252
	863	980	980	980	980	1100	1100	1100	1100	1219	1219
	15	30	19	30	20	12	6	30	17	72	33
	17	31	19	31	20	11	5	27	15	58	27
n.....	1,11	1,11	1,11	1,11	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,12	1,13
λ.....	2	2	3	3	1	1	2	2	3	3	1
0.....	2787	2890	4246	4321	1285	1327	2462	2570	3776	3855	1134
	1267	1254	1258	1253	1377	1414	1435	1428	1430	1422	1527
	1219	1219	1219	1219	1342	1342	1342	1342	1342	1342	1466
	48	35	39	34	35	72	93	86	88	80	61
	39	29	32	28	26	54	69	64	66	60	42
n.....	1,13	1,13	1,13	1,13	1,13	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14
λ.....	1	2	2	3	3	1	1	2	2	3	3
0.....	1265	2181	2277	3409	3498	989	1089	2070	2171	3164	3223
	1430	1637	1620	1582	1568	1720	1668	1696	1667	1680	1687
	1466	1466	1466	1466	1466	1591	1591	1591	1591	1591	1591
	−36	171	154	116	102	129	77	105	76	89	96
	−24	118	106	80	70	81	49	66	48	56	60

On voit que *l'erreur relative* sur 0 ou ε, et par conséquent *sur la fréquence*, ne dépasse par 5 % tant que $n \leq 1{,}14$ pour la première formule ou $n \leq 1{,}10$ pour la seconde. L'approximation de la formule (116) est moins bonne que celle de la formule (115); cela tient à ce que φ est de l'ordre de ε^2 dans le premier cas, de l'ordre de ε dans le second cas. De toute manière, il semble *qu'on puisse appliquer pratiquement les deux formules* pour $n \leq 1{,}10$, soit *pour* $z \leq 247$. On peut amettre, mais sans garantie, qu'il en est de même pour toutes les liaisons, en vibrations planes et en vibrations latérales.

61. *Exemples concrets.* — Considérons un *spiral* de N spires, encastré à ses deux extrémités (liaison AA).

En *première approximation*, nous avons (n° 54) les deux solutions

$$2N\varepsilon\sqrt{2k} = \lambda, \qquad N\varepsilon\sqrt{2(k+1)} = \lambda \qquad (\lambda \text{ entier}).$$

Les formules (114) et (117) nous donnent d'autre part, dans le cas des vibrations latérales,

$$f = \frac{\varepsilon}{\pi R^2}\sqrt{\frac{EA}{2\rho}}.$$

On a donc

$$f = \frac{\lambda}{4N\pi R^2}\sqrt{\frac{EA}{\rho k}}, \qquad f' = 2f\sqrt{\frac{k}{k+1}}.$$

Pour les vibrations planes, il suffit de remplacer A par B et k par un.

Si l'on appelle d la densité du métal et K le rayon de giration de la section droite par rapport à Ox (vibrations latérales) ou à Oy (vibrations planes).

on a (n° 47), pour $\lambda = 1$

$$f = \frac{K.10^5}{4N\pi R^2}\sqrt{\frac{0,981E}{kd}} = 7880\frac{K}{NR^2}\sqrt{\frac{E}{kd}}, \tag{118}$$

les unités étant le kilog-poids et le millimètre.

Supposons le fil en *acier*, de densité 7,8; la formule devient

$$f = 2820\frac{K\sqrt{E}}{NR^2\sqrt{k}}. \tag{119}$$

Supposons maintenant que la section du fil soit *rectangulaire* et appelons h et e la hauteur et l'épaisseur. Pour les *vibrations planes*, on a $K^2 = \frac{e^2}{12}$. Si l'on prend $E = 25000$, on obtient

$$f = \frac{133\,200\,e}{NR^2}. \tag{120}$$

Pour les *vibrations latérales*, $K^2 = \frac{h^2}{12}$ et $k = \frac{EA}{GI} = \frac{E}{G}\cdot\frac{4(h^2+e^2)}{3me^2}$, m désignant une fonction de $\frac{h}{e}$, calculée par Barré de Saint-Venant et à variation lente (¹). La formule (119) devient

$$f = \frac{705\,eh\sqrt{Gm}}{NR^2\sqrt{h^2+e^2}}. \tag{121}$$

Prenons $G = 10000$; il vient

$$f = \frac{70\,500\,eh\sqrt{m}}{NR^2\sqrt{h^2+e^2}}. \tag{122}$$

Si le rapport $\frac{e}{h}$ est *très petit*, on a approximativement $m = \frac{16}{3}$; d'où

$$f = \frac{163\,000\,h}{NR^2}. \tag{123}$$

62. Nous allons appliquer ces formules à quatre spiraux expérimentés par M. Granier (²).

I. Spiral cylindrique: $N = 10$; $R = 4,1$; $h = 0,178$; $e = 0,098$.

La formule (120) donne $f = 78$. Puis, $f' = 110$.

Dans la formule (122), il faut faire $m = 4,56$; ce qui donne $f = 77$. Puis, $k = 3,5$ et $f' = 136$.

II. Spiral plat: $N = 18$; $R = \frac{6,4+1,9}{4} = 2,075$; $h = 0,187$; $e = 0,028$.

On trouve $f = 48$, $f' = 68$, pour les vibrations planes; $m = 4,92$; $f = 56$; $k = 34,6$; $f' = 110$, pour les vibrations latérales.

(¹) *Cf.* Bouasse, *Résistance des matériaux*, pp. 283 et 284.

(²) *Annales françaises de Chronométrie*, 1932, p. 237.

III. Spiral plat; $N = 18$; $R = \frac{8,6 + 2,4}{4} = 2,75$; $h = 0,254$; $e = 0,033$.

On trouve $f = 32$, $f' = 45$, pour les vibrations planes; $m = 4,98$; $f = 38$; $k = 44,7$; $f' = 69$, pour les vibrations latérales.

IV. Spiral plat; $N = 18$; $R = \frac{10,8 + 2,7}{4} = 3,375$; $h = 0,288$; $e = 0,051$.

On trouve $f = 33$, $f' = 47$, pour les vibrations planes; $m = 4,87$; $f = 38$; $k = 25$; $f' = 52$, pour les vibrations latérales.

63. En *seconde approximation*, dans le cas des vibrations latérales et de la plus petite fréquence, l'équation déterminant ε est (n° 54)

$$\varepsilon h' \theta (1 + r_1 \varepsilon^2) = \pi + \frac{2kh'}{h} K \varepsilon^2,$$

avec

$$r_1 = 2k + 1, \qquad h' = \sqrt{2k}, \qquad h = \frac{k+1}{2}, \qquad K = \frac{\cos c_0 + \cos \theta_0}{\sin c_0}, \qquad c_0 = \pi \frac{h}{h'}.$$

On en déduit la correction $\Delta\varepsilon$ par la formule

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{h'\theta}\left(\frac{2kh'}{h} K - r_1 \pi\right) = \frac{\pi}{\theta^2}\left(\frac{h'}{h} K - \frac{2k+1}{2k}\pi\right).$$

Si l'on admet que N n'est pas exactement un nombre entier, $\cos\theta_0$ peut varier entre -1 et $+1$; donc, les valeurs extrêmes de K sont $-\tan\frac{c_0}{2}$ et $\cot\frac{c_0}{2}$. En tenant compte des données numériques, on trouve les valeurs extrêmes suivantes pour $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta f}{f}$

$$-0,0046 \text{ à } -0,0017; \quad -0,00128 \text{ à } -0,00031;$$
$$-0,00128 \text{ à } -0,00030; \quad -0,00128 \text{ à } -0,00032.$$

La correction est très petite.

64. Les expériences de M. Granier n'ont porté que sur les vibrations latérales. Elles lui ont donné les résultats suivants, pour la plus basse fréquence

$$42,5 \quad 49 \quad 34 \quad 43.$$

Les différences avec les résultats ci-dessus sont : 34,5; 7; 4; — 5. Pour le spiral cylindrique, la différence ne peut être imputée à l'imprécision des mesures ou des calculs; l'expérience serait à reprendre, ou bien la théorie ne s'applique que très grossièrement.

Pour le spiral plat, on a les erreurs relatives : 0,13; 0,11; — 0,12. Or, en différentiant logarithmiquement (121), on a approximativement, en négligeant e^2 devant h^2,

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta e}{e} + \frac{1}{2}\frac{\Delta G}{G} - \frac{\Delta N}{N} - \frac{2\Delta R}{R}.$$

Je pense que l'erreur commise sur e peut bien atteindre 0,002. D'après les tables, G peut varier entre 9000 et 11000; admettons $\Delta G = 1000$. L'erreur ΔR peut vraisemblablement atteindre 0,02. Enfin, il est possible que le nombre des spires ne soit pas entier; admettons $\Delta N = \frac{1}{2}$.

En se plaçant dans les conditions les plus défavorables, on obtient les valeurs suivantes de $\frac{\Delta f}{f}$: 0,175; 0,151; 0,125. Elles sont bien de l'ordre de grandeur des erreurs constatées ci-dessus. On peut donc considérer *les vérifications expérimentales comme à peu près satisfaisantes dans le cas du spiral plat*, mais *tout à fait insuffisantes dans le cas du spiral cylindrique*.

65. Considérons maintenant le cas d'un *ressort de soupape*. Il est en *fil rond*; soit r le rayon de ce fil. On a

$$I = 2A, \qquad k = \frac{E}{2G} = 1,25; \qquad K = \frac{r}{2}.$$

Portant dans (119), il vient

$$f = \frac{1260\, r\sqrt{E}}{NR^2}. \tag{124}$$

Supposons par exemple $R = 12$, $r = 2$, $N = 10$, $E = 25000$; on trouve $f = 277$. La vitesse correspondante du moteur est de $276 \times 120 = 32000$ tours par minute. Elle est très supérieure aux vitesses réalisées dans la pratique. Mais, il convient d'observer que le mouvement de la soupape est loin d'être sinusoïdal. Si on le développe en série de Fourier, *on peut avoir la résonance sur un harmonique*. Par exemple, si le moteur tourne à 6400 tours, on a la résonance sur le cinquième harmonique. Si l'amplitude de cet harmonique n'est pas très petite, il pourrait y avoir rupture du ressort (1).

CHAPITRE VII.

EXEMPLES DE VIBRATIONS DE FILS PARFAITS.

66. *Fil pesant et courroie de transmission.* — Si le champ de forces extérieur se réduit à la pesanteur, la position d'équilibre est une *chaînette*, susceptible de dégénérer en une droite verticale. Ceci s'applique à un *fil au repos*, ou bien à une courroie de transmission reliant deux poulies et animée de la vitesse linéaire V_0. Dans le deuxième cas, les mouvements plans sont seuls possibles, si l'on a affaire à une véritable courroie plate. Mais, il arrive quelquefois que la courroie est remplacée par un fil; dans ce cas, les mouvements latéraux sont également possibles.

(1) On pourrait pousser plus loin cette étude et calculer la fatigue du ressort au cisaillement, pour un mouvement donné de la soupape. Il suffirait de calculer le couple de torsion N au moyen de la formule du n° 42.

Si l'on applique (33) en un point du fil situé sur une des poulies, la force X_0, qui est la réaction de la poulie sur le fil, est dirigée en sens inverse du rayon de courbure; donc a le signe contraire à q_0. Il s'ensuit que l'on a nécessairement

$$T \geq \rho V_0^2; \tag{125}$$

sinon, la courroie quitte la poulie.

67. *Le fil vertical.* — On a, dans ce cas

$$T = T_0 + \rho g s, \tag{126}$$

en orientant le fil vers le haut. Convenons de prendre pour origine des s l'extrémité inférieure du fil, ou le point de contact avec la poulie inférieure. Posons

$$T_0 - \rho V_0^2 = \rho g a. \tag{127}$$

D'après (125), on a $a \geq 0$.

Les équations (40) et (41) étant identiques, les mouvements latéraux ne diffèrent pas des mouvements plans. Bornons-nous donc à étudier ceux-ci. L'équation (40) devient

$$g(a+s)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + g\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2V_0\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t} = 0. \tag{128}$$

68. Considérons d'abord le cas du *fil suspendu par son extémité supérieure* O; de sorte que $V_0 = 0$. Posons

$$u = U\sin\omega t, \qquad a + s = \frac{g}{4\omega^2}x^2; \tag{129}$$

nous obtenons *l'équation de Bessel*

$$xU'' + U' + xU = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$U = AJ_0(x) + BN_0(x), \tag{130}$$

J_0 et N_0 désignant les fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre 0 (¹). Supposons *l'extrémité inférieure libre*, de sorte que $a = 0$. Comme U doit rester fini pour $x = 0$, on a nécessairement $B = 0$, donc

$$U = AJ_0(x). \tag{131}$$

La constante A est *l'amplitude du mouvement sinusoïdal imposé à l'extrémité inférieure du fil.*

Si l'on appelle l la longueur du fil, U doit s'annuler pour $x = 2\omega\sqrt{\frac{l}{g}}$. Dès lors, appelons x_n la $n^{\text{ième}}$ *racine positive de* $J_0(x)$; *la* $n^{\text{ième}}$ *pulsation de résonance* est donnée par la formule

$$\omega_n = \frac{1}{2}x_n\sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{132}$$

(¹) *Cf.* GOUDET, *Les fonctions de Bessel et leurs applications en Physique*, pp. 9 et 16.

La *forme du fil* pour une valeur donnée de t est donnée par (131). La tangente à l'extrémité inférieure est toujours verticale. Il y a n points immobiles ou *nœuds*, dont les abscisses curvilignes sont $\frac{g}{4\omega^2}x_p^2$, $p<n$.

L'intégrale générale de (128) peut s'écrire

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n t+b_n\sin\omega_n t)\mathrm{J}_0(x_n z),\qquad z=\sqrt{\frac{s}{l}}.$$

Si l'on se donne les *conditions initiales* $u=f(z)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=g(z)$, on a

$$f(z)=\Sigma a_n\mathrm{J}_0(x_n z),\qquad g(z)=\Sigma b_n\omega_n\mathrm{J}_0(x_n z);$$

d'où (1)

$$a_n\mathrm{J}_1^2(x_n)=2\int_0^1 f(z)\mathrm{J}_0(x_n z)z\,dz,\qquad b_n\omega_n\mathrm{J}_1^2(x_n)=2\int_0^1 g(z)\mathrm{J}_0(x_n z)z\,dz.$$

Par exemple, *si le fil est abandonné sans vitesse à partir d'une position rectiligne* définie par $u=k\frac{l-s}{l}$, on a

$$g(z)=0,\qquad f(z)=k(1-z^2).$$

On en déduit $b_n=0$ et (2)

$$a_n=\frac{8k}{x_n^3\mathrm{J}_1(x_n)}.$$

69. Supposons maintenant *l'extrémité inférieure fixe* sur la verticale Oz, le fil étant *tendu*, de sorte que $a>0$. L'équation de résonance s'écrit

$$\mathrm{J}_0(x_0)\mathrm{N}_0(x_1)-\mathrm{J}_0(x_1)\mathrm{N}_0(x_0)=0. \tag{135}$$

Si l'on remarque que le rapport $k=\frac{x_1}{x_0}=\sqrt{1+\frac{l}{a}}$ est connu, on sait que cette équation admet une infinité de racines en x_0 (3).

Supposons *que la tension* $\mathrm{T}_0=\rho ga$ *soit très grande vis-à-vis du poids* $p=\rho gl$ *du fil*. Le rapport $\varepsilon=\frac{l}{a}=\frac{p}{\mathrm{T}_0}$ est très petit et l'on a approximativement $k=1+\frac{\varepsilon}{2}$. On sait que, dans ce cas, les racines de (133) sont très grandes (4). On peut alors utiliser les formules asymptotiques (5)

$$\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,\mathrm{J}_p(x)=\mathrm{P}_p(x)\cos\varphi_p-\mathrm{Q}_p(x)\sin\varphi_p,\\ \sqrt{\frac{\pi x}{2}}\,\mathrm{N}_p(x)=\mathrm{P}_p(x)\sin\varphi_p+\mathrm{Q}_p(x)\cos\varphi_p,\end{cases} \tag{134}$$

(1) *Cf.* Goudet, p. 42; Jahnke, p. 166.
(2) Dans *Jahnke und Emde*, p. 122, on trouvera les valeurs de x_n et $\mathrm{J}_1(x_n)$, pour $n\leq 40$.
(3) On en trouvera quelques-unes dans Jahnke, p. 162 à 164.
(4) *Loc. cit.*, p. 163.
(5) *Loc. cit.*, p. 99; *voir* aussi Goudet, p. 38.

où l'on a posé $\varphi_p = x - \frac{2p+1}{4}\pi$ et où $P_p(x)$ et $Q_p(x)$ désignent des séries asymptotiques en $\frac{1}{x}$, respectivement paire et impaire et dont les premiers termes sont respectivement 1 et $\frac{4p^2-1}{8x}$. Ajoutons que les coefficients de ces séries sont pairs en p.

En faisant $p=0$ et portant dans (133), on obtient immédiatement

$$\operatorname{tg}(x_1 - x_0) = \frac{P_1 Q_0 - Q_1 P_0}{P_0 P_1 + Q_0 Q_1}, \tag{135}$$

où les indices 0 et 1 indiquent que l'on doit remplacer x par x_0 ou x_1 dans P et Q.

En *première approximation*, on a

$$x_1 - x_0 = n\pi. \tag{136}$$

En *deuxième approximation*, remplaçons P et Q par 1 et $-\frac{1}{8x}$; il vient

$$\operatorname{tg}(x_1 - x_0) = \frac{8(x_0 - x_1)}{64 x_0 x_1 - 1}.$$

Comme $x_0 x_1$ est très grand et k très voisin de 1, on peut remplacer le dénominateur par $64x_0^2$; puis x_0 par $\frac{n\pi}{k-1} = \frac{2n\pi}{\varepsilon}$, d'après (136). On obtient ainsi

$$x_1 - x_0 = n\pi\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{32 n^2 \pi^2}\right).$$

D'autre part, en se reportant à (129) et (127), on peut écrire

$$x_1 - x_0 = \frac{2\omega}{g}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\left(\sqrt{1+\varepsilon} - 1\right) = \frac{2\omega}{g}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon}+1} = \frac{2\omega l}{\sqrt{1+\varepsilon}+1}\sqrt{\frac{\rho}{T_0}}.$$

On en déduit

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \varepsilon^2\frac{2n^2\pi^2+1}{32 n^2 \pi^2}\right). \tag{137}$$

En négligeant ε, on retrouve la formule des *cordes vibrantes*.

70. *La courroie verticale.* — La présence du quatrième terme de l'équation (128) s'oppose à l'existence des mouvements stationnaires simples de la forme (129). Mais, on peut chercher des *mouvements stationnaires complexes* en posant $u = U e^{i\omega t}$. Gardant la variable x définie par (129) et posant $\frac{\omega V_0}{g} = m$, on obtient l'équation différentielle

$$U'' + \frac{1 - 2im}{x} U' + U = 0, \tag{138}$$

dont l'intégrale générale est (1)

$$U = x^{im}\left[A J_{im}(x) + B J_{-im}(x)\right].$$

(1) On pourrait aussi l'écrire sous la forme équivalente (133), les indices 0 étant remplacés par im.

A et B désignant cette fois deux constantes imaginaires *L'équation de résonance* est

$$J_{im}(x_0)J_{-im}(x_1) - J_{im}(x_1)J_{-im}(x_0) = 0. \tag{139}$$

Les deux termes de la différence ci-dessus étant imaginaires conjugués, le premier membre devient réel après suppression du facteur i. L'inconnue ω y figure dans x_0, x_1 et m. Cette équation est compliquée et je ne pense pas qu'il existe des tables donnant ses premières racines, comme pour (133).

Mais, dans la pratique, *la tension de la courroie est très grande vis-à-vis de son poids*, surtout pour le brin menant. On en conclut, comme au n° 69, que le rapport $k = \frac{x_1}{x_0}$ est très voisin de *un*. Donc, x_0 est infiniment grand (¹). On peut dès lors appliquer (134), en remplaçant p par im. Les fonctions $P_p(x)$ et $Q_p(x)$ prennent la même valeur pour $p = im$ et $p = -im$; appelons-les simplement P et Q. Posons d'autre part

$$\theta = x - \frac{\pi}{4}, \qquad \lambda = e^{m\pi}, \qquad X = (P + iQ)e^{i\theta}, \qquad Y = (P - iQ)e^{-i\theta}.$$

On a

$$\sqrt{2\lambda\pi x}\,J_{im}(x) = \lambda X + Y, \qquad \sqrt{2\lambda\pi x}\,J_{-im}(x) = X + \lambda Y.$$

Dès lors, l'équation (139) s'écrit

$$(\lambda X_0 + Y_0)(X_1 + \lambda Y_1) - (\lambda X_1 + Y_1)(X_0 + \lambda Y_0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad X_0 Y_1 - Y_0 X_1 = 0.$$

Ceci revient à égaler à $n\pi$ l'argument de $X_0 Y_1 = (P_0 + iQ_0)(P_1 - iQ_1)e^{i(\theta_0 - \theta_1)}$; ce qui donne immédiatement

$$\theta_1 - \theta_0 = x_1 - x_0 = n\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{Q_0}{P_0} - \operatorname{arc\,tg}\frac{Q_1}{P_1} = n\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{P_1 Q_0 - Q_1 P_0}{P_0 P_1 + Q_0 Q_1}.$$

On retombe sur la formule (135).

Si l'on remplace P par 1 et Q par $-\frac{4m^2+1}{8x}$, on trouve, en raisonnant comme au n° 69,

$$\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T_0}{\rho} - V_0^2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \varepsilon^2\frac{2n^2\pi^2 + 4m^2 + 1}{32n^2\pi^2}\right). \tag{140}$$

Dans la parenthèse, on remplace $m = \frac{\omega V_0}{g}$ par sa première approximation, soit $\frac{n\pi V_0}{\varepsilon\sqrt{ag}}$.

Pour $V_0 = 0$, on retrouve (137).

(¹) On peut le démontrer comme il suit. Prenons pour intégrales fondamentales de l'équation (138) les fonctions $y = J_{lm}(x)$ et $y\varphi$, avec $\varphi' = \frac{x^{2lm-1}}{y^2} = \frac{1}{xH(x)}$, H désignant une fonction entière. L'équation de résonance s'écrit $F(z) = 0$, avec $F(z) = \int_{x_0}^{x_0+z}\frac{dx}{xH(x)}$. La fonction sous le signe $\int$ étant méromorphe, il en est de même de $F(z)$. Ses zéros sont isolés; donc, z ne saurait être infiniment petit; ce qui aurait lieu si x_0 était fini.

Si V_0 n'est pas très petit devant $\sqrt{ag}$, m est très grand devant l'unité. La fréquence F_n est alors donnée par les formules

$$F_n = \frac{n}{2l}\sqrt{ag}\left(1 + \frac{\varepsilon}{4} - \frac{V_0^2}{8ag}\right), \qquad ag = \frac{T_0}{\rho} - V_0^2. \tag{141}$$

Remarque. — La fonction U peut s'écrire $Re^{i\varphi}$, R et φ désignant des fonctions réelles et déterminées de x, compte tenu des conditions aux limites. On a donc $u = Re^{i(\varphi+\omega t)}$. On en conclut que $R\cos(\varphi+\omega t)$ et $R\sin(\varphi+\omega t)$ sont deux *solutions réelles* de (128). La première par exemple définit un *mouvement sinusoïdal pour chaque point de la courroie*. La fréquence est la même pour tous les points; mais *la phase est variable*. Lorsque $V_0 = 0$, *les positions successives occupées par la courroie* se déduisent l'une de l'autre par une simple affinité. Si $V_0 \neq 0$, ces courbes *ont des formes totalement différentes*. Toutefois, *les nœuds sont fixes*, car il sont toujours donnés par $R = 0$.

71. Traitons un *exemple numérique*.

Supposons la courroie en cuir et soumise à la tension de sécurité de 40^{kg} par centimètre carré. Si S est la surface de la section, on a $T_0 = 40S$. Le poids d'un centimètre de courroie est approximativement $S \times 10^{-3}$ kg (1). Donc, $\frac{T_0}{\rho g} = 40000^{cm}$. D'où

$$ag = 4000 - V_0^2, \tag{142}$$

en prenant le mètre pour unité de longueur et prenant $g = 10$.

La formule (141) peut s'écrire, pour $n = 1$:

$$F_1 = \frac{X}{2l} + Y \quad \text{avec } X = \sqrt{ag}\left(1 - \frac{V_0^2}{8ag}\right), \qquad Y = \frac{5}{\sqrt{4000 - V_0^2}}.$$

Pour le *brin mené*, $T - \rho V_0^2$ est multiplié par le facteur bien connu $e^{-f\alpha}$. Prenons par exemple $f = 0{,}3$ et $\alpha = \pi$; le facteur vaut à peu près 0,39. Dès lors, ag doit être multiplié par 0,39 et Y divisé par $\sqrt{0{,}39}$.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs numériques de X et de X′ (brin mené), pour des vitesses V_0 échelonnées de 0 à 30^m par seconde. Quant à Y ou Y′, ils varient respectivement entre 0,079 et 0,09 ou entre 0,127 et 0,144; ils sont pratiquement négligeables.

V_0	0	2	4	6	8	10	12	14	16
X	63,3	63,2	63,1	62,9	62,6	62,3	61,8	61,3	60,6
X′	39,5	39,5	39,4	39,2	39	38,7	38,3	37,8	37,4
V_0	18	20	22	24	26	28	30		
X	60	59,2	58,3	57,3	56,2	55	53,7		
X′	36,8	36,1	35,4	34,6	33,7	32,6	31,5		

(1) Données empruntées à l'*Agenda Dunod* (*Construction mécanique*).

Pour les vitesses usuelles comprises entre 0 et 24, X varie seulement de 10 % environ et X′ de 13 %. *Ce n'est donc que pour les très grandes vitesses que l'influence de* V_0 *sur la fréquence des vibrations se fait sentir d'une manière appréciable.*

72. *La chaînette.* — Pour simplifier l'écriture, supposons que l'équation de la chaînette soit $y = \operatorname{ch} x$; il sera facile, par la suite, de rétablir l'homogénéité. On a

$$s = \operatorname{sh} x, \qquad R = \operatorname{ch}^2 x, \qquad T = \rho V_0^2 + \rho g \operatorname{ch} x, \qquad T' = \frac{dT}{ds} = \rho g \operatorname{th} x.$$

L'équation (37) devient

$$g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \operatorname{ch} x - 2 V_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial t} = 0. \tag{143}$$

L'élimination de θ et u entre (36), (38) et (39) donne, en posant $\frac{V_0^2}{g} = k^2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &+ 4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \operatorname{th} x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(5 + \frac{3k^2}{\operatorname{ch}^2 x} \right) \\ &+ \frac{\partial w}{\partial x} \operatorname{th} x \left(2 - \frac{3k^2}{\operatorname{ch}^2 x} \right) + w \frac{k^2}{\operatorname{ch}^2 x} \left(2 - \frac{3}{\operatorname{ch}^2 x} \right) \\ &+ \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \frac{1}{\operatorname{ch} x} - 4 V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial t} \operatorname{th}^2 x - \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \, \partial t^2} \operatorname{ch} x \right. \\ &\left. - 2 V_0 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3 \, \partial t} - 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \, \partial t^2} \operatorname{sh} x - 6 V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \, \partial t} \operatorname{th} x \right] = 0. \end{aligned} \tag{144}$$

73. Dans le cas de la *chaînette suspendue par ses deux extrémités*, on a $V_0 = 0$. Les *vibrations latérales stationnaires* sont données par $v = V \sin \omega t$, avec

$$V'' + m V \operatorname{ch} x = 0, \qquad m = \frac{\omega^2}{g}. \tag{145}$$

Il s'agit de trouver une solution de cette équation s'annulant pour les abscisses x_0 et x_1 des points d'attache. Si $F(x, m)$ et $G(x, m)$ désignent deux solutions fondamentales de l'équation, *l'équation de résonance* s'écrit

$$F(x_0, m) G(x_1, m) - F(x_1, m) G(x_0, m) = 0. \tag{146}$$

Les propriétés de cette équation résultent d'une étude plus générale due à Émile Picard (1). *Les racines sont toutes réelles, positives et en nombre infini.* Donc, il y a une *infinité de pulsations de résonance* $\omega_1, \omega_2, \ldots$.

On peut toujours supposer que $x_1 > x_0$ et $x_1 - x_0 < \pi$. On a alors (2)

$$\frac{n\pi\sqrt{g}}{(x_1 - x_0)\sqrt{\operatorname{ch} x_1}} < \omega_n < \frac{n\pi\sqrt{g}}{x_1 - x_0}.$$

(1) Émile Picard. *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*, chap. II; Gauthier-Villars.

(2) *Loc. cit.*, p. 22.

Si l'on pose

$$\frac{1}{\sqrt{m}} = \lambda \qquad \text{et} \qquad x = \lambda z,$$

l'équation (145) s'écrit

$$\frac{d^2V}{dz^2} + V \operatorname{ch}(\lambda z) = 0. \tag{147}$$

Son intégrale générale est holomorphe par rapport à λ au voisinage de $\lambda = 0$ et peut donc être développée suivant les puissances de λ. Le premier terme de ce développement est $A \cos z + B \sin z$. On en conclut que, *pour n très grand*, on a asymptotiquement

$$\omega_n = \frac{n\pi\sqrt{g}}{x_1 - x_0}. \tag{148}$$

La solution $V_n(x)$ correspondant à ω_n s'annule $n-1$ fois (¹) entre x_0 et x_1 : donc, *il y a n — 1 nœuds entre les extrémités du fil.*

74. Les *vibrations planes* stationnaires sont déterminées par l'équation différentielle

$$W''' + 4W'' \operatorname{th} x + W'(5 + m) + W'(2 \operatorname{th} x + 3m \operatorname{sh} x) - W \frac{m}{\operatorname{ch} x} = 0. \tag{149}$$

Les conditions aux limites sont $W = W' = 0$ pour $x = x_0$ et x_1. On pourrait facilement écrire l'équation de résonance, en introduisant quatre solutions fondamentales; mais, il resterait à démontrer l'existence des racines.

Dans le cas de la *courroie*, $V_0 \neq 0$, on peut chercher des solutions stationnaires, planes ou latérales, analogues à celles du n° 70; mais, elles paraissent difficiles à obtenir rigoureusement.

75. *Le fil télégraphique.* — C'est un fil *très tendu* et *quasi-horizontal*. Ceci revient à supposer, dans ce qui précède, que x_0 et x_1 sont très voisins de zéro. Dans ces conditions, l'équation (143) des *vibrations latérales* se réduit, *en première approximation*, à l'équation des *cordes vibrantes*.

Cherchons la *deuxième approximation* pour les vibrations stationnaires. Reprenons l'équation (147), en y supposant λ très petit et z fini. On a

$$V'' + V = -V\frac{\lambda^2}{2} z^2.$$

Cherchons la solution telle que $V = A$ et $V' = B$ pour $z = 0$. En première approximation, cette solution est $A \cos z + B \sin z$. Substituons-la à V au second membre; nous obtenons

$$V'' + V = -\frac{\lambda^2}{2} z^2 (A \cos z + B \sin z).$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 20.

L'intégration est élémentaire et conduit à

$$V = A\left[\cos z + \frac{\lambda^2}{4}\left(-\frac{z^2}{2}\cos z + \frac{3z - 2z^3}{6}\sin z\right)\right] + B\left[\sin z + \frac{\lambda^2}{4}\left(\frac{2z^3 - 3z}{6}\cos z + \frac{1 - z^2}{2}\sin z\right)\right].$$

En annulant V_0 et V_1, puis éliminant A et B, on obtient, au quatrième ordre près en λ :

$$z_1 - z_0 = n\pi\left[1 + \lambda^2\frac{3 - 2(z_0^2 + z_0 z_1 + z_1^2)}{24}\right].$$

D'où, en rétablissant l'homogénéité par l'introduction du rayon de courbure R au sommet de la chaînette

$$\omega_n = \frac{n\pi\sqrt{gR}}{x_1 - x_0}\left[1 + \frac{3(x_1 - x_0)^2 - 2n^2\pi^2(x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2)}{24n^2\pi^2 R^2}\right]. \tag{150}$$

Supposons *que les deux extrémités du fil soient sur une même horizontale* et appelons *a* la *flèche*. La formule (150) s'écrit

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2}\sqrt{\frac{g}{2a}}\left(1 - \frac{n^2\pi^2 - 6}{3n^2\pi^2}\frac{a^2}{x_0^2}\right). \tag{151}$$

76. Occupons-nous maintenant des *vibrations planes*. L'équation (149) s'écrit approximativement, en prenant toujours z pour variable indépendante

$$W''' + W' = 0.$$

L'intégration est immédiate, ainsi que la formation de *l'équation de résonance*, qui s'écrit, en posant $2\alpha = z_1 - z_0$

$$\sin\alpha(\operatorname{tg}\alpha - \alpha) = 0;$$

d'où

$$\omega_n = \frac{2n\pi\sqrt{gR}}{x_1 - x_0}, \qquad \omega'_n = \frac{2\alpha_n\sqrt{gR}}{x_1 - x_0}, \tag{152}$$

en appelant α_n l'une quelconque des racines positives de l'équation $\operatorname{tang}\alpha = \alpha$.

On retrouve les *harmoniques pairs des cordes vibrantes. Les harmoniques impairs, sauf le premier, sont remplacés par la seconde formule*, ce qui ne change pas beaucoup leur fréquence, car $2\alpha_n$ est voisin de $(2n+1)\pi$.

On pourrait passer à la deuxième approximation, par la même méthode qu'au n° 75. Mais, les calculs seraient pénibles et je ne les ai pas entrepris.

77. *La courroie horizontale.* — Cherchons une *vibration latérale stationnaire complexe* de la forme $v = Ve^{i\omega t}$. Gardant la variable z du n° 73, nous avons l'équation différentielle

$$V'' - 2ikV' + V = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$V = A\,e^{i(k+h)z} + B\,e^{i(k-h)z}$$

en posant

$$h=\sqrt{1+k^2}=\sqrt{\frac{T}{\rho g}}.$$

L'équation de résonance s'en déduit immédiatement. En supprimant le facteur $e^{ih(z_0+z_1)}$, on obtient

$$\sin h(z_1-z_0)=0;$$

d'où l'on déduit, en remplaçant g par $\frac{T}{\rho}-V_0^2$,

$$\omega_n=\frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}\left(1-\frac{\rho V_0^2}{T}\right)}. \tag{153}$$

Cette formule, qui est homogène, se réduit à celle des cordes vibrantes pour $V_0=0$. Elle montre que *la vitesse de la courroie diminue la fréquence* (1).

On pourrait, comme au n° 75, améliorer l'approximation.

78. Passons aux *vibrations planes* et posons $w=We^{i\omega t}$. En gardant toujours les notations du n° 73, l'équation (144) nous donne l'équation différentielle

$$W''-2ikW''+W'=0,$$

dont l'intégrale générale se déduit immédiatement de celle du n° 77

$$W=Ae^{i(k+h)z}+Be^{i(k-h)z}+Cz+D.$$

En annulant W et W′ pour z_0 et z_1, puis éliminant les constantes au moyen d'un déterminant que l'on développe facilement, on obtient, après suppression du facteur $e^{ik(z_0+z_1)}$ et en posant $\varphi=h(z_1-z_0)$ et $q=\frac{k}{h}=V_0\sqrt{\frac{\rho}{T}}$,

$$2(\cos q\varphi-\cos\varphi)-(1-q^2)\varphi\sin\varphi=0. \tag{154}$$

Pour $V_0=0$, $q=0$, on retrouve l'équation du n° 76.

Si $V_0\neq 0$, on voit facilement qu'il existe une infinité de racines, séparées par les arcs $\frac{\pi}{2}+n\pi$, dès que n est assez grand. Les grandes racines sont d'ailleurs asymptotiques à $n\pi$.

Supposons V_0 assez petit devant $\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ pour que q^2 soit petit devant l'unité (2).

---

(1) En outre, elle introduit une *variation de phase* (remarque du n° 70).

(2) Avec l'exemple du n° 71, $\frac{T}{\rho}$ vaut 4000. Donc, $q^2=\frac{V_0^2}{4000}$, pour le brin menant. Pour le brin mené, $\frac{T'}{\rho}=4000\,e^{-fx}+V^2(1-e^{-fx})$; donc, en prenant $e^{-fx}=0,1$; $q'^2=\frac{V_0^2}{1600+0,6\,V_0^2}$. Pour $V_0=24$, on a

$$q^2=0,144 \qquad \text{et} \qquad q'^2=0,296.$$

C'est déjà un peu fort. Mais, il faut remarquer que l'erreur relative commise en appliquant les formules (155) est de l'ordre de q^4, soit de 0,021 dans le premier cas et de 0,088 dans le second cas. Bien entendu, pour des vitesses supérieures, les formules deviendraient suspectes.

L'équation s'écrit approximativement

$$2(1-\cos\varphi)-\varphi\sin\varphi=q^2\varphi(\varphi-\sin\varphi).$$

Les racines approchées sont $2n\pi(1-q^2)$ et $2\alpha_n(1+q^2)$, avec la notation du n° 76. On en déduit les formules homogènes

$$(155)\qquad \omega_n=\frac{2n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\left(1-\frac{\rho V_0^2}{T}\right),\qquad \omega'_n=\frac{2\alpha_n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}\left(1+\frac{\rho V_0^2}{T}\right).$$

L'effet de la vitesse V_0 *est de diminuer les fréquences de rang impair et d'augmenter celles de rang pair.*

79. *Le fil oblique.* — Cette fois, x varie dans un intervalle très petit (x_0-a, x_0+a), x_0 ayant une valeur finie quelconque. La pente du fil est $\operatorname{sh}x_0=\operatorname{tang}\varphi$; d'où $\operatorname{ch}x_0=\sec\varphi$, $\operatorname{th}x_0=\sin\varphi$.

Les *vibrations latérales* stationnaires sont déterminées, *en première approximation,* par l'équation différentielle

$$V''+\frac{\omega^2}{g\cos\varphi}V=0;$$

laquelle se déduit de celle du fil horizontal en remplaçant ω par $\frac{\omega}{\sqrt{\cos\varphi}}$.

On en déduit que *les fréquences se déduisent de celles du fil horizontal en multipliant par* $\sqrt{\cos\varphi}$.

Pour les *vibrations planes,* posons $x-x_0=\frac{z}{\omega}\sqrt{g\cos\varphi}$. Nous retombons sur la première approximation du n° 76. On en tire la *même conclusion* que ci-dessus.

80. *La courroie oblique.* — Avec la variable z ci-dessus et en changeant k en $k\sqrt{\cos\varphi}$, on retombe, pour les vibrations latérales ou planes, sur les équations des n^{os} 77 et 78. Dès lors, *il suffit, dans les formules* (153) *et* (155), *de multiplier le second membre par* $\sqrt{\cos\varphi}$ *et d'y remplacer* V_0 *par* $V_0\sqrt{\cos\varphi}$.

81. *Le fil tournant.* — Considérons un fil attaché par ses deux extrémités, lesquelles tournent avec une vitesse angulaire constante Ω autour d'un axe fixe Δ. Supposons cette vitesse assez grande et le fil assez éloigné de Δ pour *que la pesanteur soit négligeable devant la force centrifuge.* Nous nous proposons *d'étudier les petites oscillations au voisinage de la position d'équilibre relatif.*

Quand le fil est en mouvement par rapport au trièdre tournant, il faut ajouter la *force de Coriolis* à la force centrifuge. Dès lors, *les quantitées appelées* ΔX, ΔY, ΔZ au n° 22 *sont les composantes de l'accroissement de la force centrifuge augmenté de la force de Coriolis.*

Nous étudierons seulement trois cas, pour lesquels la courbe d'équilibre est simple.

82. Supposons d'abord que cette courbe soit un *cercle de rayon* R *et d'axe* Δ. La tension a la valeur constante $T = \rho R^2\Omega^2$.

Prenons Ox_0 suivant le prolongement du rayon, Oz_0 suivant le vecteur vitesse d'entraînement et Oy_0 parallèle à Δ. On a

$$\Delta X = \rho\left(\Omega^2 u - 2\Omega\frac{\partial w}{\partial t}\right), \qquad \Delta Y = 0, \qquad \Delta Z = \rho\left(\Omega^2 w + 2\Omega\frac{\partial u}{\partial t}\right).$$

L'équation (37) des *vibrations latérales se réduit à celle des cordes vibrantes.*

En éliminant θ et u entre (36), (38) et (39), on obtient, en prenant pour variable l'angle polaire $\varphi = \frac{s}{R}$

$$\Omega^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + 3\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right) - \frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2\,\partial t^2} - 4\Omega\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi\,\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

Cherchons une *solution stationnaire complexe* de la forme $w = We^{i\omega t}$. Nous avons l'équation différentielle

$$W'''' + W''(3 + k^2) - 4ikW' - k^2 W = 0, \qquad \text{en posant } k = \frac{\omega}{\Omega}.$$

Cherchons une solution en $e^{ir\varphi}$. L'équation caractéristique admet la racine $r = k$. Les trois autres sont données par l'équation

$$r^3 + kr^2 - 3r + k = 0;$$

elles sont toutes trois réelles pour $k < \sqrt{6 - 3\sqrt{3}} = 0{,}8965$. Appelons-les, dans tous les cas, r_1, r_2, r_3. L'intégrale générale est

$$W = Ce^{ik\varphi} + \sum_{n=1}^{3} C_n e^{ir_n\varphi}.$$

Prenons pour origine le milieu de l'arc et soit 2φ l'angle au centre. En écrivant les conditions aux limites $W = W' = 0$ pour les deux extrémités et éliminant les constantes, on obtient *l'équation de résonance*

$$\Sigma(kr_1 + r_2r_3)\sin(k - r_1)\varphi\sin(r_2 - r_3)\varphi = 0$$

ou encore

$$\Sigma(k - r_1)(r_2 - r_3)\cos2(k + r_1)\varphi = 0.$$

Pour k *infiniment petit,* on trouve les solutions asymptotiques suivantes :

$$\alpha = n\pi - \frac{k^2}{2}\left(\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{n\pi}\frac{n\pi}{3}\right)$$

et

$$\alpha = \alpha_n + \frac{k^2}{8(1 + \alpha_n)}(5 + 5\cos^2\alpha_n - 4\alpha_n^2) \qquad \text{avec } \operatorname{tg}\alpha_n = \alpha_n.$$

Pour $k = 1$, on a

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = -1 + \sqrt{2}, \qquad r_3 = -1 + \sqrt{2};$$

l'équation de résonance est vérifiée identiquement : donc, *quel que soit l'arc de cercle, la fréquence de la rotation est une fréquence propre des vibrations planes.*

Si k est *très grand*, on a asymptotiquement $r_1 = -k$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$. Les pulsations propres sont données par

$$\omega_n = \Omega \frac{n\pi}{2\varphi},$$

le rapport $\frac{n\pi}{2\varphi}$ devant être très grand.

Pour une valeur donnée de φ, *les fréquences des vibrations sont toutes proportionnelles à la fréquence de la rotation.*

83. Supposons maintenant que la position d'équilibre soit un segment AB d'une *droite coupant orthogonalement* Δ en un point P extérieur à AB. On a $T = \frac{\rho}{2}\Omega^2(s_1^2 - s^2)$, en prenant l'origine des s sur Δ. Prenons Ox_0 suivant la vitesse d'entraînement. Les ΔX, ΔY, ΔZ ont la même valeur qu'au n° 82.

Les *vibrations parallèles à* Δ sont données par (41), soit

$$(s_1^2 - s^2)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - 2s\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{2}{\Omega^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0.$$

Les vibrations stationnaires de pulsation ω sont déterminées par l'équation différentielle

$$(s_1^2 - s^2)V'' - 2sV' + 2k^2 V = 0, \qquad k = \frac{\omega}{\Omega}.$$

Pour les *vibrations perpendiculaires à* Δ, on a la même équation, d'après (40) et en tenant compte de $w = 0$.

Posons $\frac{s}{s_1} = 1 - 2x$; l'équation devient

$$x(1-x)V'' + (1-2x)V' + 2k^2 V = 0,$$

soit l'*équation de Gauss*, dans le cas où $\gamma = 1$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -2k^2$. *Si l'extrémité* B *est libre*, s_1 est son abscisse. Pour $s = s_1$, on a $x = 0$. Donc, *l'intégrale holomorphe est seule à conserver* et l'on a

$$V = F(\alpha, \beta, 1, x).$$

Si l'on appelle l la longueur du fil, l'équation de résonance s'écrit

$$F\left(\alpha, \beta, 1, \frac{l}{2s_1}\right) = 0.$$

Dans cette équation l'inconnue est k. Elle a une *infinité de racines*. Si le fil est *tendu entre ses deux extrémités*, s_1 est supérieur à l'abscisse de B. Dans ce cas, il faut prendre, pour V, l'intégrale générale de l'équation de Gauss, soit $V = AF(x, k) + BG(x, k)$. L'équation de résonance est

$$F(x_0, k)G(x_1, k) - F(x_1, k)G(x_0, k) = 0;$$

x_0 et x_1 correspondant à A et B. Cette équation en k admet aussi une *infinité de racines* (1).

Les fréquences propres sont toujours proportionnelles à la fréquence de la rotation.

84. Supposons enfin le fil *rectiligne et parallèle à* Δ. On a T = const. et

$$\Delta X = \rho\Omega^2 u + 2\rho\Omega\frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \Delta Y = \rho\Omega^2 v - 2\rho\Omega\frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \Delta Z = 0.$$

Les équations (40) et (41) deviennent

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \rho\Omega^2 u + 2\rho\Omega\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \qquad T\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \rho\Omega^2 v - 2\rho\Omega\frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Cherchons une solution de la forme $u = U\cos\omega t$, $v = V\sin\omega t$. On a

$$TU'' + \rho(\omega^2 + \Omega^2)U + 2\rho\Omega\omega V = 0, \qquad TV'' + \rho(\omega^2 + \Omega^2)V + 2\rho\Omega\omega U = 0.$$

Ce système s'intègre immédiatement par addition et soustraction; l'intégrale générale est

$$U = A\cos\alpha s + B\sin\alpha s + A'\cos\beta s + B'\sin\beta s,$$
$$V = A\cos\alpha s + B\sin\alpha s - A'\cos\beta s - B'\sin\beta s,$$

avec

$$\alpha = (\Omega + \omega)\sqrt{\frac{\rho}{T}}, \qquad \beta = (\omega - \Omega)\sqrt{\frac{\rho}{T}}.$$

Les conditions aux limites sont U = V = 0 pour $s = 0$ et l. On en déduit

$$\sin\alpha l \sin\beta l = 0.$$

D'où

$$\omega = \Omega + \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

n étant un entier positif ou négatif.

Pour Ω = 0, on retrouve la formule des cordes vibrantes.

85. *Fil sur une surface à courbure totale constante* (2). — Les *vibrations stationnaires* sont déterminées par l'équation différentielle, déduite de (52)

$$V'' + \left(\Gamma + \frac{\rho\omega^2}{T}\right)V = 0. \tag{156}$$

Posons $\Gamma + \frac{\rho\omega^2}{T} = m^2$. On a $V = A\cos ms + B\sin ms$.

---

(1) On peut le démontrer comme il suit. Posons $V = \frac{y}{\sqrt{x(1-x)}}$. L'équation différentielle devient, en posant $2k^2 = \lambda$

$$y'' + \frac{1 + 4\lambda x(1-x)}{4x^2(1-x)^2}y = 0.$$

En reprenant les raisonnements d'Émile Picard (*loc. cit.*), on démontre facilement qu'il existe une infinité de valeurs de λ pour lesquelles il existe une solution s'annulant pour les valeurs x_0 et x_1, comprises entre 0 et 1.

(2) Il suffit que la courbure totale soit constante le long de la position d'équilibre.

Si les deux extrémités sont fixes, l'équation de résonance est $\sin ml = 0$, d'où

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2} - \Gamma\right)}.$$

Si $\Gamma > 0$, il faut que n soit supérieur à $\frac{l}{\pi}\sqrt{\Gamma}$. C'est ainsi que pour une sphère de rayon R, le minimum de n est $\frac{\alpha}{\pi}$, en appelant α l'angle au centre du fil au repos. Si $\alpha = \pi$, on peut prendre $n = 1$; d'où $\omega_n = 0$. Ceci correspond au fait que le fil peut tourner très lentement autour du diamètre passant par ses extrémités.

86. Voici un *autre exemple*.

Supposons que le fil soit *tendu sur une sphère* de rayon R entre l'extrémité fixe A et le point A_1. Entre A_1 et l'autre extrémité A_2, le fil est *libre*, A_2 étant fixe. Soient o, s_1, s_2 les abscisses curvilignes de A, A_1, A_2.

On a toujours l'équation (156), mais avec $\Gamma = \frac{1}{R^2}$ pour $s < s_1$ et $\Gamma = 0$ pour $s > s_1$. On a

$$V = A\sin ms, \quad \text{pour } s \leq s_1; \qquad V = A'\sin m's + B'\cos m's, \quad \text{pour } s \geq s_1;$$

avec

$$m^2 = \frac{1}{R^2} + m'^2, \qquad m'^2 = \frac{\rho\omega^2}{T}.$$

Pour $s = s_1$, v et λ et, par conséquent, V et V′ doivent avoir la même valeur. En outre $V = 0$ pour $s = s_2$. On en déduit *l'équation de résonance*

$$\frac{\operatorname{tg} ms_1}{m} + \frac{\operatorname{tg} m'(s_2 - s_1)}{m'} = 0.$$

Chacun des termes du premier membre est une fonction croissante de m ou de m' et passe de $+\infty$ à $-\infty$ quand ms_1 ou $m'(s_2 - s_1)$ traverse les valeurs $\frac{\pi}{2} + n\pi$. On en conclut que l'équation admet une *infinité de racines*.

On pourrait, plus généralement, supposer que le fil est tendu sur deux sphères tangentes en A_1. On aurait une équation de résonance analogue à la précédente, mais avec

$$m^2 = m'^2 + \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R'^2}.$$

RECHERCHES

SUR

LA DÉFORMATION DES SURFACES

PAR M. PAUL VINCENSINI.

Introduction. — Le présent travail, en grande partie consacré à l'étude des circonstances géométriques qui accompagnent la déformation d'une famille étendue de congruences rectilignes (congruences C_2 du Mémoire), tire son origine d'un problème résolu par L. Bianchi se rattachant à la méthode proposée par Weingarten pour résoudre le problème de la déformation des surfaces, et se développe conformément au plan que j'indique dans cette introduction.

Weingarten a montré, comme l'on sait, que si l'on connaît une surface Σ_1 admettant un ds^2 donné, la recherche de la famille de toutes les surfaces Σ admettant ce même ds^2 équivaut à celle d'une autre famille de surfaces Θ. Ces surfaces Θ sont définies par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, établissant une relation, entre les rayons de courbure principaux en un point quelconque et les distances d'un point fixe de l'espace au plan tangent correspondant.

Le cas particulier où les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles des surfaces Θ ainsi associées à un ds^2 donné ont pour images sphériques les génératrices rectilignes de la sphère unitaire est particulièrement intéressant. Les ds^2 correspondant à ce cas peuvent être mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + (u + V)\,dv^2. \tag{1}$$

V étant une fonction arbitraire du paramètre v, et cette forme donne, pour des particularisations bien connues de la fonction V, les différents types d'éléments linéaires (au nombre de *cinq*) pour lesquels le problème de la déformation peut être résolu complètement.

(1) est l'élément linéaire de toutes les surfaces réglées *admettant un plan directeur isotrope*. Parmi ces surfaces, celles qui correspondent à la forme

$$(2) \qquad ds^2 = du^2 + \left(u - \frac{c}{2} + c\,e^{-2v}\right) dv^2$$

sont les surfaces applicables sur un paraboloïde dont une génératrice rectiligne est tangente au cercle de l'infini, et la forme (2) de leur ds^2 est précisément l'une de celles pour lesquelles le problème de la déformation peut être résolu complètement.

Ces dernières surfaces ont été rencontrées par L. Bianchi dans un problème relatif à la déformation des congruences rectilignes. Ce problème est le suivant :

Supposons les différents rayons d'une congruence rectiligne normale C situés dans les différents plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents. On sait, d'une part que C reste normale au cours d'une déformation arbitraire de Σ dans laquelle Σ entraîne ses différents plans tangents, et d'autre part que, si l'on considère une surface quelconque S orthogonale aux rayons de C et si l'on suppose les différents points de S invariablement liés aux rayons correspondants de C, l'ensemble de ces points ne cesse, au cours d'une déformation arbitraire de Σ, de constituer une surface normale à C. Cela étant, le problème traité par L. Bianchi, auquel il a été fait allusion plus haut, consiste à déterminer la surface Σ et la congruence C associée, de façon que, dans la déformation arbitraire dont il vient d'être question, l'une des surfaces normales à C *reste constamment minima*.

Si l'on exclut le cas évident où Σ est une développée de surface minima, les surfaces Σ fournissant les différentes solutions du problème sont celles dont l'élément linéaire a la forme (2) de Weingarten, et, pour chaque valeur du paramètre c, la congruence déformable C est déterminée de façon unique.

Les surfaces complètement déformables d'élément linéaire (2), applicables comme nous l'avons déjà dit sur les paraboloïdes dont une génératrice rectiligne est tangente au cercle de l'infini, se trouvent ainsi géométriquement rattachées aux surfaces minima. On peut se demander s'il ne serait pas possible de généraliser la question, et de relier *l'ensemble de toutes les surfaces d'élément linéaire* (1) applicables sur les surfaces réglées générales à plan directeur isotrope, à quelque problème de déformation analogue à celui envisagé par Bianchi.

Il se trouve, qu'en modifiant convenablement l'énoncé du problème de Bianchi, on peut lui donner une forme se prêtant aisément à la généralisation en question. J'ai été conduit à cette généralisation en partant de la remarque que voici :

Dire qu'une congruence normale C dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents, reste constamment normale à une surface minima au cours d'une déformation arbitraire de Σ, c'est dire que le *point central* (milieu du segment focal) sur chaque rayon D *reste invariablement lié au plan tangent à* Σ *contenant* D, et que dans une configuration quelconque de Σ *le lieu des points centraux relatifs aux différents rayons* D *est une surface normale à* C.

Si l'on néglige la dernière condition énoncée, et si l'on exige seulement que la congruence C *reste normale au cours d'une déformation arbitraire de* Σ *et que le point central sur chaque rayon reste invariablement lié au plan tangent correspondant de* Σ, on obtient un problème généralisant celui de Bianchi, et dont la solution (donnée au n° 6) est précisément fournie *par les surfaces* Σ *applicables sur les surfaces réglées générales à plan directeur isotrope*.

Si, des deux conditions ci-dessus imposées à C, on néglige la condition relative à l'orthogonalité de la congruence, et si l'on ne retient que celle relative à la *fixité*, dans chaque plan tangent de la surface Σ soumise à la déformation, du point central porté par le rayon situé dans le plan tangent envisagé, la surface Σ peut être choisie *arbitrairement*, et les congruences C associées jouissent de la propriété suivante :

Il existe sur Σ un réseau *invariant* (constamment constitué par les deux mêmes familles de courbes au cours de la déformation de Σ), tel que les droites MF_1, MF_2 joignant un point quelconque M de Σ aux deux foyers F_1, F_2 du rayon D de C situé dans le plan tangent en M, restent conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes en M du réseau invariant.

Cette remarque faite, il était naturel de rechercher les congruences C les plus générales, formées de droites situées dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liées à ces plans tangents, jouissant de la propriété que les couples de directions MF_1, MF_2 relatifs aux différents rayons ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de Σ, de diviser harmoniquement les tangentes d'un réseau invariant de Σ. Ce problème, résolu au n° 7 du Mémoire, comporte, pour une surface Σ arbitraire, deux types distincts de solutions que je désigne respectivement par (C_1) et (C_2). Les congruences (C_1) ne sont autres que les congruences (déterminées par Ribaucour) dont les développables correspondent à un réseau conjugué de Σ; pour ces congruences le réseau invariant correspondant est *en général* formé de deux familles *distinctes* de courbes. Pour les congruences du nouveau type (C_2) les deux familles de courbes du réseau invariant sont *toujours confondues*, et ces congruences peuvent être *caractérisées* par la circonstance suivante : Au cours d'une déformation arbitraire de Σ, l'*un* des deux foyers situés sur un rayon quelconque D de la congruence *conserve, sur* D, *une position invariable*.

Cette remarque est le point de départ d'une étude, faite aux n^os 8, 9 et 10, des propriétés de déformation des congruences C_2.

Dans cette Introduction nous nous bornerons à signaler la propriété suivant laquelle la fixité, sur leurs rayons respectifs, des foyers situés sur l'*une* des deux nappes focales d'une congruence C_2, entraîne la conservation des développables ayant leurs arêtes de rebroussement sur l'*autre* nappe.

M. Finikoff, dans un important Mémoire dont il sera question dans la suite, a résolu complètement le problème de la déformation *continue à un paramètre* d'une congruence avec persistance des *deux* familles de développables, et a abordé le problème de la déformation *arbitraire* avec persistance de l'*une* des deux familles de développables. Il a signalé, pour ce deuxième problème, l'existence d'une famille de solutions (dépendant de deux fonctions arbitraires) constituée par des congruences dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents de la surface déformée Σ. Cette solution n'est pas la seule. L'ensemble des congruences C_2 étudiées dans le Mémoire actuel, fournit la totalité des congruences jouissant de la propriété de permanence envisagée par M. Finikoff dont les rayons sont situés dans les plans tangents de la surface soumise à la déformation.

Il est remarquable que la déformation de ces congruences C_2 réalise *deux permanences simultanées :* celle des *foyers* sur l'une des deux nappes focales et celle des *développables* relatives à l'autre nappe.

L'une quelconque des deux permanences précédentes entraîne d'ailleurs la deuxième, et suffit à classer une congruence dans la catégorie des congruences C_2.

Certains des résultats obtenus dans ce Mémoire ont été succinctement indiqués dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. 222, 1946, pp. 630-632 et 1326-1328).

1. *Points centraux d'une congruence* C. — Nous rapporterons la surface Σ dont les plans tangents contiennent les rayons D de C à un système orthogonal (u, v) choisi de la façon suivante.

Soit I le pied de la perpendiculaire abaissée du point $M(x, y, z)$ de Σ sur le rayon D situé dans le plan tangent en M; les courbes $u = \text{const.}$ seront les courbes enveloppées, sur la surface, par les différentes droites MI; les courbes $v = \text{const.}$ seront les trajectoires orthogonales des précédentes.

Désignons par X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2, 3)$ les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $v = \text{const.}$ $(i = 1)$, de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ $(i = 2)$, et de la normale en M à Σ $(i = 3)$. Les coordonnées du point I du rayon D de C, de cosinus directeurs X_1, Y_1, Z_1 sont

$$(1) \qquad \xi = x + aX_1, \qquad \eta = y + aY_1, \qquad \zeta = z + aZ_1.$$

D'autre part, si

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$
$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

sont les deux formes quadratiques fondamentales de la surface Σ, celles de la congruence C seront

$$\mathbf{S}\, d\mathrm{X}_1\, d\xi = e\,du^2 + (f+f')\,du\,dv + g\,dv^2,$$
$$d\sigma^2 = \mathbf{S}\, d\mathrm{X}_1^2 = \mathrm{E}'\,du^2 + 2\mathrm{F}'\,du\,dv + \mathrm{G}'\,dv^2,$$

où l'on a

$$e = \mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad f = \mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \qquad f' = \mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad g = \mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v},$$
$$\mathrm{E}' = \mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathrm{F}' = \mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v}, \qquad \mathrm{G}' = \mathbf{S}\left(\frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v}\right)^2.$$

Moyennant les relations exprimant les dérivées des coordonnées du point M et celles des cosinus directeurs X_i, Y_i, Z_i

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{\mathrm{E}}\,\mathrm{X}_1, & \dfrac{\partial x}{\partial v} = \sqrt{\mathrm{G}}\,\mathrm{X}_2, \\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\mathrm{X}_2 + \dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\mathrm{X}_3, & \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_2 + \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}\mathrm{X}_3, \\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\mathrm{X}_1 + \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}\mathrm{X}_3, & \dfrac{\partial \mathrm{X}_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_1 + \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}\mathrm{X}_3, \\ \dfrac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial u} = -\dfrac{\mathrm{D}}{\sqrt{\mathrm{E}}}\mathrm{X}_1 - \dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{G}}}\mathrm{X}_2, & \dfrac{\partial \mathrm{X}_3}{\partial v} = -\dfrac{\mathrm{D}'}{\sqrt{\mathrm{E}}}\mathrm{X}_1 - \dfrac{\mathrm{D}''}{\sqrt{\mathrm{G}}}\mathrm{X}_2, \end{cases}$$

et les analogues en Y et Z, on obtient pour les coefficients e, f, f', g, E', F', G' les expressions suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} e = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\dfrac{\partial a}{\partial u} + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\mathrm{DD}', \\ f = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \dfrac{\partial a}{\partial v}\right) + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\mathrm{DD}'', \\ f' = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\dfrac{\partial a}{\partial u} + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\mathrm{D}'^2, \\ g = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \dfrac{\partial a}{\partial v}\right) + \dfrac{a}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\mathrm{D}'\mathrm{D}'' \\ \mathrm{E}' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2 + \dfrac{\mathrm{D}^2}{\mathrm{E}}, \\ \mathrm{F}' = -\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} + \dfrac{\mathrm{DD}'}{\mathrm{E}}, \\ \mathrm{G}' = \left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{E}}}\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2 + \dfrac{\mathrm{D}'^2}{\mathrm{E}}. \end{cases}$$

L'équation aux abscisses ρ_1 et ρ_2 des foyers situés sur D, comptées à partir du point I, est

$$(4)\qquad (E'G'-F'^2)\rho^2+[E'g+G'e-F'(f+f')]\rho+eg-ff'=0,$$

et celle des développables

$$(5)\qquad (E'f-F'e)\,du^2+[E'g-G'e+F'(f'-f)]\,du\,dv+(F'g-G'f)\,dv^2=0.$$

Explicitons les coefficients de l'équation (4). Compte tenu des relations (3), on obtient

$$E'G'-F'^2=\frac{1}{4E^2G}\left[\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'\right]^2,$$

$$E'g+G'e-F'(f+f')=\frac{1}{2EG}\left[\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'\right]$$
$$\times\left[\frac{a}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D''+\frac{1}{\sqrt{E}}\left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}\right)D'+\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D\right],$$

$$eg-ff'=\frac{a}{2EG}\left[\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'\right]\left[\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D'-\frac{\partial a}{\partial u}D''\right],$$

et l'on voit que le point central ω sur le rayon D est défini par

$$(6)\qquad \overline{I\omega}=\frac{\rho_1+\rho_2}{2}=-\frac{\sqrt{EG}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D+\sqrt{E}\left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}\right)D'+\frac{aE}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D''}{\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'}.$$

Donnons aussi l'expression du produit $\rho_1\rho_2$ qui nous sera utile plus loin

$$(6')\qquad \rho_1\rho_2=2aE\frac{\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)D'-\frac{\partial a}{\partial u}D''}{\frac{\partial G}{\partial u}D+\frac{\partial E}{\partial v}D'}.$$

2. *Congruences* C *à points centraux invariablement liés aux plans tangents de* Σ. — Demandons-nous comment il convient de choisir la surface Σ et la congruence C associée pour que, dans toute déformation de Σ, les différents points centraux de C, supposés invariablement liés aux plans tangents de Σ, *restent points centraux pour les différentes congruences* C *déformées*.

Il faut et il suffit pour cela, que l'on puisse choisir la fonction $\overline{MI}=a(u,v)$ qui fixe dans chaque plan tangent à Σ le rayon correspondant de C, de façon que la distance $\overline{I\omega}$, qui détermine le point central, soit une fonction des deux variables u et v *restant la même fonction de* u, v lorsqu'on déforme Σ arbitrairement.

Si l'on a égard à l'expression (6) de $\overline{I\omega}$, on voit aussitôt que le coefficient de D″ doit être nul. Cela exige que l'on ait, soit $a=0$, soit $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0$.

Si $a = 0$, l'expression de $\overline{I\omega}$ s'écrit

$$\overline{I\omega} = -\frac{G\sqrt{E}\,D}{\frac{\partial G}{\partial u}D + \frac{\partial E}{\partial v}D'},$$

et l'on voit que pour que $\overline{I\omega}$ ne dépende que de u, v, et non des configurations particulières que peut prendre la surface Σ en se déformant, il faut et il suffit que $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$.

La première hypothèse $a = 0$ rentre donc dans la deuxième $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$. E est une fonction de la seule variable u, que l'on peut réduire à l'unité moyennant un changement du paramètre u, et la surface Σ est seulement assujettie à avoir un élément linéaire de la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2.$$

Σ est, comme l'on voit, une surface arbitraire rapportée à un système de ∞^1 géodésiques ($v = \text{const.}$) et à leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$), et C est la congruence normale formée par les tangentes aux géodésiques $v = \text{const.}$ Le point central ω sur le rayon de C issu d'un point quelconque M de Σ, défini par $\overline{M\omega} = -\frac{G}{\frac{\partial G}{\partial u}}$, reste ici à une distance invariable du point M égale à la moitié du rayon de courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des géodésiques $v = \text{const.}$ issue de M.

Plaçons-nous dans l'hypothèse générale $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$, $a \neq 0$.

L'élément linéaire de Σ pourra, comme il a été dit, être mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

et les rayons D de C devront être parallèles aux tangentes d'une famille de géodésiques ($v = \text{const.}$) de Σ.

L'expression (6) de $\overline{I\omega}$ s'écrit ici

$$\overline{I\omega} = -\frac{\sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial u}{\partial v}\right)D + \left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\frac{\partial u}{\partial u}\right)D'}{\frac{\partial G}{\partial u}D}, \tag{7}$$

et l'on voit que, pour que $\overline{I\omega}$ ne dépende pas de la configuration de Σ, il faut et il suffit que l'on ait

$$a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\frac{\partial u}{\partial u} = 0, \tag{8}$$

d'où l'on déduit

$$a = V\sqrt{G}, \tag{9}$$

V étant une fonction arbitraire du seul paramètre v.

A toute surface Σ on peut donc associer une infinité de congruences C arbitrairement déformables avec invariance des points centraux sur leurs rayons respectifs. Chaque système de ∞^1 géodésiques de Σ fournit une famille, dépendant d'une fonction arbitraire d'un argument, de telles congruences. Si $ds^2 = du^2 + G\,dv^2$ est l'élément linéaire de Σ rapporté aux ∞^1 géodésiques ($v = \text{const.}$) et leurs trajectoires orthogonales ($u = \text{const.}$), les congruences C correspondantes s'obtiennent comme il suit.

On porte, sur la tangente à la trajectoire orthogonale des géodésiques issue d'un point quelconque $M(u, v)$ *de* Σ, *une longueur* $\overline{MI} = V\sqrt{G}$ (V *étant une fonction arbitraire de* v) *et l'on mène, par le point* I *ainsi obtenu, la parallèle* D *à la tangente à la géodésique issue de* M.

En faisant varier la famille de géodésiques considérée, on obtient toutes les congruences C dont les points centraux restent invariablement liés aux plans tangents correspondants de Σ lorsqu'on déforme Σ arbitrairement.

Le point central ω sur un rayon quelconque, D, de l'une quelconque des congruences C envisagées, est défini par la relation (7) qui, compte tenu de (8) et de l'expression (9) de a, donne

$$\overline{I\omega} = -\frac{G}{\dfrac{\partial G}{\partial u}}(1 + V') - \frac{V}{2}\left(\frac{\dfrac{\partial G}{\partial v}}{\dfrac{\partial G}{\partial u}}\right), \tag{7'}$$

V' étant la dérivée de V.

3. *Propriétés des foyers et des développables des congruences* C. — Au cours d'une déformation arbitraire de Σ les congruences C qui viennent d'être déterminées jouissent de la propriété suivante : *Leurs développables ne cessent de correspondre à un réseau conjugué de* Σ.

Cette propriété de la déformation de Σ est d'une vérification directe aisée. On peut la rattacher au problème, résolu par Ribaucour (1), de la détermination de toutes les congruences C dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents, les développables des congruences C ne cessant de correspondre à un réseau conjugué de la surface Σ lorsque celle-ci se déforme arbitrairement.

Ribaucour a établi que les congruences C jouissant de la propriété énoncée sont caractérisées par le fait que deux foyers associés quelconques sont situés sur deux tangentes conjuguées de la surface Σ (qui sont précisément les tangentes du réseau conjugué de Σ correspondant aux développables de C), et qu'en outre, il suffit que la correspondance des développables de C et d'un

(1) A. Ribaucour, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces courbes* (*Journ. de Math.*, 4e série, t. VII, 1891).

réseau conjugué de Σ ait lieu pour une configuration déterminée de Σ pour qu'elle subsiste dans toute autre configuration. Il a d'ailleurs montré que les congruences en question ne sont autres que les congruences des polaires des cordes de contact des différentes enveloppes de sphères centrées sur Σ.

Les congruences C déterminées par Ribaucour peuvent se déduire de l'équation (5) des développables donnée au n° 1. Explicitons cette équation que nous aurons à utiliser dans la suite. Posons

$$\begin{aligned}\Delta &= \mathrm{E}'f' - \mathrm{F}'e,\\ \Delta' &= \mathrm{E}'g - \mathrm{G}'e + \mathrm{F}'(f' - f),\\ \Delta'' &= \mathrm{F}'g - \mathrm{G}'f;\end{aligned}$$

l'équation des développables est

$$\Delta\, du^2 + \Delta'\, du\, dv + \Delta''\, dv^2 = 0,$$

où Δ, Δ', Δ'', calculés au moyen des relations (3), ont les expressions suivantes où K désigne la courbure totale de Σ :

$$\Delta = \frac{a}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{EG}}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2 \mathrm{D}'^2 + \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{D}^2 + \frac{1}{\mathrm{EG}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\left(a\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} + \sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial a}{\partial u}\right)\mathrm{DD}',$$

$$\begin{aligned}\Delta' = {} & \frac{a}{\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{EG}}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\right)^2 \mathrm{D}'\mathrm{D}'' + \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)\mathrm{D}^2 + \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u}\mathrm{D}'^2\\ & + \frac{a}{\mathrm{E}^2}\left[\sqrt{\mathrm{E}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v}\right) + \sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\sqrt{\mathrm{EG}}}{\mathrm{G}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2\right]\mathrm{DD}' + a\mathrm{K}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta'' = {} & \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)\mathrm{DD}' - \frac{a}{\mathrm{EG}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\mathrm{D}'\mathrm{D}'' - \frac{a}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{EG}}}\left(\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right)^2\mathrm{D}'\mathrm{D}''\\ & + \frac{1}{\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v}\left(\sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)\mathrm{D}'^2.\end{aligned}$$

Si, à partir des expressions précédentes de Δ, Δ', Δ'', on forme la condition pour que les développables d'une congruence C correspondent à un réseau conjugué de Σ, à savoir

$$\mathrm{D}\Delta'' - \mathrm{D}'\Delta' + \mathrm{D}''\Delta = 0,$$

on obtient sans peine

$$\mathrm{K}\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\mathrm{D} + \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\mathrm{D}'\right)\left(\sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\right) = 0.$$

La nullité du premier facteur exprime que la surface Σ est développable, et correspond à un cas d'indétermination évident que nous exclurons dans la suite. Le second facteur $\left(\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u}\mathrm{D} + \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v}\mathrm{D}'\right)$ ne peut être nul pour toute déformation de Σ que si l'on a

$$\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial u} = \frac{\partial\mathrm{E}}{\partial v} = 0,$$

soit

$$E = f(u), \qquad G = \varphi(v),$$

ce qui ramène au cas exclu où Σ est développable.

La condition pour que les développables de C correspondent à un réseau conjugué de Σ se réduit donc en définitive à

$$\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$a = V\sqrt{G} \qquad (V = \text{fonction arbitraire de } v),$$

A toute surface Σ on peut donc associer, conformément au résultat de Ribaucour, une infinité de congruences C dont les développables ne cessent de correspondre à un réseau conjugué de Σ lorsque Σ se déforme arbitrairement. On voit en outre qu'à partir de tout système orthogonal de $\Sigma(ds^2 = E du^2 + G dv^2)$, on peut construire une infinité de congruences C en portant, sur la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ issue d'un point quelconque M, une longueur $\overline{MI} = V\sqrt{G}$, et en menant par I la parallèle à la tangente à la courbe $v = \text{const.}$

La construction générale précédente est précisément (*voir* le n° 2) celle qui, appliquée au cas où Σ est rapportée à une famille de géodésiques et à leurs trajectoires orthogonales ($ds^2 = du^2 + G dv^2$), fournit les congruences C, arbitrairement déformables avec Σ, dont les points centraux restent invariablement liés aux plans tangents contenant les différents rayons, lorsque Σ se déforme arbitrairement. Ces congruences jouissent donc bien, comme on l'avait annoncé, de la propriété que leurs développables ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de Σ, de correspondre à un réseau conjugué de Σ. Et la proposition générale de Ribaucour montre en outre que, pour chaque position du point M sur Σ, les tangentes conjuguées du réseau correspondant aux développables d'une congruence C sont les droites MF_1, MF_2, F_1 et F_2 étant les foyers du rayon de C situé dans le plan tangent en M à Σ.

Considérons dès lors la droite $M\omega$, joignant un point quelconque M de Σ au point central, ω, du rayon D d'une congruence C associée à Σ situé dans le plan tangent en M. Cette droite reste invariablement liée au plan tangent en M à Σ lorsque Σ se déforme puisqu'il en est ainsi du point ω, et l'ensemble des droites $M\omega$ enveloppe sur Σ une famille de courbes qui, avec les géodésiques $v = \text{const.}$, constitue un réseau (évidemment non conjugué) *invariant* au cours d'une déformation arbitraire de Σ. Ici et dans toute la suite nous entendons, par *réseau invariant de* Σ, un réseau dont les courbes des deux familles sont constamment constituées par les mêmes points de Σ lorsque Σ se déforme.

Le parallélisme du rayon D et de la tangente à la géodésique $v = \text{const.}$ issue de M, et la symétrie des deux foyers F_1, F_2 portés par D par rapport au point central ω, montrent que les deux tangentes conjuguées MF_1, MF_2 de Σ, sont

conjuguées harmoniques par rapport aux tangentes du réseau invariant qui vient d'être mis en évidence. Il en résulte que, pour les congruences C que nous étudions, le réseau de Σ qui correspond aux développables (de tangentes MF_1, MF_2) conserve, au cours d'une déformation arbitraire de Σ, la double propriété de *rester conjugué* (au sens de Dupin), et *de partager harmoniquement un réseau invariant de* Σ, à savoir le réseau déterminé par les géodésiques $v = \text{const.}$ et par les enveloppes des droites Mω.

Nous étudierons plus loin en détail (n° 6) les liens qui existent entre les deux propriétés précédentes. Pour l'instant nous nous bornerons à noter la définition géométrique suivante, résultant de ce qui précède, des congruences C à points centraux invariants par déformation arbitraire de la surface associée Σ.

Envisageons l'une quelconque C de ces congruences; c'est, comme nous l'avons dit, la congruence des polaires des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées aux différents points M de Σ.

Les courbes décrites par le centre de la sphère enveloppée lorsque son rayon conserve une valeur constante constituent une famille de courbes qui, pour une enveloppe de sphère arbitraire, est une famille arbitraire de ∞^1 courbes de Σ. Pour les enveloppes de sphères donnant lieu aux congruences C actuelles, cette famille de courbes est une *famille quelconque de* ∞^1 *géodésiques de* Σ. Cette propriété est caractéristique des congruences C, et permet d'énoncer ainsi la construction géométrique de ces congruences :

Étant donnée une surface quelconque Σ, considérons sur cette surface un système quelconque de ∞^1 géodésiques; centrons aux différents points d'une même géodésique quelconque ∞^1 sphères de même rayon R, la loi de variation de R lorsqu'on passe d'une géodésique aux autres étant choisie arbitrairement; *la congruence des polaires des cordes de contact des enveloppes de sphères ainsi obtenues est la congruence* C *la plus générale.*

ρ_1 et ρ_2 étant les distances des deux foyers situés sur un rayon quelconque D de C au pied I de la perpendiculaire menée du point M sur D, la somme $(\rho_1 + \rho_2)$ reste constante par déformation arbitraire de Σ et a l'expression $2\overline{\text{I}\omega}$ fournie par la relation $(7')$ du n° 2. D'autre part, si l'on envisage la congruence des cordes de contact (Δ), congruence dont les rayons Δ sont les polaires des rayons D de (C), on sait (propriété générale des congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères) que le produit $(r_1 r_2)$ des distances des foyers situés sur un rayon quelconque Δ au plan tangent au point correspondant M de Σ (ou à la perpendiculaire commune MI de D et Δ) reste constant sur chaque rayon lorsque Σ se déforme. Les enveloppes de sphères centrées aux différents points d'une famille quelconque de ∞^1 géodésiques d'une surface quelconque, le rayon de la sphère génératrice étant le même sur une même géodésique et variant d'une géodésique à l'autre suivant une loi arbitraire, jouissent donc de la propriété suivante :

Au cours d'une déformation arbitraire de la déférente, l'une des deux fonctions symétriques élémentaires des abscisses des foyers sur deux rayons homologues quelconques de la congruence des cordes de contact et de celle de leurs polaires (comptées à partir de la perpendiculaire commune) reste invariable, à savoir, le produit pour la congruence des cordes de contact, et la somme pour la congruence de leurs polaires.

4. *Caractérisation de certains types de surfaces par des propriétés métriques invariantes de congruences associées.* — La considération des fonctions symétriques élémentaires des abscisses ρ_1 et ρ_2 des foyers dans une congruence formée de droites situées dans les plans tangents d'une surface ou perpendiculaires à ces plans tangents, les abscisses étant comptées, dans le premier cas à partir de la projection orthogonale I du point de contact M du plan tangent contenant un rayon quelconque D de la congruence sur ce rayon, et dans le second cas à partir de la trace du rayon sur le plan tangent correspondant, permet de caractériser des types intéressants de surfaces.

En ce qui concerne les congruences à rayons orthogonaux aux différents plans tangents d'une surface S et invariablement liés à ces plans, congruences pour lesquelles le produit $\rho_1\rho_2$ reste invariant sur chaque rayon lorsqu'on déforme S arbitrairement, j'ai montré (1) qu'il n'existe, en dehors des fonctions de la forme $f[u, v, (\rho_1\rho_2)]$ (u et v étant les coordonnées curvilignes sur S) où ρ_1 et ρ_2 ne figurent que par leur produit, aucune autre fonction de la forme $f(u, v, \rho_1, \rho_2)$ restant invariante par déformation arbitraire de S, *à moins que cette fonction ne se réduise à* $\rho_1+\rho_2$, La valeur invariante de $\rho_1+\rho_2$ est alors *zéro*, et la surface S est *une déformée de surface spirale quelconque*.

Le cas où les rayons de la congruence envisagée sont dans les plans tangents aux différents points M d'une surface S (ρ_1 et ρ_2 étant alors les distances algébriques de deux foyers associés quelconques à la projection orthogonale I du point M sur le rayon qui les porte) donne lieu à la remarque suivante. Alors que, comme on l'a vu, les congruences pour lesquelles la *somme* $(\rho_1+\rho_2)$ reste invariante par déformation arbitraire de S *ont leurs rayons parallèles aux tangentes d'une famille quelconque de* ∞^1 *géodésiques de* S, celles pour lesquelles le *produit* $\rho_1\rho_2$ reste invariant ont leurs rayons *perpendiculaires aux tangentes d'une telle famille de géodésiques de* S (on laisse de côté le cas banal fourni par les congruences admettant S pour nappe focale, pour lesquelles le produit $\rho_1\rho_2$ reste évidemment nul dans toute déformation de S).

Considérons en effet l'expression (6') [n° 1] du produit $\rho_1\rho_2$ et exprimons que cette expression conserve, dans toute déformation de S, sur chaque rayon (u, v), une valeur $f(u, v)$ ne dépendant que du rayon envisagé. Il faut et

(1) P. VINCENSINI, *Sur la déformation des surfaces et sur quelques propriétés des surfaces spirales* (*Bull. Soc. Math. de France*, t. LIX, 1931, p. 211-228).

il suffit pour cela que l'on ait, au cours d'une déformation arbitraire de S,

$$f(u, v)\frac{\partial G}{\partial u}D + \left[f(u, v)\frac{\partial E}{\partial v} - 2aE\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right)\right]D' + 2aE\frac{\partial a}{\partial u}D'' = 0,$$

ce qui exige, le cas $f(u, v) = 0$ ayant été exclu,

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial u} = 0, \qquad \dfrac{\partial a}{\partial u} = 0, \\ \dfrac{\partial \log E}{\partial v} = \dfrac{2a}{f(u, v)}\left(\sqrt{G} + \dfrac{\partial a}{\partial v}\right). \end{cases}$$

Les deux premières équations du système précédent expriment, l'une que G est une fonction de v (que nous supposerons réduite à l'unité) et que par suite les courbes $u = \text{const.}$ de S sont des géodésiques, et l'autre que a ne dépend lui aussi que de v, c'est-à-dire de la distance géodésique du point M à une trajectoire orthogonale fixe des géodésiques précédentes. Ainsi

Étant données une surface quelconque S *et une famille arbitraire de* ∞^1 *géodésiques sur cette surface; si, dans le plan tangent en un point quelconque* M *de* S, *on mène la perpendiculaire à la tangente à la géodésique issue de* M, *au point* I *de cette tangente tel que* $\overline{MI} = a$ *soit une fonction, arbitrairement choisie, de la distance géodésique de* M *à une trajectoire orthogonale fixe des géodésiques envisagées, l'ensemble des droites obtenues constitue la congruence la plus générale se déformant avec invariance du produit* $\rho_1\rho_2$ *lorsqu'on soumet* S *à une déformation arbitraire.*

La dernière équation du système (α) fait connaître le produit $\rho_1\rho_2 = f(u, v)$ constant sur chaque rayon au cours de la déformation.

Particularisons les congruences que nous venons d'obtenir, et cherchons celles pour lesquelles il existe, au cours d'une déformation arbitraire de S, une relation donnée (quelconque) entre $\rho_1\rho_2$ et a. Il s'agit donc des congruences pour lesquelles, F_1 et F_2 étant les foyers du rayon D situé dans le plan tangent en M à S et I la projection de M sur D, $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ est une fonction déterminée de $\overline{MI}$ restant la même fonction de MI lorsqu'on déforme S arbitrairement.

La dernière équation du système (α) s'écrit (avec $G = 1$)

$$(\beta)\qquad \frac{\partial \log E}{\partial v} = \frac{2a}{f(a)}\left(1 + \frac{\partial a}{\partial v}\right).$$

Le second membre étant uniquement fonction de v puisqu'on a vu qu'il en est ainsi de a, on en déduit

$$E = UV,$$

U et V étant respectivement fonctions de u et de v.

En changeant le paramètre u on peut poser $U = 1$, et l'on voit que l'élément linéaire de S a la forme

$$ds^2 = V\,du^2 + dv^2,$$

caractéristique des surfaces applicables sur les surfaces de révolution, les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ étant respectivement les déformées des méridiens et des parallèles.

A toute surface applicable sur une surface de révolution, on peut d'ailleurs attacher une infinité de congruences du type actuel, obtenues en intégrant l'équation différentielle du premier ordre (β) après s'être donné arbitrairement la fonction $f(a)$.

Si l'on exige que a et $f(a)$ soient des *constantes*, l'équation (β) s'écrit

$$\frac{\partial \log E}{\partial v} = k\,(\text{constante}).$$

E est donc de la forme

$$E = e^{kv+c}, \qquad c = \text{const.},$$

et S est une surface *pseudosphérique*.

L'existence, pour une surface pseudosphérique S, de congruences associées pour lesquelles les deux quantités $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ et $\overline{MI}$ sont l'une et l'autre constantes et le restent au cours d'une déformation arbitraire de S, était assurée *a priori* : toute congruence formée par les normales à la deuxième nappe focale d'une congruence pseudosphérique normale quelconque admettant S pour première nappe focale jouit évidemment de la propriété d'invariance indiquée. Mais ce qui précède montre que l'existence, pour une surface S, de congruences associées jouissant de la propriété d'invariance en question est *caractéristique des surfaces pseudosphériques*.

Il convient de remarquer que les congruences générales associées à une surface quelconque S applicable sur une surface de révolution pour lesquelles $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2} = f(\overline{MI})$, sont des congruences (de Ribaucour) particulières *à couples de foyers associés situés sur deux tangentes conjuguées de* S.

Si $\frac{du}{dv}$ définit la direction MF_1 on a, en effet,

$$\sqrt{E}\,\frac{du}{dv} = \frac{\overline{IF_1}}{\overline{MI}} = \frac{\rho_1}{a},$$

et de même, pour la direction MF_2

$$\sqrt{E}\,\frac{du}{dv} = \frac{\rho_2}{a}.$$

L'équation quadratique du faisceau (MF_1, MF_2) est

$$a^2 E\,du^2 - a\sqrt{E}(\rho_1 + \rho_2)\,du\,dv + \rho_1\rho_2\,dv^2 = 0.$$

Les directions MF_1, MF_2 sont conjuguées sur S si l'on a

$$a^2 E D'' + a\sqrt{E}(\rho_1 + \rho_2)D' + \rho_1\rho_2 D = 0,$$

et cette dernière équation est vérifiée pour les congruences actuelles, comme le montrent les expressions (6) et (6′) du n° 2 de $\rho_1 + \rho_2$ et de $\rho_1\rho_2$ où, conformément aux équations (α), on remplace G par 1 et $\frac{\partial a}{\partial u}$ par zéro.

Nous pouvons en définitive énoncer le résultat général suivant :

Les surfaces S *auxquelles on peut associer des congruences, formées de droites situées dans leurs plans tangents et invariablement liées à ces plans, telles que, si* I *est la projection orthogonale de chaque point* M *de* S *sur le rayon* D *situé dans le plan tangent en* M *et si* F_1, F_2 *sont les foyers de* D, *le produit* $\overline{IF_1} \times \overline{IF_2}$ *soit une fonction déterminée (quelconque) de* $\overline{MI}$ *et reste la même fonction* $f(\overline{MI})$ *lorsque* S *se déforme arbitrairement, sont les surfaces applicables sur les surfaces de révolution.*

A chaque surface S *applicable sur une surface de révolution on peut associer une infinité de familles de* ∞^1 *congruences du type considéré; chaque forme de la fonction* $f(\overline{MI})$ *donne l'une de ces familles, et les* ∞^1 *congruences qui la constituent ont leurs rayons perpendiculaires aux tangentes aux déformées des méridiens; les positions de ces rayons dans les différents plans tangents étant fournies par l'intégration de l'équation différentielle du premier ordre* (β).

En outre, toutes les congruences du type actuel ont leurs couples de foyers associés situés sur deux tangentes conjuguées de S *(sont des congruences de Ribaucour).*

Parmi les congruences précédentes attachées à une surface quelconque S applicable sur une surface de révolution, figurent évidemment les congruences (cycliques) formées par les axes des cercles des systèmes cycliques arbitrairement déformables avec S, pour lesquelles les cercles sont orthogonaux aux plans tangents à S, leurs plans passant par les points de contact correspondants. Ces congruences spéciales, que j'ai étudiées dans un Mémoire antérieur (1), dépendent de deux constantes arbitraires. Elles sont loin, comme l'on voit, d'épuiser la famille complète qui vient d'être déterminée, dont le degré de généralité est celui d'une fonction arbitraire d'un argument.

5. *Nouvelles propriétés caractéristiques des surfaces applicables sur les surfaces de révolution et sur les développées de surfaces minima.* — Revenons aux congruences C à points centraux ω invariants déterminées au n° 2, et envisageons spécialement le cas où le réseau invariant formé par les géodésiques $v = \text{const.}$ et les enveloppes des droites Mω est *orthogonal*. Les foyers F_1, F_2 portés par un rayon quelconque D de C sont alors symétriques par rapport à la droite Mω, et restent, au cours d'une déformation arbitraire de la surface Σ, équidistants du point M correspondant de Σ.

(1) P. VINCENSINI, *Sur la formation des systèmes cycliques* (*Ann. Éc. Norm.*, 1930).

Le milieu ω de F_1F_2 est constamment confondu avec le point I où D coupe la tangente à la trajectoire orthogonale des géodésiques $v = \text{const.}$, et l'on a, sur toute déformée de Σ, $\overline{I\omega} = 0$.

L'expression (7) de $\overline{I\omega}$, où l'on a tenu compte de la relation (8) qui définit les congruences C, est

$$\overline{I\omega} = \frac{-\sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \dfrac{\partial a}{\partial v}\right)}{\dfrac{\partial G}{\partial u}},$$

et l'on voit que, pour les congruences jouissant de la propriété indiquée, on a

$$\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v} = 0. \tag{10}$$

Si, en changeant la fonction V dans l'expression (9) de a, nous donnons à la fonction arbitraire V de v la forme $-\frac{V}{V'}$ (V' étant la dérivée de V), de sorte que

$$a = -\frac{V}{V'}\sqrt{G}, \tag{11}$$

et si nous portons l'expression de $\sqrt{G}$ déduite de (11) dans (10), nous obtenons

$$\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial v} = \frac{V'}{V},$$

d'où

$$a = UV, \tag{12}$$

U étant une fonction arbitraire de u.

Dès lors, (11) donne

$$\sqrt{G} = -UV', \tag{13}$$

et le ds^2 de la surface Σ affecte la forme

$$ds^2 = du^2 + U^2V'^2\,dv^2,$$

soit en prenant pour paramètre v la fonction V [ce qui donne pour l'expression (12) de a : $a = Uv$]

$$ds^2 = du^2 + U^2\,dv^2, \tag{14}$$

forme qui caractérise les surfaces applicables sur les surfaces de révolution, rapportées aux géodésiques transformées des méridiens et aux transformées des parallèles. Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Si une congruence C *dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface* Σ *se déforme, par déformation arbitraire de* Σ, *de façon que les couples de foyers associés soient constamment équidistants du point de contact correspondant de* Σ, *les points centraux restant invariablement liés aux plans tangents,* Σ *est nécessairement applicable sur une surface de révolution.*

A toute surface Σ applicable sur une surface de révolution sont d'ailleurs associées ∞^1 congruences C jouissant des propriétés indiquées, correspondant aux ∞^1 mises possibles du ds^2 sous la forme (14).

Nous avons vu qu'avec le choix fait pour le paramètre v, l'expression (12) de a définissant une congruence C attachée à Σ est

$$a = \mathrm{U}v.$$

Si l'on observe que le choix en question ($v = \mathrm{V}$) entraîne [d'après (13)] que U soit négatif, on constate que, pour avoir le point I (défini par $\overline{\mathrm{MI}} = a = \mathrm{U}v$, où le rayon D d'une congruence C relatif à un point quelconque M de Σ, coupe la tangente MT en M à la déformée de parallèle, *il suffit de prendre le point où* MT *coupe, normalement, la développante de la déformée de parallèle ayant son point de rebroussement sur la déformée d'un méridien fixe.*

En faisant varier le méridien fixe de la construction précédente, on obtient les ∞^1 congruences C solutions du problème.

Si Σ a la forme révolutive, les développantes dont il vient d'être question sont des développantes de cercle, et la construction des congruences C affecte une forme particulièrement simple.

Si Σ est à courbure totale constante, le nombre des congruences C associées est ∞^3 au lieu de ∞^1. Supposons Σ à courbure totale constante *positive*, et appliquons-la sur la sphère Σ_0 de même courbure. Les congruences C se déforment, et se transforment en des congruences qui, ayant leurs couples de foyers associés équidistants du point où le plan tangent à Σ_0 qui les contient touche la sphère, donc du centre O de celle-ci, *sont des congruences admettant pour enveloppée moyenne le point* O. D'ailleurs, les différents segments focaux des congruences C à enveloppée moyenne point relatives à la sphère Σ_0 *sont vus des points correspondants* M *de* Σ_0 *sous des angles droits*, car les directions MF_1, MF_2 étant celles de deux tangentes conjuguées de la sphère, sont orthogonales.

Dans le cas où Σ est de révolution, à la propriété des couples de foyers associés des congruences C d'être *équidistants des points correspondants* M *de* Σ, s'ajoute une propriété en quelque sorte duale des plans focaux : *les plans focaux relatifs à deux foyers associés sont symétriques par rapport au plan tangent au point correspondant* M *de* Σ.

Pour établir cette nouvelle propriété, il suffit de montrer que les directions des tangentes aux images sphériques des développables, sont bissectées, par la direction $(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2)$ de la perpendiculaire MI au rayon (u, v) de C, et par la direction $(\mathrm{X}_3, \mathrm{Y}_3, \mathrm{Z}_3)$ de la normale en M à la surface Σ.

Le calcul [au moyen des relations (3)] des coefficients de l'équation (5), qui définit ces développables moyennant les hypothèses

$$\mathrm{E} = 1, \qquad \sqrt{\mathrm{G}}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} = 0, \qquad \sqrt{\mathrm{G}} + \frac{\partial u}{\partial} =$$

relatives aux congruences particulières actuelles, fournit sans difficulté l'équation

$$\mathrm{D}\,du^2 - \mathrm{D}''\,dv^2 = 0. \tag{15}$$

(15) définit les développables de C *quelle que soit la forme prise par* Σ au cours d'une déformation de celle-ci. Mais le cas qui nous intéresse actuellement où Σ a la forme de révolution permet, notons-le, de faire la remarque suivante. On a alors $\mathrm{DD}'' = \mathrm{KG}$ (K étant la courbure totale de Σ), et l'on voit que *les développables de* C *ne sont réelles* ($\mathrm{DD}'' > 0$) *que dans les régions de* C *correspondant aux zones de* Σ *pour lesquelles la courbure* K *est positive*. Ainsi, si Σ est une sphère ou l'une quelconque de ses déformées révolutives, toutes les congruences C associées ont leurs développables réelles; si Σ est une surface pseudosphérique de révolution, les congruences C ont toutes leurs développables imaginaires.

Cela étant, les paramètres directeurs des tangentes aux images sphériques des développables issues du rayon $\mathrm{D}(u, v)$ de C sont $d\mathrm{X}_1$, $d\mathrm{Y}_1$, $d\mathrm{Z}_1$, les différentielles étant prises successivement dans les deux directions définies par (15), soit

$$\frac{du}{dv} = \sqrt{\frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}}}, \qquad \frac{du}{dv} = -\sqrt{\frac{\mathrm{D}''}{\mathrm{D}}}. \tag{16}$$

On a

$$d\mathrm{X}_1 = \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial u}\,du + \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial v}\,dv, \qquad d\mathrm{Y}_1 = \ldots, \qquad d\mathrm{Z}_1 = \ldots,$$

soit en tenant compte des relations (2) du n° 1 où l'on a remplacé E par 1 et, puisque le réseau coordonné (parallèles et méridiens) est conjugué, D′ par zéro

$$d\mathrm{X}_1 = \mathrm{D}\mathrm{X}_3\,du + \frac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_2\,dv, \qquad d\mathrm{Y}_1 = \ldots, \qquad d\mathrm{Z}_1 = \ldots.$$

Les relations (16) montrent alors que l'on peut prendre, pour paramètres directeurs des tangentes aux images sphériques des développables de C, les quantités (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ ayant les expressions

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\mathrm{DD}''}\,\mathrm{X}_3 + \dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_2, & \alpha' = \sqrt{\mathrm{DD}''}\,\mathrm{X}_3 - \dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}\mathrm{X}_2, \\ \beta = \sqrt{\mathrm{DD}''}\,\mathrm{Y}_3 + \ldots\ldots, & \beta' = \sqrt{\mathrm{DD}''}\,\mathrm{Y}_3 - \ldots\ldots, \\ \gamma = \ldots\ldots\ldots, & \gamma' = \ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{17}$$

On déduit des relations (17) que l'angle des directions (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ est bissecté par les directions $(\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Z}_2)$, $(\mathrm{X}_3, \mathrm{Y}_3, \mathrm{Z}_3)$. Il en résulte, comme on l'avait annoncé, que les plans focaux issus d'un rayon quelconque D de C sont *symétriques* par rapport au plan tangent correspondant de Σ.

Si θ est l'angle que chacun des plans focaux fait avec le plan tangent, on voit d'ailleurs que

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\dfrac{\partial \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}}{\sqrt{\mathrm{DD}''}},$$

soit, en remplaçant $\sqrt{G}$ par U conformément à la forme (14) du ds^2 de Σ, et en introduisant la courbure totale de Σ $\left(K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{U''}{U}\right)$

$$\text{tg}\theta = \frac{U'}{\sqrt{-UU''}}. \tag{18}$$

L'angle 2θ des plans focaux ne dépend que de u; il est le même pour tous les rayons de C relatifs aux points d'un même parallèle de Σ.

L'expression (18) de $\text{tg}\theta$ permet aussitôt de déterminer les surfaces Σ de révolution pour lesquelles les congruences C associées sont *à angle des plans focaux constants*. Si l'on pose

$$\text{tg}\theta = \frac{1}{m} = \text{const.},$$

on a pour ces surfaces

$$\frac{U'}{\sqrt{-UU''}} = \frac{1}{m}.$$

L'intégration est immédiate et donne

$$U = (cu + d)^{\frac{1}{m^2+1}}.$$

En changeant les paramètres u, v sur Σ on peut prendre $U = u^{\frac{1}{m^2+1}}$, de sorte que les surfaces de révolution Σ donnant des congruences C à angle des plans focaux constant sont les surfaces d'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2 = du^2 + u^\alpha dv^2,$$

où α est un nombre arbitraire (compris entre 0 et 2 pour la réalité des plans focaux). L'angle des plans focaux est défini par

$$\text{tg}\theta = \frac{1}{m} = \sqrt{\frac{\alpha}{2-\alpha}}.$$

Un cas particulier intéressant est celui où $\alpha = 1$. On a alors

$$ds^2 = du^2 + u\,dv^2,$$

et la surface Σ est *une forme révolutive des développées de surfaces minima*.

L'angle 2θ des plans focaux des congruences C associées à ces surfaces particulières est droit, et, réciproquement, l'orthogonalité des plans focaux dans une congruence C du type actuel, exige que la surface de révolution correspondante Σ soit une forme révolutive des développées de surfaces minima.

Les congruences C sont donc ici normales, et par suite, comme on l'a rappelé dans l'Introduction, *restent normales au cours d'une déformation arbitraire de* Σ. On est ainsi conduit à énoncer le résultat suivant qui fournit une propriété *caractéristique* des développées de surfaces minima.

Les surfaces Σ *auxquelles on peut associer des congruences normales, formées de droites situées dans leurs plans tangents et invariablement liées à ces plans, telles qu'au cours d'une déformation arbitraire de* Σ :

a. les points centraux restent fixes sur leurs rayons respectifs;

b. deux foyers associés quelconques restent équidistants du point correspondant M de Σ, *sont les surfaces* Σ *applicables sur les développées de surface minima.*

A chaque surface Σ applicable sur une développée de surface minima, on peut attacher ∞^1 congruences jouissant des deux propriétés *a* et *b*, et l'on a vu plus haut par quelle construction géométrique on pouvait les obtenir.

Sur les surfaces normales à l'une quelconque des ∞^1 congruences précédentes, les lignes de courbure, qui correspondent au réseau conjugué de Σ d'équation (15), se correspondent entre elles, et les surfaces ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

6. *Congruences normales C arbitrairement déformables avec invariance des points centraux sur les rayons correspondants.* — Nous allons maintenant envisager le problème général de la recherche des congruences normales, dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ (à déterminer) et invariablement liés à ces plans tangents, les points centraux relatifs aux différents rayons ne cessant, comme dans les congruences C dont il a été question dans les numéros qui précèdent, de rester invariablement liés aux plans tangents dans une déformation arbitraire de Σ.

Les congruences répondant à la question seront des congruences C spéciales (que nous continuerons à appeler C); leurs rayons D seront parallèles aux tangentes à une famille de géodésiques ($v = \text{const.}$) de la surface Σ (d'élément linéaire $ds^2 = du^2 + G\,dv^2$); ces rayons seront définis, comme on l'a vu, par l'expression

$$\overline{MI} = a = V\sqrt{G} \qquad (V = \text{fonction arbitraire de } v)$$

de la distance du point M de Σ au point où le rayon correspondant D coupe la tangente à la courbe $u = \text{const.}$, et, pour obtenir les congruences cherchées, il suffira d'exprimer la condition d'orthogonalité des plans focaux.

Cette condition se traduit par l'égalité des coefficients f et f' donnés par les formules (3) du n° 1. Si, dans les expressions de f et f', on remplace E par 1 et a par $V\sqrt{G}$, et si l'on forme l'équation $f - f' = 0$, on obtient, K étant la courbure totale de Σ

$$V\left(KG - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) = 0.$$

$V = 0$ correspond aux congruences normales admettant Σ pour nappe focale.

En annulant le second facteur après avoir remplacé K par son expression $\left(K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}\right)$, on obtient l'équation définissant les surfaces Σ dont les

plans tangents portent les rayons des congruences cherchées. Cette équation est

$$\sqrt{G}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 = 0,$$

soit

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} = 0,$$

et l'on en déduit

$$G = \varphi(v)u + \psi(v).$$

$\varphi(v)$ et $\psi(v)$ étant des fonctions arbitraires de v.

Le ds^2 des surfaces Σ est donc

$$ds^2 = du^2 + [\varphi(v)u + \psi(v)]\,dv^2,$$

en changeant le paramètre v, ce ds^2 prend la forme

$$ds^2 = du^2 + [u + \psi(v)]\,dv^2, \tag{19}$$

caractéristique des surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur isotrope.

Toute surface de cette espèce fournit une infinité de congruences C que l'on obtient, une fois l'élément linéaire mis sous la forme (19) en menant, dans le plan tangent en chaque point M, la parallèle à la tangente à la géodésique $v = \text{const.}$ issue de M par le point I de la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ tel que $\overline{MI} = a = V\sqrt{u + \psi(v)}$; V est une fonction arbitraire de v.

Pour $\psi(v) = \text{const.}$, on obtient les congruences normales C attachées aux surfaces applicables sur les développées de surfaces minima, dont il a été question au numéro précédent.

Le problème que nous nous étions posé est complètement résolu, et sa solution nous conduit à énoncer cette propriété caractéristique des surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur isotrope :

Abstraction faite de la déformation d'une congruence normale quelconque par déformation de l'une ou l'autre de ses nappes focales, les surfaces applicables sur les surfaces réglées à plan directeur isotrope sont les seules auxquelles on peut associer des congruences normales C, *formées de droites situées dans leurs plans tangents et invariablement liées à ces plans, jouissant de la propriété que les points centraux relatifs à leurs différents rayons restent invariablement liés aux plans tangents correspondants au cours d'une déformation arbitraire de la surface.*

En tant que congruences arbitrairement déformables avec invariance des points centraux sur leurs rayons respectifs, les congruences normales C qui viennent d'être déterminées jouissent de la propriété générale signalée au n° 3, suivant laquelle leurs développables ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de la surface Σ dont les plans tangents contiennent les différents

rayons, de correspondre à un réseau conjugué de Σ. Les surfaces S orthogonales aux rayons d'une congruence C attachée à Σ (dont les points supposés fixés sur les rayons correspondants ne cessent, comme l'on sait, d'être distribués sur une surface normale à C quand Σ se déforme) sont donc telles que *leurs lignes de courbure correspondent à un réseau conjugué de* Σ, *la propriété subsistant dans une déformation arbitraire de* Σ.

Si le ds^2 de Σ a la forme particulière envisagée par Bianchi signalée dans l'Introduction

$$ds^2 = du^2 + \left(u - \frac{c}{2} + c\,e^{-2v}\right) dv^2,$$

il suffit, comme on le constate sans peine, de prendre, dans la formule qui fixe les rayons d'une congruence C associée à $\Sigma\left[\overline{\mathrm{MI}} = a = \mathrm{V}\sqrt{u + \psi(v)}\right]$, la fonction V égale à l'unité $\left(\overline{\mathrm{MI}} = a = \sqrt{\mathrm{G}} = \sqrt{u - \frac{c}{2} + ce^{-2v}}\right)$, pour que parmi les surfaces orthogonales aux rayons de C figure une surface minima $(\mathfrak{M})$ restant minima dans toute déformation de Σ. $(\mathfrak{M})$ est le lieu des points centraux ω sur les différents rayons de C. Sur un rayon quelconque $\mathrm{D}(u, v)$ ω est défini par la formule $(7')$ du n° 2 qui, avec les formes actuelles de V et de G, donne

$$\overline{\mathrm{I}\omega} = -u + \frac{c}{2} + \frac{1}{4}.$$

Dans ce cas, on a cette circonstance particulière que *les différents réseaux conjugués de* $(\mathfrak{M})$ *correspondent aux différents réseaux conjugués de* Σ, *la correspondance subsistant dans toute déformation de* Σ.

7. *Congruences générales arbitrairement déformables avec réseau invariant associé.* — Les congruences C dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents, pour lesquelles les points centraux restent fixes dans les plans tangents correspondants lorsque Σ se déforme arbitrairement, sont telles, comme nous l'avons vu au n° 3, d'une part que les droites joignant le point de contact M d'un plan tangent quelconque de Σ aux foyers F_1, F_2 du rayon de C situé dans ce plan soient constamment conjuguées sur Σ au cours d'une déformation arbitraire de la surface, et d'autre part que ces mêmes droites MF_1, MF_2 partagent harmoniquement, dans n'importe quelle configuration de Σ déformée, les tangentes en M d'un réseau invariant de Σ.

Nous allons étudier maintenant, d'une façon générale, le problème de la recherche des congruences C, dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ et invariablement liés à ces plans tangents, les droites MF_1, MF_2 joignant un point quelconque M de Σ aux foyers F_1, F_2 du rayon correspondant de C *ne cessant, au cours d'une déformation arbitraire de* Σ, *de partager harmoniquement les tangentes en* M *d'un réseau invariant de* Σ.

Le résultat auquel nous allons parvenir est assez remarquable.

Quelle que soit la surface Σ, il existe *deux* familles de congruences C (C_1 et C_2) répondant à la question. L'une des familles, C_1, est constituée par les congruences générales déterminées par Ribaucour et signalées au n° 3. L'autre famille, C_2, peut être caractérisée par une circonstance géométrique analogue à celle qui définit les congruences étudiées dans les numéros précédents (fixité du point central sur chaque rayon). Pour les congruences C_2, la fixité affecte l'*un* des deux foyers F_1, F_2 (à l'exclusion de l'autre) : *l'une des nappes focales de* C_2 *est toujours constituée par les mêmes points des plans tangents de* Σ *lorsque* Σ *se déforme arbitrairement.*

En ce qui concerne les congruences C_1. M. J. Drach, dans un travail antérieur (¹), a établi l'existence d'un réseau invariant, harmonique au réseau conjugué de Σ de tangentes MF_1, MF_2. M. Drach a remarqué que si M se déplace sur l'une ou l'autre des deux courbes du réseau invariant relatif à une congruence C_1, le déplacement du point où la tangente en M à la courbe envisagée coupe le rayon D de C_1 situé dans le plan tangent en M à Σ, s'effectue normalement à la perpendiculaire MI menée de M à D. Cette remarque fournit, pour les congruences C_1, une définition géométrique très simple du réseau invariant associé.

Il restait à se demander dans quelle mesure l'existence du réseau invariant de M. Drach caractérisait les congruences C_1; c'est ce que la suite va nous montrer.

Nous continuerons à employer les mêmes notations : Σ est rapportée à un système orthogonal (u, v) $[ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2]$, le rayon D de la congruence C situé dans le plan tangent en M à Σ est perpendiculaire à la tangente à la courbe $u = \text{const.}$ au point I dont on désigne par $a(u, v)$ la distance au point M $(\overline{MI} = a)$, et les abscisses $\overline{IF_1}$, $\overline{IF_2}$ des foyers de D sont désignées respectivement par ρ_1 et ρ_2.

Les directions MF_1, MF_2 sont déterminées respectivement par

$$\frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\,\frac{\rho_1}{a}, \qquad \frac{du}{dv} = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{E}}\,\frac{\rho_2}{a},$$

et leur ensemble est défini par l'équation

$$a^2 E\,du^2 - a\sqrt{EG}\,(\rho_1 + \rho_2)\,du\,dv + G\rho_1\rho_2\,dv^2 = 0,$$

qui, en tenant compte des expressions (G) et (G') de $\rho_1 + \rho_2$ et de $\rho_1\rho_2$ données au n° 1, s'écrit

$$(20)\quad a\left(\sqrt{G}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,D + \sqrt{E}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,D'\right)du^2 + \left[G\left(\sqrt{G} + \frac{\partial u}{\partial v}\right)D + a\sqrt{E}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,D'' + \sqrt{G}\left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\,\frac{\partial u}{\partial u}\right)D'\right]du\,dv - G\left[\left(\sqrt{G} + \frac{\partial u}{\partial v}\right)D' - \frac{\partial u}{\partial u}\,D''\right]dv^2 = 0.$$

(¹) J. Drach, *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* [*C. R. Cong. Soc. sav.*, 1925 (Sciences)].

Donnons-nous un réseau invariant dans une déformation arbitraire de Σ par son équation quadratique

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0, \tag{21}$$

où A, B, C ne dépendent que de u et v.

Exprimons que les réseaux (20) et (21) se divisent harmoniquement.

Si nous désignons par Δ, Δ', Δ'' les coefficients de (20), la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$\Delta C - \Delta' B + \Delta'' A = 0,$$

soit

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}D - \sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D'\right)C \\ &- \left[G\left(\sqrt{G} - \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)D - \alpha\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}D - \sqrt{G}\left(\alpha\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)D'\right]B \\ &+ G\left[\left(\sqrt{G} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)D' - \frac{\partial\alpha}{\partial u}D''\right]A = 0. \end{aligned}$$

La relation précédente est linéaire et homogène en D, D', D''. Pour qu'elle subsiste dans toute déformation de la surface Σ, il faut et il suffit que les coefficients de D, D', D'' soient identiquement nuls. Ceci nous conduit, pour la détermination des congruences cherchées, au système

$$\left\{\begin{aligned} G\left(\sqrt{G} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)B - \alpha\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}C &= 0, \\ G\left(\sqrt{G} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right)A - \sqrt{G}\left(\alpha\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)B + \alpha\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}C &= 0, \\ G\frac{\partial\alpha}{\partial u}A + \alpha\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}B &= 0, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

dans lequel, pour une surface Σ donnée (E et G connus), la fonction $\alpha(u, v)$ doit être choisie de manière à assurer la compatibilité en A, B, C. Cette compatibilité s'exprime par l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial v}\right) & -\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \\ \sqrt{G} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial v} & -\sqrt{G}\left(\alpha\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \sqrt{G}\dfrac{\partial\alpha}{\partial u}\right) & \sqrt{E}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial u} & \alpha\sqrt{E}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développée, s'écrit

$$\left(\sqrt{G}\frac{\partial\alpha}{\partial u} - \alpha\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)\left[\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial\alpha}{\partial v}\right) + \sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right] = 0. \tag{23}$$

Les deux familles C_1, C_2 solutions du problème, annoncées au début de ce numéro, correspondent à la nullité de l'un ou l'autre des deux facteurs du premier membre de l'équation (23).

Congruences C_1. — Elles sont déterminées par l'équation

$$a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}-\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}=0, \tag{24}$$

qui n'est autre que l'équation obtenue au n° 3, définissant les congruences de Ribaucour pour lesquelles MF_1 et MF_2 sont des couples de directions conjuguées de Σ. Le réseau invariant, auquel le réseau conjugué de tangentes MF_1, MF_2 reste constamment harmonique au cours de la déformation de Σ, est défini par l'équation (21) où A, B, C ont les expressions données par la résolution du système compatible (22).

Congruences C_2. — Elles sont déterminées par l'équation

$$\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)+\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}=0, \tag{25}$$

qui, pour une surface Σ donnée rapportée à un système orthogonal quelconque (u, v), définit a par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre.

Au sujet de l'équation (25) nous pouvons faire la remarque suivante qui nous sera utile plus loin. Considérons les coefficients f et f' de la première forme fondamentale d'une congruence quelconque, dont les rayons sont disposés dans les plans tangents de Σ perpendiculairement aux tangentes aux courbes $u=\text{const}$. Ces coefficients sont définis par les formules (3) du n° 1; formons la différence $f'-f$; nous obtenons

$$f'-f=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)+\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}-aK\sqrt{EG},$$

K étant la courbure totale de Σ.

On déduit de là que l'équation (25) peut s'écrire

$$f'-f=aK\sqrt{EG}. \tag{26}$$

On voit sous cette forme que si l'on exclut les surfaces Σ développables ($K=0$), et, pour les surfaces quelconques, le cas où $a=0$ qui correspond aux congruences normales admettant Σ pour nappe focale, on ne pourra jamais avoir, pour une congruence C_2, $f'-f=0$. Autrement dit la famille des congruences C_2 *ne renferme aucune congruence normale*. Les congruences C_1 de Ribaucour, au contraire, peuvent être normales, et il résulte de ce qui vient d'être dit que :

Pour qu'une congruence *normale* dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface Σ soit du type de Ribaucour, *il faut et il suffit, que le*

réseau de Σ *dont les tangentes en chaque point* M *sont les droites joignant* M *aux foyers du rayon situé dans le plan tangent en* M, *divise harmoniquement un réseau invariant dans une déformation arbitraire de* Σ.

Il est clair que pour certains ds^2 spéciaux il peut y avoir des congruences C (nécessairement non normales d'après ce qui précède) appartenant à la fois aux deux familles C_1 et C_2. La détermination de ces ds^2, qui résulte de l'intégration du système [(24), (25)], n'exige qu'une quadrature. On peut se donner arbitrairement G, et E se trouve défini par

$$E = -\int^{v} \frac{2V\sqrt{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}{\sqrt{G}(1+V')+V\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}}\,dv,$$

où V est une fonction arbitraire de v.

L'expression $a = V\sqrt{G}$ définit alors une congruence C attachée au ds^2 obtenu. et appartenant à la fois aux deux types C_1 et C_2.

8. *Propriétés des congruences* C_2. — Si l'on résout le système (22) dans l'hypothèse (25) relative aux congruences C_2, on obtient pour les coefficients de l'équation

$$A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0$$

définissant le réseau invariant attaché à ces congruences

$$\frac{A}{a^2\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}} = \frac{B}{-aG\frac{\partial a}{\partial u}} = \frac{C}{\frac{1}{\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}G^2\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2}. \tag{27}$$

Les relations (27) montrent que l'on a

$$B^2 - AC = 0,$$

et que, par suite, pour les congruences C_2 *les deux familles de courbes du réseau invariant de* Σ *sont confondues.*

Sur la surface Σ relative à une congruence C_2, la tangente MT en un point quelconque M, aux deux courbes confondues du réseau invariant passant par ce point, est définie par

$$\frac{du}{dv} = -\frac{B}{A},$$

soit d'après (27)

$$\frac{du}{dv} = \frac{G\frac{\partial a}{\partial u}}{a\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}.$$

MT coupe le rayon D de C_2 situé dans le plan tangent en M à Σ, en un point P dont la position est définie, dans le plan tangent, par ses coordonnées (ξ, η)

relatives aux axes constitués par les tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, qui sont respectivement

$$(P)\begin{cases} \xi = \dfrac{\sqrt{G}\dfrac{\partial u}{\partial u}}{\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}, \\ \eta = u. \end{cases}$$

P reste *fixe* dans le plan tangent en M lorsque Σ se déforme arbitrairement.

De là résulte aussitôt la circonstance annoncée au numéro précédent relative à la fixité, sur chaque rayon d'une congruence C_2, de l'*un* des deux foyers F_1, F_2 portés par ce rayon, au cours d'une déformation arbitraire de Σ. Les deux droites MF_1, MF_2 divisant harmoniquement la droite double MT, l'une de ces droites, soit MF_1, est confondue avec MT, et le foyer F_1, intersection de MT et de D, est le point P ci-dessus dont la position reste invariable, dans le plan tangent en M, par déformation arbitraire de Σ. La position du foyer fixe F_1 sur chaque rayon D est définie, au moyen de sa distance au point I où D coupe la tangente à la courbe $u = \text{const.}$, par la formule

$$\overline{IF_1} = \rho_1 = \frac{\sqrt{G}\dfrac{\partial u}{\partial u}}{\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}.$$

Les congruences du type C_2 jouissent, comme l'on voit, de la propriété que si, dans une configuration particulière de Σ, on fixe dans leurs plans tangents les points constituant l'*une* des deux nappes focales, *la surface formée par l'ensemble de ces points ne cesse d'être l'une des deux nappes focales de* C_2 *lorsqu'on soumet* Σ *à une déformation arbitraire.*

Cette propriété est caractéristique des congruences C_2, et ne saurait évidemment avoir lieu pour les deux nappes focales simultanément.

Pour les congruences C appartenant à la fois aux types C_1 et C_2 signalées au n° 7, MF_1 et MF_2 sont deux tangentes conjuguées de Σ, et l'on voit que le réseau conjugué de Σ (de tangentes MF_1, MF_2) correspondant aux développables de C, est tel que l'*une des deux familles de courbes qui le constituent est invariante sur* Σ *au cours d'une déformation arbitraire de cette surface.*

On peut dire, si l'on veut, que les congruences C appartenant à la fois aux deux types C_1 et C_2 (que nous désignerons par C_{12}) jouissent de la propriété suivante : Si l'on envisage les ∞^1 rayons constituant l'une quelconque des développables de l'*une* des deux familles d'une congruence C_{12}, *ces* ∞^1 *rayons, supposés invariablement liés aux plans tangents correspondants de la surface* Σ *attachée à* C_{12}, *ne cessent, au cours d'une déformation arbitraire de* Σ, *de former dans chaque configuration une surface développable.*

Suivant une terminologie bien connue, les congruences C_{12} mises en évi-

dence dans ce travail sont *arbitrairement déformables avec une famille de développables persistantes*.

Dans un Mémoire publié au *Bulletin des Sciences mathématiques* (¹), reproduisant à peu de choses près le contenu du Chapitre II de sa thèse : *Le problème général de la déformation avec réseau conjugué persistant*, M. S. Finikoff a fait une étude très détaillée des congruences susceptibles d'une déformation continue à un paramètre au cours de laquelle les deux familles de développables se conservent. Il n'existe pas de congruences dont les *deux* familles se conservent dans *toutes* les déformations d'une surface aux plans tangents de laquelle leurs rayons seraient invariablement liés. En ce qui concerne le problème de la déformation *arbitraire* avec persistance de l'*une* des deux familles de développables, M. Finikoff a établi, qu'en dehors des congruences admettant une surface quelconque Σ pour surface focale, qui se déforment évidemment par déformation arbitraire de Σ avec conservation de l'une des deux familles de développables, il existe une solution du problème formée de congruences dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface arbitraire Σ, la généralité de la solution, pour Σ donnée, étant celle de deux fonctions arbitraires d'un argument.

La considération des congruences C_{12} du Mémoire actuel nous montre qu'il y a lieu de compléter le résultat précédent. En dehors des congruences à développables persistantes dans une série dont les rayons *sont perpendiculaires aux plans tangents de la surface déformée*, il existe des congruences arbitrairement déformables avec persistance de l'*une* des deux familles de développables dont les rayons *sont situés dans les plans tangents de la surface déformée :* les congruences C_{12} nous offrent un exemple de ce nouveau type de solution.

Les surfaces Σ, dont les plans tangents contiennent les rayons des congruences arbitrairement déformables avec persistance d'une série de développables du type C_{12} ont un ds^2 de la forme

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

où G est une fonction arbitraire de u, v, et où E est donné par la quadrature indiquée au n° 7

$$E = -\int \frac{2V\sqrt{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}{\sqrt{G}(1+V') + V\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}}\,dv,$$

V étant une fonction arbitraire de la seule variable v.

A chaque surface Σ admettant un ds^2 de la forme précédente est attachée une famille de congruences dépendant d'un paramètre, arbitrairement déformables avec conservation de l'une des deux familles de développables, formées de

(¹) S. Finikoff, *Déformation d'une congruence rectiligne avec développables persistantes* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. LIII. 1929).

droites situées dans les plans tangents de Σ. Ces congruences sont les congruences C_{12}, dont les rayons sont perpendiculaires aux tangentes aux courbes $u = \text{const.}$, aux points I dont les distances aux points de contact sont définies par

$$\overline{MI} = \mathcal{V}\sqrt{G},$$

$\mathcal{V}$ étant une solution quelconque de l'équation différentielle du premier ordre

$$\frac{\partial E}{\partial v} = -\frac{2\mathcal{V}\sqrt{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2}{\sqrt{G}(1+\mathcal{V}')+\mathcal{V}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v}},$$

E ayant l'expression ci-dessus rappelée.

L'équation différentielle précédente, qui s'écrit

$$\frac{1+\mathcal{V}'}{\mathcal{V}} = \frac{1+V'}{V},$$

donne pour $\mathcal{V}$ l'expression

$$\mathcal{V} = V\left[c\,e^{\int\frac{dv}{V}}+1\right] \qquad (c = \text{const. arbitraire}),$$

et les valeurs de $\overline{MI}$, définissant par rapport à Σ les ∞^1 congruences C_{12} à développables d'une famille persistantes, sont

$$\overline{MI} = V\sqrt{G}\left[c\,e^{\int\frac{dv}{V}}+1\right].$$

9. *Congruences générales à rayons situés dans les plans tangents d'une surface arbitrairement déformables avec persistance d'une famille de développables.* — Il convient de se demander si le problème de la détermination des congruences arbitrairement déformables (à rayons situés dans les plans tangents de la surface Σ déformée) avec permanence des développables de l'une des deux familles, admet d'autres solutions que celle constituée par les congruences C_{12} dont il vient d'être question. La recherche est intéressante; le problème peut être résolu complètement, et sa solution générale est, comme on va le voir, constituée *par l'ensemble des congruences* C_2 *attachées à une surface* Σ *arbitraire*. Ainsi se trouvera établie, pour ces congruences, une nouvelle et remarquable propriété caractéristique.

Reportons-nous à l'équation définissant les développables d'une congruence C dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface quelconque Σ

$$\Delta\,du^2 + \Delta'\,du\,dv + \Delta''\,dv^2 = 0, \tag{28}$$

où Δ, Δ' et Δ'' ont les expressions données au n° 3.

Il s'agit d'exprimer qu'il existe deux fonctions A et B des variables u et v, telles que l'une des deux familles de développables de la congruence C soit définie, quelle que soit la configuration obtenue en déformant Σ, par l'équation différentielle

$$\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}. \tag{29}$$

Écrivons que l'équation (28) [où Δ, Δ', Δ'' ont les expressions données au n° 3] admet la solution (29). Nous obtenons ainsi une relation finie entre les coefficients D, D', D'' de la deuxième forme fondamentale de Σ. Si dans cette relation on remplace D'' par sa valeur déduite de l'équation de Gauss

$$D'' = \frac{KEG + D'^2}{D},$$

on obtient une relation entre D et D' qui, pour que la congruence C admette constamment l'équation (29) pour l'une de ses deux familles de développables, et soit par suite à développables persistantes dans une déformation arbitraire de Σ, devra être une identité en D, D'. Cette relation, que l'on forme sans difficulté, est la suivante

$$\begin{aligned}
(30)\quad & \frac{A}{E\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left[A\frac{\partial a}{\partial u}+B\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)\right]D^3 \\
& +\left(\frac{A^2}{EG}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}+\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u}\right)\right. \\
& \quad +\frac{ABa}{E^2}\left[\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)\right. \\
& \qquad \left.\left.+\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u}-\frac{\sqrt{EG}}{G}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2\right]+\frac{B^2}{E\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)\right\}D^2D' \\
& +\left[\frac{A^2a}{G\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2+\frac{AB}{E\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial a}{\partial u}-\frac{B^2a}{E\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2+\frac{B^2}{E\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G}+\frac{\partial a}{\partial v}\right)\right]DD'^2 \\
& \quad +\frac{aB}{EG\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left[A\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-B\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]D'^3 \\
& \quad +\frac{aBK}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left[A\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-B\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]D \\
& \quad +\frac{aBK}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left[A\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}-B\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]D'=0.
\end{aligned}$$

Pour alléger la discussion nous supposerons $K\neq 0$ (surface Σ non développable) : les résultats généraux auxquels nous parviendrons en supposant Σ quelconque s'appliquent d'ailleurs, comme on le constate aussitôt, au cas où Σ est développable. Nous négligerons en outre l'hypothèse où l'on aurait

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0,$$

qui ramène au cas où Σ est développable. Enfin nous exclurons le cas banal où $a=0$, qui correspond à la déformation de l'une des nappes focales de la congruence, déformation qui a lieu avec persistance de celle des deux familles de développables dont les arêtes de rebroussement sont sur la nappe focale déformée.

Cela étant, commençons par envisager les cas où l'on aurait soit $A=0$, soit $B=0$.

Si $A = 0$, l'expression du coefficient de D montre que l'on a nécessairement $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0$. G est donc une fonction de v, que l'on peut supposer réduite à l'unité, le ds^2 de Σ ayant alors la forme géodésique $ds^2 = E\,du^2 + dv^2$. On constate que dans ce cas tous les coefficients de la relation (30) sont nuls sous la seule condition $\frac{\partial a}{\partial v} = -1$, soit $a = -v + \varphi(u)$. On obtient ainsi une première famille de solutions du problème posé, dont la construction géométrique est la suivante :

Donnons-nous sur une surface quelconque Σ une famille de ∞^1 géodésiques, et envisageons les ∞^1 surfaces développantes de Σ suivant cette famille de géodésiques. Associons à chaque géodésique γ de la famille considérée une développante Δ de Σ, et cela d'après une loi arbitraire. Les tangentes de γ déterminent une ligne de courbure sur Δ, et si l'on considère les tangentes D à Δ normales à cette ligne de courbure, ces droites (qui sont évidemment situées dans les plans tangents à Σ le long de γ) engendrent une développable (δ). L'ensemble des développables (δ) relatives aux ∞^1 développantes Δ envisagées, constitue une congruence C qui fournit précisément la solution annoncée. Il est clair que la famille des développables (δ) de C persiste dans une déformation arbitraire de Σ.

La condition

$$\Theta = \sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right) + \sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u} = 0 \tag{31}$$

qui définit [équation (25) du n° 7] les congruences du type C_2 étant vérifiée pour les congruences C que l'on vient d'obtenir, ces congruences appartiennent au type C_2. Le foyer, dont la fixité sur chaque rayon au cours d'une déformation arbitraire de Σ caractérise le type C_2, est d'ailleurs le point d'intersection du rayon avec la tangente à la géodésique $u = \text{const.}$

Supposons maintenant $B = 0$. Le coefficient de DD'^2 dans (30) montre que l'on a $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0$, et que par suite les rayons de C sont parallèles aux tangentes d'une famille de géodésiques de Σ. Tous les coefficients de (30) sont alors nuls sauf celui de D^3. Pour que ce dernier coefficient soit nul, il faut et il suffit que l'on ait, soit $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0$, ce qui ramène aux surfaces Σ développables, soit $\frac{\partial a}{\partial u} = 0$, c'est-à-dire $a = \varphi(v)$. On obtient ainsi une solution formée de droites D parallèles aux tangentes d'une famille de géodésiques de Σ, les droites D parallèles aux tangentes d'une même géodésique étant à la même distance de ces tangentes, cette distance variant d'après une loi arbitraire quand on passe d'une géodésique à une autre. Les congruences C ainsi obtenues vérifient la condition (31); ce sont encore des congruences du type C_2; le foyer fixe sur chaque rayon est encore ici situé sur la tangente à la courbe $u = \text{const.}$

Les cas précédents, conduisant tous à des congruences particulières arbi-

trairement déformables avec permanence d'une série de développables du type C_2, étant écartés, plaçons-nous dans le cas général $A \neq 0$, $B \neq 0$. La nullité simultanée des coefficients de D'^3, D, D' dans (30) exige que l'on ait

$$A\sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - B\sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0. \tag{32}$$

$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$ n'étant pas nul (car alors $\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$ le serait aussi et l'on tomberait dans le cas exclu plus haut des surfaces Σ développables), en annulant le coefficient de D^3 on obtient la condition

$$A\frac{\partial a}{\partial u} + B\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right) = 0, \tag{33}$$

dont la compatibilité en A et B avec (32) s'exprime par la relation

$$\Theta \equiv \sqrt{E}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\left(\sqrt{G} + \frac{\partial a}{\partial v}\right) + \sqrt{G}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial u} = 0, \tag{31}$$

qui nous montre déjà que, si le problème admet des solutions, ces solutions *sont nécessairement des congruences du type* C_2, tout comme dans les cas particuliers précédemment examinés.

Moyennant (31) les coefficients des deux derniers termes restant à considérer dans la relation (30), à savoir les termes en D^2D' et DD'^2, sont nuls.

En définitive, la seule condition à laquelle doive satisfaire une congruence C pour être arbitrairement déformable avec persistance d'une famille de développables est la condition (31) [$\Theta \equiv 0$] qui exprime que *la congruence est une congruence* C_2.

Il résulte de l'étude qui précède que, pour une congruence dont les rayons sont situés dans les plans tangents d'une surface arbitraire Σ et invariablement liés à ces plans tangents, *la fixité de l'un des foyers sur chaque rayon au cours d'une déformation arbitraire de* Σ *entraîne la persistance de l'une des deux familles de développables et inversement.*

Les congruences jouissant de la double propriété précédente sont les congruences C_2 du n° 7; en ce qui concerne la famille de développables persistantes d'une telle congruence C_2, il y a lieu de faire la remarque suivante. Cette famille est constituée par les développables ayant leurs arêtes de rebroussement sur la nappe focale de C_2 portant les foyers *mobiles* sur les différents rayons. Il est en effet bien connu que, si le plan tangent en un point M de Σ se déplace de façon que le rayon D de C_2 situé dans ce plan décrive, soit l'élément de développable relatif au foyer F_1 de D, soit l'élément de développable relatif au second foyer F_2, les déplacements correspondants du point M ont lieu dans les directions MT_1, MT_2 respectivement conjuguées de MF_1, MF_2. Or, si F_1 est le foyer *fixe* sur D au cours de la déformation de Σ, il est clair que l'élément de développable persistant ne saurait être celui relatif à F_1, sans quoi MF_1

et MT_1 seraient deux directions conjuguées *invariables dans le plan tangent en* M *au cours de la déformation de* Σ, et les différents couples de directions MF_1, MT_1 relatifs aux différents points de Σ *définiraient un réseau conjugué persistant dans toute déformation de* Σ, ce que l'on sait être impossible. Les développables persistantes de C_2 sont donc bien, comme on l'a dit plus haut, celles dont les arêtes de rebroussement sont situées sur la nappe focale lieu des foyers mobiles F_2 de C_2.

Ces foyers mobiles F_2 peuvent d'ailleurs se déterminer très simplement pour chaque configuration de Σ, en exprimant que la direction MF_2, et la direction MT_2 invariante dans le plan tangent et définie [*voir*, par exemple, la relation (32)] par

$$\frac{du}{dv} = \frac{A}{B} = \frac{\dfrac{\partial G}{\partial u}}{\dfrac{\partial E}{\partial v}}$$

sont conjuguées.

On obtient ainsi pour la direction MF_2

$$\frac{\delta u}{\delta v} = -\frac{D' du + D'' dv}{D du + D' dv} = -\frac{D' \dfrac{\partial G}{\partial u} + D'' \dfrac{\partial E}{\partial v}}{D \dfrac{\partial G}{\partial u} + D' \dfrac{\partial E}{\partial v}},$$

et l'on en déduit pour la distance $\rho_2 = \overline{IF_2}$ du point $I(\overline{MI} = a)$ où D coupe la tangente à la courbe $u = \text{const.}$, l'expression

$$\rho_2 = -\frac{a\sqrt{E}\left(D' \dfrac{\partial G}{\partial u} + D'' \dfrac{\partial E}{\partial v}\right)}{\sqrt{G}\left(D \dfrac{\partial G}{\partial u} + D' \dfrac{\partial E}{\partial v}\right)}.$$

A titre de vérification on peut observer que cette valeur de ρ_2 est précisément celle que donnerait l'expression générale (6′) du produit $\rho_1\rho_2$ donnée au n° 1, où l'on aurait tenu compte de la relation (31) définissant les congruences du type C_2, et où l'on aurait remplacé l'abscisse ρ_1 du foyer fixe F_1 par son expression

$$\rho_1 = \frac{\sqrt{G}\dfrac{\partial a}{\partial u}}{\dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}$$

obtenue au n° 3.

Ayant ainsi précisé les rôles respectifs des deux nappes focales (F_1), (F_2) d'une congruence C_2 au cours d'une déformation arbitraire de la surface Σ associée, nous voyons que les congruences C_2 offrent un exemple curieux de déformation s'effectuant *avec persistance simultanée, des foyers portés par l'une des deux nappes focales, et des développables relatives à l'autre nappe focale.*

10. *Nouveaux invariants de déformation d'une surface arbitraire, attachés aux congruences* C_2. — Nous signalerons, pour terminer ce travail, une propriété relative à des éléments métriques invariants au cours d'une déformation

arbitraire d'une surface quelconque Σ, déduits de la considération des congruences C_2 attachées à Σ.

Envisageons l'expression du *paramètre moyen*, p, relatif au rayon générateur $D(u, v)$ d'une congruence quelconque, expression qui est comme l'on sait

$$p = \frac{f' - f}{\sqrt{E'G' - F'^2}},$$

où f, f' sont les coefficients habituels de la première forme fondamentale de la congruence, et E', F', G' les coefficients de sa deuxième forme (du ds^2 de sa représentation sphérique).

Pour une congruence du type C_2, on a, compte tenu de la relation (26) du n° 7,

$$p = \frac{a K \sqrt{EG}}{\sqrt{E'G' - F'^2}}.$$

Considérons dès lors, dans la famille des congruences C_2 attachées à une surface quelconque Σ, deux congruences quelconques C_2' et C_2'' relatives à un même réseau orthogonal de Σ (à rayons homologues parallèles), définies par deux valeurs différentes a' et a'' de la quantité a [solution de l'équation aux dérivées partielles (25) du n° 7] qui fixe les différents rayons dans les plans tangents de Σ.

Soient p' et p'' les paramètres moyens sur deux rayons homologues quelconques D' et D'' (relatifs à un même point M de Σ) de C_2' et de C_2''. Les différents couples de rayons homologues des deux congruences étant parallèles, C_2' et C_2'' ont la même représentation sphérique, et l'expression $\sqrt{E'G' - F'^2}$ a la même valeur pour D' et D''. L'expression (28) de p montre alors que, pour deux rayons homologues quelconques D' et D'' des congruences C_2', C_2'', on a

$$\frac{p'}{p''} = \frac{a'}{a''}, \tag{34}$$

d'où ce premier résultat :

Étant donnée une surface quelconque Σ *et une famille quelconque de congruences* C_2 *à rayons homologues parallèles attachées à* Σ, *les paramètres moyens des rayons homologues situés dans un même plan tangent à* Σ *sont proportionnels aux distances de ces rayons au point de contact du plan tangent.*

Si l'on observe maintenant que le second membre de (34), qui est le rapport de deux solutions quelconques de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (25) du n° 7, ne dépend pas de la deuxième forme fondamentale de Σ, on peut compléter le résultat précédent par le suivant :

Le rapport des paramètres moyens de deux rayons homologues dans deux congruences quelconques C_2 (*à rayons homologues parallèles*) *attachées à* Σ, *est un invariant de déformation pour* Σ.

LES DÉRIVÉES
DES FONCTIONS MÉROMORPHES
ET LA
THÉORIE DES DÉFAUTS

PAR M. HENRI MILLOUX.

INTRODUCTION.

L'attention a été attirée, il y a quelques années, sur les valeurs prises par les fonctions holomorphes ou méromorphes et leurs dérivées. Une propriété, pressentie par M. Montel, a été démontrée par M. Miranda. Sous sa forme la plus simple, cette propriété est la suivante :

Une famille de fonctions holomorphes dans un domaine où elles ne prennent pas la valeur 0 *et dont les dérivées ne prennent pas la valeur* 1, *est normale dans ce domaine.*

Peu après M. Miranda, M. Valiron (1) démontra à nouveau cette proposition et la compléta dans divers domaines, ainsi qu'un de ses disciples, M. Chi-Tai-Chuang.

Les méthodes employées par ces divers auteurs sont d'une nature un peu particulière; il ne semble pas qu'elles puissent être créatrices de propositions aussi précises que celles qui découlent, dans la théorie des fonctions méromorphes, de l'instrument très puissant que constitue la deuxième inégalité

(1) G. VALIRON, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 570, Hermann, édit., Paris, 1937).

fondamentale de R. Nevanlinna : on sait combien cette inégalité a rajeuni, rénové la théorie des fonctions méromorphes, et fait faire de nouveaux et importants progrès à cette théorie.

Or, il est parfaitement possible de donner une base du même genre à la théorie des fonctions méromorphes et de leurs dérivées. Dans un Mémoire récent (¹), j'ai établi l'inégalité

$$(A) \qquad T(r,f) < 2N(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{f'-1}\right) + S(r),$$

où le terme complémentaire $S(r)$ jouit des mêmes propriétés que celui de la deuxième inégalité de R. Nevanlinna; $f(x)$ est une fonction méromorphe au voisinage de l'origine.

Le Mémoire cité contient des extensions de l'inégalité (A) au cas où la fonction dérivée $f'(x)$ est remplacée par une combinaison linéaire et homogène de la fonction $f(x)$, et de ses dérivées successives, avec coefficients holomorphes. Je montre, en outre le parti que l'on peut tirer d'inégalités telles que (A), notamment dans l'étude d'une fonction méromorphe dans le cercle unité, n'y prenant pas plus de n fois la valeur o, pas plus de p fois la valeur infini, et dont la dérivée ne prend pas plus de q fois la valeur 1.

L'inégalité (A) permet de majorer l'indice caractéristique $T(r,f)$, connaissant trois indices de densité, dont deux relatifs à la fonction $f(x)$ et un à la dérivée $f'(x)$. Elle est l'homologue de la forme la plus simple et la plus usitée de l'inégalité de R. Nevanlinna.

Le premier but du présent Mémoire est de donner une inégalité homologue de la forme la plus générale de la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna; c'est-à-dire d'arriver à majorer l'indice caractéristique $T(r,f)$, connaissant un nombre quelconque d'indices de densité relatifs à la fonction $f(x)$, et un nombre quelconque d'indices de densité relatifs à la dérivée $f'(x)$. Nous trouverons notamment l'inégalité suivante :

$$(B) \qquad pqT(r,f) < \overline{N}(r,f) + q\sum_{i=1}^{p} N\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{i=1}^{q} N\left(r,\frac{1}{f'-b_j}\right) + S(r),$$

où $S(r)$ est en général négligeable devant $T(r,f)$, au même titre que dans la théorie de R. Nevanlinna. $\overline{N}(r,f)$ est l'indice *réduit* des pôles (c'est-à-dire compté comme si aucun de ceux-ci n'était multiple). Les constantes a_i sont finies et distinctes entre elles; les constantes b_j satisfont à la même propriété, et, de plus, aucune d'elles n'est nulle.

(¹) H. MILLOUX, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées. Extension d'un théorème de R. Nevanlinna. Applications* (*Actualités scientifiques et industrielles*, n° 888, Hermann, édit., Paris, 1940).

On remarquera en passant que si l'on fait $p=1$, $a_i=0$, $q=1$, $b_1=1$, on retrouve l'inégalité (A), améliorée notamment du fait de la suppression du coefficient 2 devant l'indice de densité relatif aux pôles de la fonction $f(x)$.

L'inégalité (B) et les inégalités dont elle est issue sont particulièrement favorables pour introduire les *défauts*. $f(x)$ étant une fonction méromorphe dans le plan, rappelons que le défaut de la constante a, pour la fonction $f(x)$, est la quantité

$$\text{(C)} \qquad \delta(a)=1-\overline{\lim}\frac{N\left(r,\frac{1}{f-a}\right)}{T(r,f)},$$

lorsque r augmente indéfiniment. Si cette quantité n'est pas nulle, on dit que a est une valeur *exceptionnelle* au sens de R. Nevanlinna (¹). De l'inégalité fondamentale de R. Nevanlinna, sous sa forme la plus générale, résulte que la somme des défauts, pour toutes les valeurs exceptionnelles, finies ou non, est au plus égale à 2.

Dans ce présent Mémoire, nous serons amenés à introduire non seulement les défauts des constantes a, pour la fonction $f(x)$, mais encore les défauts des constantes b, pour la fonction $f'(x)$. Mais comment calculer ces derniers défauts ? En appliquant la définition (C), où l'on remplace a par b, et f par f', nous avons le défaut au sens de R. Nevanlinna : ce sera, pour nous, le défaut *absolu*.

Il est aussi utile d'introduire une autre notion, celle de défaut *relatif*. Il s'agit de la quantité

$$1-\overline{\lim}\frac{N\left(r,\frac{1}{f'-b}\right)}{T(r,f)}.$$

On compare donc ici l'indice de densité $N\left(r,\frac{1}{f'-b}\right)$ non plus à l'indice caractéristique de la fonction dérivée $f'(x)$, mais à celui de la fonction génératrice $f(x)$. Ce défaut relatif n'est plus nécessairement compris entre 0 et 1 comme l'est tout défaut absolu. Nous étudions comparativement les deux défauts, et montrons qu'ils sont identiques dans certains cas.

Ces notions une fois précisées, on arrive tout naturellement au deuxième but de ce Mémoire : comparer la somme des défauts des valeurs a exceptionnelles pour la fonction $f(x)$, et la somme des défauts (absolus ou relatifs) des valeurs b exceptionnelles pour la fonction $f'(x)$.

Cette comparaison conduit à un certain nombre d'énoncés, de caractère simple. Citons, pour leur simplicité, deux d'entre eux; ils résultent d'énoncés plus généraux :

(¹) Dans tout ce Mémoire, quand il s'agira de valeurs exceptionnelles, il sera sous-entendu « au sens de Nevanlinna ».

1. *Si la fonction $f(x)$ admet l'infini comme valeur exceptionnelle à défaut maximum (donc égal à 1) et si elle admet au moins une autre valeur exceptionnelle finie (avec défaut quelconque), alors la fonction dérivée $f'(x)$ ne peut admettre de valeurs exceptionnelles finies, différentes de zéro, que si la somme de leurs défauts (absolus) est inférieure à 1.*

2. *Soit δ la somme des défauts de toutes les valeurs exceptionnelles, finies ou non, pour la fonction $f(x)$. Étant donnée une constante b, finie et différente de zéro, son défaut relatif vaut au maximum $2-\delta$,*

Les méthodes employées dans ce Mémoire peuvent s'appliquer à des études plus générales, par exemple au cas où l'on substitue, à la dérivée $f'(x)$, une combinaison linéaire et homogène de la fonction et de ses dérivées.

Une partie des résultats obtenus ici a été résumée dans une Note récente (1).

CHAPITRE I.

MAJORATION DE L'INDICE CARACTÉRISTIQUE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE CONNAISSANT DES INDICES DE DENSITÉ RELATIFS A LA FONCTION ET A SA DÉRIVÉE.

I. — Inégalités préliminaires.

1. Soit $f(x)$ une fonction méromorphe de la variable x, dans un certain domaine (D) entourant l'origine. Donnons-nous p quantités complexes $a_1, a_2, \ldots, a_p$ distinctes et finies. Représentons-les sur la sphère de Riemann. Nous désignerons par d une quantité inférieure ou égale à toutes les distances sphériques des images sphériques des $p+1$ quantités $a_1, a_2, \ldots, a_p, \infty$, prises deux à deux; par exemple, d pourra désigner la plus petite d'entre ces distances.

Posons, d'autre part :

$$F(x)=[f(x)-a_1][f(x)-a_2]\ldots[f(x)-a_p].$$

Nous nous proposons d'abord de *donner deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure, de l'indice $m(r, F)$*, où r désigne une quantité assez petite pour que le domaine (D) contienne le cercle de centre O et de rayon r.

2. Effectuons d'abord une première étude, très élémentaire, de correspondance entre certains points et leurs images sphériques.

Désignons par N le pôle nord de la sphère de Riemann, c'est-à-dire le point correspondant au point à l'infini du plan complexe. Soit m un point de ce plan

(1) H. MILLOUX, *Sur la théorie des défauts* (*C. R. Acad. Sc.*, 3 janvier 1940, p. 38).

complexe; M son image sphérique; u la distance sphérique qui sépare M de N, c'est-à-dire l'arc de grand cercle, compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, qui joint M et N. D'après la position de la sphère de Riemann, tangente au plan complexe en son origine O et de rayon égal à $\frac{1}{2}$, u est encore égal à l'angle MON. Entre la longueur du segment Om dans le plan complexe, et la distance sphérique u, on a la relation $Om = \cot g u$.

Soit v une constante comprise entre o et $\frac{2}{\pi}$. Désignons par (C) le cercle lieu des points Q de la sphère de Riemann, dont les distances sphériques au point M sont égales à v; et par Q′ et Q″ les points du cercle (C) situés sur le grand cercle passant par N et M; on choisira pour Q′ celui de ces deux points qu'on obtient en portant, à partir de M et dans le sens vers N, la distance sphérique v.

Le cercle (C) est l'image sphérique d'un cercle (c) du plan complexe. (c) est centré sur Om, qu'il coupe aux points q' et q'', homologues de Q′ et Q″. Orientons la droite Om dans le sens de O vers m. Sur cette droite orientée, d'origine O, les points q' et q'' ont pour abscisses, respectivement $\cot g(u - v)$ et $\cot g(u + v)$. Nous distinguerons ensuite deux cas de figure :

Premier cas. — *v est inférieur à u.* — Le cercle (c) contient alors m à son intérieur. Un point quelconque intérieur à ce cercle est à une distance du point m inférieure à mq', c'est-à-dire $\cot g(u - v) - \cot g u$, et supérieure à mq'', c'est-à-dire $\cot g u - \cot g(u + v)$.

Le maximum de cette distance peut encore s'écrire $\frac{1 + Om^2}{\cot g v + Om}$, et le minimum $\frac{1 + Om^2}{\cot g v + Om}$.

En particulier, un point extérieur au cercle (c) est à une distance de m qui vaut au minimum $\frac{1 + Om^2}{\cot g v + Om}$.

L'*extérieur* du cercle (c), dans le plan complexe, correspond, sur la sphère de Riemann, à l'*extérieur* du cercle (C), dont le centre est M et dont le rayon sphérique est v.

Deuxième cas. — *v est supérieur à u.* — Alors le cercle (c) laisse *m à son extérieur*. Un point quelconque intérieur à ce cercle est à une distance de m comprise entre $\cot g u - \cot g(u - v)$, ou encore $\frac{1 + Om^2}{Om - \cot g v}$ qui est le maximum, et $\cot g u - \cot g(u + v)$, ou encore $\frac{1 + Om^2}{\cot g v + Om}$, qui est le minimum.

Notons que, dans ce deuxième cas, c'est l'*intérieur* du cercle (c), dans le plan complexe qui correspond, sur la sphère de Riemann, à l'*extérieur* du cercle (C).

De l'examen de ces deux cas résulte notamment que si R est un point de la sphère de Riemann, dont la distance sphérique à M surpasse $v\left(0 < v < \frac{\pi}{2}\right)$,

alors le point r correspondant dans le plan complexe est à une distance du point m homologue de M, supérieure à $\frac{1+Om^2}{\operatorname{cotg}\rho+Om}$.

3. *Recherche d'une limite inférieure de* $m(r, \mathrm{F})$. — Désignons par (γ_i) les arcs de la circonférence de centre O et de rayon r, sur lesquels la distance sphérique de $f(x)$ à a_i est au plus égale à $\frac{d}{2}$. Par suite de la définition de d, ces arcs (γ_i) ne chevauchent pas les uns sur les autres, lorsque i varie de 1 à p. Soit (Γ) l'ensemble de tous les arcs (γ_i), i variant de 1 à p; désignons par $2\pi\alpha r$ la mesure de l'ensemble des arcs composant (Γ). Enfin, soit (Γ') l'ensemble des arcs complémentaires de (Γ) sur la circonférence de centre O et de rayon r.

Supposons x situé sur cet ensemble (Γ'). Quelle que soit la valeur de l'indice i, la distance sphérique qui sépare $f(x)$ de a_i est supérieure à $\frac{d}{2}$. On peut appliquer la conclusion du numéro précédent; il vient ainsi l'inégalité :

$$|f(x)-a_i|>\frac{1+|f(x)_i|^2}{|f(x)|+\operatorname{cotg}\frac{d}{2}}.$$

Posons $|f(x)|=\operatorname{cotg}u$. L'inégalité précédente peut s'écrire :

$$\left|\frac{f(x)-a_i}{f(x)}\right|>\frac{\sin\frac{d}{2}}{\cos u\sin\left(u+\frac{d}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{d}{2}}{\sin\frac{d}{2}+\sin\left(2u+\frac{d}{2}\right)},$$

u étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, le dénominateur de la dernière fraction est toujours positif ou nul; son maximum est $1+\sin\frac{d}{2}$ lorsque u varie. On en déduit que $\left|\frac{f(x)-a_i}{f(x)}\right|$ est supérieur à $\frac{2\sin\frac{d}{2}}{1+\sin\frac{d}{2}}$; un calcul élémentaire prouve, du fait que d inférieur à $\frac{\pi}{2}$, que la dernière fraction écrite est supérieure à la quantité plus simple $\frac{d}{2}$.

Appliquons ce résultat à la fonction $\mathrm{F}(x)$: lorsque x est sur l'ensemble (Γ'), on a donc l'inégalité :

$$\log|\mathrm{F}(x)|>p\log|f(x)|+p\log\frac{d}{2}.$$

D'où l'on déduit, *a fortiori*,

$$\log|\mathrm{F}(x)|>p\log|f(x)|-p\log\frac{2}{d}$$

(le dernier log est positif). Intégrons sur l'ensemble (Γ'). Il vient l'inégalité

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma')} \overset{+}{\log}|F(re^{i\theta})|\,d\theta > \frac{p}{2\pi}\int_{(\Gamma')} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta - (1-\alpha)p\log\frac{2}{d}.$$

4. Pour compléter l'établissement d'une limite inférieure de $m(r, F)$, étudions la fonction $F(x)$ sur l'ensemble (Γ).

Lorsque x est situé sur un arc (γ_i), $f(x)-a_i$ est relativement petit; la distance sphérique qui sépare a_i de l'infini est, rappelons-le, au moins égale à d, et celle qui sépare $f(x)$ de a_i vaut au plus $\frac{d}{2}$. On peut donc appliquer les résultats obtenus dans l'étude du premier cas du n° 2; m, u et v étant ici respectivement a_i, une quantité supérieure à d, et $\frac{d}{2}$; ainsi, tous les points dont la distance sphérique à a_i ne surpasse pas $\frac{d}{2}$ sont à une distance euclidienne de a_i au plus égale à $\frac{1+|a_i|^2}{\operatorname{cotg}\frac{\delta}{2}-|a_i|}$, quantité qui peut donc servir de limite supérieure pour $|f(x)-a_i|$. Ce qui entraîne l'inégalité

$$|f(x)| < \frac{1+|a_i|\operatorname{cotg}\frac{d}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{d}{2}-|a_i|}.$$

Le second membre de cette inégalité est une fonction croissante de $|a_i|$, lorsque $|a_i|$ croît, de o jusqu'à $\operatorname{cotg} d$, qui est son maximum. D'où l'on déduit :

$$|f(x)| < \operatorname{cotg}\frac{d}{2} < \frac{2}{d}.$$

Ou encore

$$\overset{+}{\log}|f(x)| < \log\frac{2}{d},$$

valable lorsque x est sur un arc (γ_i) quelconque, donc sur l'ensemble (Γ). En intégrant sur cet ensemble, il vient l'inégalité

$$\frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta < \alpha\log\frac{2}{d}.$$

Il en résulte donc que l'on a l'inégalité

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log}|F(re^{i\theta})|\,d\theta > \frac{p}{2\pi}\int_{(\Gamma)} \overset{+}{\log}|f(re^{i\theta})|\,d\theta - p\alpha\log\frac{2}{d},$$

puisque le premier membre de cette inégalité est positif ou nul, et le second membre négatif.

5. Les ensembles (Γ) et (Γ') étant complémentaires sur la circonférence de centre O et de rayon r, l'addition des inégalités (1) et (2) fournit l'inégalité

$$m(r, \mathrm{F}) > pm(r, f) - p \log \frac{2}{d}. \tag{3}$$

6. *Recherche d'une limite supérieure de* $m(r, \mathrm{F})$. — Pour éviter des longueurs, dues à l'examen de cas spéciaux dépourvus d'intérêt, nous serons amenés à faire quelques hypothèses sur le comportement de la fonction $f(x)$ à l'origine, le cas général étant le seul retenu. Dès maintenant, *nous éliminons les cas où l'origine est un zéro de* $f(x)$, *ou de* $f(x) - a_i$ (*quelle que soit la valeur de l'indice* i) *ou de* $f'(x)$, *ou de* $\frac{1}{f(x)}$. Ajoutons que l'examen spécial de ces cas n'offre aucune difficulté.

L'obtention d'une limite supérieure de $m(r, \mathrm{F})$ est basée sur l'utilisation de l'identité

$$\mathrm{F} = \frac{\mathrm{F}}{f'} f'$$

de laquelle on déduit, en prenant les log des modules des deux membres et en intégrant sur la circonférence de centre O et de rayon r

$$m(r, \mathrm{F}) \leq m\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) + m(r, f') = \mathrm{T}\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) + \mathrm{T}(r, f') - \left[\mathrm{N}\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) + \mathrm{N}(r, f')\right]. \tag{4}$$

Avec nos éliminations de cas spéciaux, la fonction $\frac{\mathrm{F}(x)}{f'(x)}$ est finie et différente de zéro à l'origine. Appliquons-lui la formule de Jensen-Nevanlinna :

$$\mathrm{T}\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) = \mathrm{T}\left(r, \frac{f'}{\mathrm{F}}\right) + \log \left|\frac{\mathrm{F}(0)}{f'(0)}\right|.$$

L'inégalité (4) conduit ainsi à la limite supérieure suivante de $m(r, \mathrm{F})$

$$m(r, \mathrm{F}) \leq \mathrm{T}(r, f') + \left[\mathrm{N}\left(r, \frac{f'}{\mathrm{F}}\right) - \mathrm{N}\left(r, \frac{\mathrm{F}}{f'}\right) - \mathrm{N}(r, f')\right] + m\left(r, \frac{f'}{\mathrm{F}}\right) + \log \left|\frac{\mathrm{F}(0)}{f'(0)}\right|. \tag{5}$$

Étude de la quantité entre crochets, de l'inégalité (5). — Les points du plan x qui interviennent dans ces différents indices de densité, doivent être pris parmi les pôles de $\frac{f'}{\mathrm{F}}$, ceux de $\frac{\mathrm{F}}{f'}$, et les pôles de f', donc parmi les pôles de f, les zéros de F (c'est-à-dire les points a_i) et les zéros de f' : nous avons donc trois sortes de points à étudier ; il est bien évident que les points qui nous intéressent sont à une distance de l'origine inférieure à r.

1° *Pôles de* $f(x)$. — Soient b un tel pôle, et q son ordre de multiplicité pour la fonction $f(x)$; pour $f'(x)$, son ordre de multiplicité est $q+1$; pour $\mathrm{F}(x)$, il est pq.

Supposons d'abord p égal à 1. Alors b est un pôle simple pour $\frac{f'}{F}$, de sorte que ce point figure une fois dans la composition de $N\left(r, \frac{f'}{F}\right)$, et que $(q+1)$ fois dans celle de $N(r, f')$. Il ne figure pas dans la composition de $N\left(r, \frac{F}{f'}\right)$. Dans la composition du crochet, il entre donc au même titre que dans l'expression $-pN(r, f)$.

Supposons maintenant p supérieur à 1. Alors b ne figure plus parmi les pôles de $\frac{f'}{F}$; par contre, il figure dans les pôles de $\frac{F}{f'}$, avec un ordre de multiplicité égal à $pq-q-1$ (dans le cas où $p=2$ et $q=1$, il ne figure pas, mais ce qui précède est encore vrai). Ce point b figure encore $(q+1)$ fois dans la composition de $N(r, f')$, de sorte que dans le crochet, il entre pq fois avec changement de signe, c'est-à-dire au même titre que dans l'expression $-pN(r, f)$.

En résumé, *si l'on ne tient compte, dans le crochet, que des pôles de la fonction* $f(x)$, *on trouve l'expression* $-pN(r, f)$.

2° *Zéros de* $f(x)-a_i$. — Quelle que soit la valeur de l'ordre de multiplicité d'un tel point, $\frac{f'}{F}$ admet le point étudié comme *pôle simple*.

En outre, le point étudié n'intervient dans aucun des deux autres indices de densité du crochet. De la sorte, *tous les points de ce genre entrent dans la composition du crochet au même titre que dans l'expression*

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right)$$

faisant intervenir les indices *réduits* de densité, c'est-à-dire comptés comme si les points considérés intervenaient comme points simples.

On peut remplacer ces indices réduits par les indices complets de la façon suivante : désignons par $N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ l'indice de densité relatif à ceux des zéros de $f'(x)$ qui sont aussi des zéros pour l'une quelconque des fonctions $f(x)-a_i$. Alors, un calcul immédiat montre que l'on a

$$\sum_{i=1}^{p} \overline{N}\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) = \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) - N_0\left(r, \frac{1}{f'}\right).$$

3° *Zéros de* $f'(x)$. — Il n'y a pas lieu de tenir compte, dans cette catégorie, des points où $f(x)-a_i$ est nul, c'est-à-dire des zéros multiples de $f(x)-a_i$, puisque ces points ont été catalogués dans la catégorie précédente.

Les autres zéros de $f'(x)$, qui ne sont donc pas des zéros de $F(x)$, entrent avec leur ordre de multiplicité, dans la composition de $N\left(r, \frac{F}{f'}\right)$; d'autre part,

ils n'interviennent pas dans les deux autres indices de densité. *Donc, dans le crochet, ils interviennent au même titre dans l'expression*

$$-\left[\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)-\mathrm{N}_0\left(r,\frac{1}{f'}\right)\right].$$

Conclusion. — *La quantité entre crochets, dans l'expression* (5), *vaut*

$$-p\,\mathrm{N}(r,f)+\sum_{i=1}^{p}\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)-\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right).$$

7. *Comparaison des deux limites de* $m(r, \mathrm{F})$. — Il résulte de cette comparaison que le deuxième membre de l'inégalité (3) est majoré par le deuxième membre de l'inégalité (5). En tenant compte de la transformation précédente du crochet, cette comparaison donne naissance à l'inégalité :

$$(6)\qquad p\,\mathrm{T}(r,f)<\mathrm{T}(r,f')+\sum_{i=1}^{p}\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f-a_i}\right)-\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+m\left(r,\frac{f'}{\mathrm{F}}\right)+\log\left|\frac{\mathrm{F}(0)}{f'(0)}\right|+p\log\frac{2}{d}.$$

Rappelons que $\mathrm{F}(x)$ est la fonction $[f(x)-a_1][f(x)-a_2]\ldots[f(x)-a_p]$, et que l'inégalité (6) suppose que l'origine du plan complexe n'est pas un zéro de $f(x)$, ni de $f(x)-a_i$, ni de $f'(x)$, et n'est pas un pôle de $f(x)$. L'inégalité analogue relative à l'un quelconque de ces cas particuliers ne diffère de l'inégalité (6) que par la forme de la constante qui figure, en avant-dernier lieu, dans le deuxième membre de cette inégalité.

II. — Inégalité fondamentale,

8. Considérons maintenant q quantités complexes $b_1, b_2, \ldots, b_j, \ldots, b_q$ $(q\geq 1)$ distinctes entre elles, finies et non nulles.

Appliquons à la fonction méromorphe $f'(x)$ la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna (1) majorant l'indice caractéristique de la fonction $f'(x)$, connaissant les indices de densité relatifs aux $q+2$ valeurs $b_1, b_2, \ldots, b_q$, 0 et ∞. Cette inégalité s'écrit ainsi

$$q\,\mathrm{T}(r,f')<\mathrm{N}(r,f')+\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f'}\right)+\sum_{i=1}^{p}\mathrm{N}\left(r,\frac{1}{f'-b_j}\right)-\mathrm{N}_1(r,f')+\mathrm{S}(r),$$

où $\mathrm{S}(r)$ est ce que l'on appelle le *terme complémentaire*, et dont la valeur sera ultérieurement précisée. Quant à $\mathrm{N}_1(r,f')$, c'est l'*indice des valeurs multiples de*

(1) *Voir* R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (*Collection Borel*, Gauthier-Villars, édit., 1929, *voir* p. 69).

la fonction $f'(x)$; entrent dans la composition de cet indice tous les points x pour lesquels $f'(x)-c$ a un zéro multiple de ces points, c étant une constante finie quelconque, et tous les pôles de la fonction $f'(x)$, lesquels sont multiples. Ces points x interviennent dans l'indice étudié, autant de fois moins une qu'il existe d'unités dans l'ordre de multiplicité du zéro de $f'(x)-c$, ou du pôle de $f'(x)$. On constate de suite que l'on a

$$N_1(r, f') = N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + N(r, f').$$

On voit ainsi se former, dans le deuxième membre de l'inégalité étudiée, la quantité $N(r, f') - N(r, f)$, où les pôles de la fonction $f(x)$ interviennent, privés de leur ordre éventuel de multiplicité : cette différence est donc l'*indice réduit des pôles de la fonction* $f(x)$, qu'on désigne par $\overline{N}(r, f')$.

Ces quelques remarques permettent de simplifier la deuxième inégalité de R. Nevanlinna, dans le cas de $f'(x)$, et de l'écrire

$$(7) \qquad qT(r, f') < \overline{N}(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + \sum_{i=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_i}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r).$$

Le rapprochement des inégalités (6) et (7) fournit de suite l'inégalité suivante, que nous considérerons ici comme fondamentale :

$$(8) \qquad pqT(r, f) < \overline{N}(r, f') + q\sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) - \left[(q-1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right)\right] + S_1(r)$$

avec

$$(8') \qquad S_1(r) = S(r) + qm\left(r, \frac{f'}{F}\right) + q\log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right| + pq\log\frac{2}{d}.$$

Pour compléter cette inégalité, il ne nous reste plus qu'à préciser la nature du terme $S(r)$, et par majorer $m\left(r, \frac{f'}{F}\right)$. Nous allons procéder à cette étude d'une façon précise; cependant, l'essentiel est de savoir que, pour une fonction $f(x)$ méromorphe dans le plan, et lorsque les a_i et les b_j sont connus, le rapport de $S_1(r)$ à $T(r, f')$ tend vers zéro pour les fonctions méromorphes dépourvues d'intervalles extraordinaires (comme le sont notamment les fonctions d'ordre fini); pour les autres, le même rapport tend aussi vers zéro, en dehors de ces intervalles extraordinaires (1). Ce résultat qualitatif est déjà évident d'après les propriétés du terme complémentaire $S(r)$ étudié par R. Nevanlinna, et celles de $m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right)$. Il ne nous semble pas superflu de

(1) Pour ces intervalles extraordinaires, *voir* R. NEVANLINNA, *loc. cit.*, pp. 61-62.

donner ici une forme précise au terme $S_1(r)$, pouvant être utile ultérieurement à des études où la connaissance de cette forme est indispensable.

9. *Valeur du terme complémentaire* $S(r)$. — Rappelons qu'il figure dans la deuxième inégatité de R. Nevanlinna, appliquée sous la forme (7), à la fonction $f'(x)$.

Dans un article antérieur (1), je précise, dans tous les cas qui peuvent se présenter, la valeur du terme complémentaire de la deuxième inégalité de R. Nevanlinna; je ne rappellerai ici que le cas général.

Soit $\varphi(x)$ une fonction méromorphe dans un domaine comprenant le cercle de centre O et de rayon r. On suppose qu'en O, $\varphi(x)$ est fini et diffèrent de zéro. On désigne par β_k le premier coefficient différent de zéro, dans le développement en série de Taylor de la fonction $\varphi(x)$ au voisinage de l'origine.

Soit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, n constantes distinctes finies ou non ($n \geq 3$). On désigne par d_i la plus petite distance sphérique entre ζ_i d'une part, et les autres constantes ζ d'autre part; puis par d la moyenne géométrique des d_i, lorsque l'on donne à i toutes les valeurs de 1 à n. On supposera que l'origine O n'est pas un zéro des fonctions $\varphi(x) - \zeta_i$.

L'inégalité de R. Nevanlinna

$$(n-2)T(r, \varphi) < \sum_{i=1}^{n} N(r, \zeta_i) - N_1(r, \varphi) + S(r),$$

où $N_1(r, \varphi)$ est l'indice de densité relatif aux valeurs multiples de $\varphi(x)$ [c'est-à-dire aux pôles multiples et aux points où $\varphi'(x)$ s'annule], se précise par la forme suivante de $S(r)$:

$$(9)\quad S(r) = 8 \overset{+}{\log} T(\rho, \varphi) + 6 \log \frac{\rho}{\rho - r} + 5 \log \frac{\rho}{r} + 4 \overset{+}{\log} \frac{1}{\rho} + 9n \log \frac{4}{d} + n \overset{+}{\log} |\varphi(0)| + \log \frac{1}{k |\beta_k|} + 88;$$

ρ est une quantité quelconque supérieure à r, telle cependant que le cercle de centre O et de rayon ρ est intérieur au domaine de méromorphie de la fonction $\varphi(x)$ (2).

10. Appliquons à préciser le terme $S(r)$ qui figure dans l'inégalité (7), et qu'on retrouve dans l'égalité (8').

Pour simplifier, nous supposerons $f''(0)$ différent de zéro, et nous désignerons par d' une quantité quelconque au plus égale à la plus petite des distances sphériques, prises deux à deux, des constantes $b_1, b_2, \ldots, b_q$, 0 et ∞.

---

(1) H. MILLOUX, *Sur une inégalité de R. Nevanlinna* (*Revista de Ciencias*, 1945, n° 453).

(2) Le Mémoire qui vient d'être rappelé examine aussi tous les cas particuliers qui sont systématiquement écartés ici, pour plus de brièveté.

La formule (9) montre alors que l'on peut prendre pour $S(r)$ la quantité suivante :

$$(10)\quad 8\log^{+}T(\rho,f')+6\log\frac{\rho}{\rho-r}+5\log\frac{\rho}{r}+4\log^{+}\frac{1}{\rho}$$
$$+9(q+2)\log\frac{4}{d}+(q+2)\log^{+}|f'(0)|+\log\frac{1}{|f''(0)|}+88,$$

ou *a fortiori* toute autre quantité supérieure.

Il est bien entendu que $f'(0)$ diffère de $b_1, b_2, \ldots b_q$, 0 et ∞.

Cherchons à substituer au premier terme de l'expression (10), une quantité plus simple. En précisant quelque peu (1) une majoration donnée par R. Nevanlinna, on établit l'inégalité suivante, valable lorsque $f(0)$ n'est ni nul, ni infini :

$$(11)\quad m\left(\rho,\frac{f'}{f}\right)<4\log^{+}T(R,f)+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}+3\log\frac{R}{R-\rho}+2\log\frac{R}{\rho}+\log^{+}\frac{1}{R}+16,$$

où R est une quantité quelconque supérieure à ρ, mais telle cependant que le cercle de centre O et de rayon R est intérieur au domaine de méromorphie considéré.

Or, on a

$$T(\rho,f')=m(\rho,f')+N(\rho,f')$$
$$\leq 2N(\rho,f)+m(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{f'}{f}\right)\leq 2T(\rho,f)+m\left(\rho,\frac{f'}{f}\right),$$

d'où en utilisant la majoration (11) et en notant que $4\log^{+}T(R,f)$ est majoré par $T(R,f)+4\log 4-4$, donc *a fortiori* par $T(R,f)+2$, et que $T(\rho,f)$ est majoré par $T(R,f)$, il vient l'inégalité

$$T(\rho,f')<3T(R,f)+4\log^{+}\log^{+}\frac{1}{|f(0)|}+3\log\frac{R}{R-\rho}+2\log\frac{R}{\rho}+\log^{+}\frac{1}{R}+18.$$

Prenons les $\log^{+}$ des deux membres de cette inégalité; en utilisant les deux inégalités suivantes :

$$\log^{+}(a_1+a_2+\ldots+a_p)<\log^{+}a_1+\log^{+}a_2+\ldots+\log^{+}a_p+\log(p+1)$$

et

$$\log^{+}b<b+\log 2-2,$$

il vient, après un calcul numérique simple, l'inégalité :

$$\log^{+}T(\rho,f')<\log^{+}T(R,f)+\log^{+}\log^{+}\log^{+}\frac{1}{f(0)}+\log\frac{R}{R-\rho}+\log\frac{R}{\rho}+\log^{+}\frac{1}{R}+6.$$

---

(1) H. Milloux, *Les fonctions méromorphes et leurs dérivées* (*Actualités scientifiques et industrielles*, Hermann, édit., Paris, n° 888, 1940). *Voir* p. 8, inégalité (1).

Reportons dans la quantité (10), et choisissons pour ρ la moyenne géométrique entre r et R. *Nous pouvons ainsi prendre, pour valeur du terme complémentaire* $S(r)$ *figurant dans* (7) *et dans* (8'), *l'expression suivante :*

$$(12)\quad S(r) = 8\overset{+}{\log} T(R, f) + 14\log\frac{R}{R-r} + 7\log\frac{R}{r} + 12\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 9(q+2)\log\frac{4}{d'} + 8\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|} + (q+2)\overset{+}{\log}|f'(0)| + \log\frac{1}{|f''(0)|} + 146.$$

Rappelons que nous avons fait les hypothèse suivantes :

$f(0)$ n'est ni nul ni infini;
$f'(0)$, qui est fini, est différent de $0, b_1, b_2, \ldots, b_q$;
$f''(0)$ est différent de zéro.

Rappelons encore que d' désigne une quantité quelconque, inférieure ou égale à la plus petite des distances sphériques de $b_1, b_2, \ldots, b_q$, 0 et ∞.

11. *Majoration de* $m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log|F(0)|$. — Ce sont des termes figurant dans l'égalité (8').

Rappelons que les distances sphériques de $a_1, a_2, \ldots, a_p$ prises deux à deux, sont supérieures ou égales à d; en particulier, il en résulte que la distance euclidienne qui sépare a_i de a_j est toujours supérieure à d.

Écrivons

$$\frac{f'}{F} = \sum_{i=1}^{p} A_i \frac{f'}{f - a_i}.$$

Le coefficient A_i vaut l'inverse du produit des différences de a_i aux a_j, où j prend toutes les valeurs de 1 à n, sauf i. Donc $|A_i|$ est inférieur à $\frac{1}{d^{p-1}}$.

On en déduit l'inégalité

$$(13)\quad m\left(r, \frac{f'}{F}\right) < (p-1)\log\frac{1}{d} + \sum_{i=1}^{p} m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right) + \log p.$$

Appliquons l'inégalité (11) en changeant ρ en r et $f(x)$ en $f(x) - a_i$, en notant que $f(0)$ est différent de a_i (c'est une hypothèse faite au début du n° 6). Il vient ainsi l'inégalité

$$(11')\quad m\left(r, \frac{f'}{f-a_i}\right) < 4\overset{+}{\log} T(R, f - a_i) + 3\log\frac{R}{R-r} + 2\log\frac{R}{r} + \overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 4\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0) - a_i|} + 16.$$

On sait que $T(R, f - a_i)$ est majoré par $T(R, f) + \overset{+}{\log}|a_i| + \log 2$; d'autre part, la distance sphérique qui sépare a_i de l'infini valant au moins d, $|a_i|$ est

majoré par $\cot g d$, donc *a fortiori* par $\frac{1}{d}$. On constate ainsi que $\log T(R, f-a_i)$ est majoré par $\overset{+}{\log} T(R, f) + \overset{+}{\log}\log\frac{1}{d} + \log 3$.

Appliquons cette majoration à l'inégalité (11'), puis reportons dans l'inégalité (13). Après un un calcul numérique simple, il vient l'inégalité :

$$(14)\quad m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log|F(0)| < 4p \overset{+}{\log} T(R, f) + 3p \log\frac{R}{R-r} + 2p\log\frac{R}{r} + p\overset{+}{\log}\frac{1}{R} + 2p\log\frac{1}{d} + 23p + 4\sum_{i=1}^{p}\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)-a_i|} + \log|F(0)|.$$

La somme des deux derniers termes de cette inégalité peut être remplacée par une expression plus simple. On a, en effet,

$$\log|F(0)| = \sum_{i=1}^{p}\overset{+}{\log}|f(0)-a_i| - \sum_{i=1}^{p}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)-a_i|}.$$

Tenons compte de ce que $4\log u - u$ est majoré par $4\log 4 - 4$, et que $\overset{+}{\log}|f(0)-a_i|$ est majoré par $\overset{+}{\log}|f(0)| + \overset{+}{\log}|a_i| + \log 2$, donc *a fortiori* par $\overset{+}{\log}|f(0)| + \log\frac{1}{d} + \log 2$. Nous constatons ainsi que la somme des deux derniers termes de l'inégalité (14) peut être remplacée par l'expression

$$p\overset{+}{\log}|f(0)| + p\log\frac{1}{d} + 3p.$$

12. Résumons les résultats obtenus jusqu'ici :

THÉORÈME I. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe au voisinage de l'origine. Soit p quantités complexes a_i distinctes et finies, et q quantités complexes b_j distinctes, finies et différentes de zéro. On a l'inégalité suivante :*

$$(8)\quad pqT(r, f) < \overline{N}(r, f) + q\sum_{i=1}^{p}N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q}N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) - \left[(q-1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right)\right] + S_1(r),$$

où $\overline{N}(r, f)$ désigne l'indice réduit des pôles de la fonction $f(x)$ et où l'on peut donner à $S_1(r)$ la forme suivante :

$$(15)\quad S_1(r) = 4(pq+2)\overset{+}{\log} T(R, f) + (3pq+14)\log\frac{R}{R-r} + (2pq+7)\log\frac{R}{r} + (pq+12)\overset{+}{\log}\frac{1}{r} + 9(q+2)\log\frac{4}{d'} + 4pq\log\frac{1}{d} + pq\overset{+}{\log}|f(0)| + 8\overset{+}{\log}\overset{+}{\log}\frac{1}{|f(0)|} + 2\overset{+}{\log}|f'(0)| + q\overset{+}{\log}\frac{1}{|f'(0)|} + \log\frac{1}{|f''(0)|} + 27pq + 146,$$

à condition toutefois :

que $f(0)$ *soit distinct de* 0, *de* ∞ *et des* a_i;
que $f'(0)$ *soit distinct de* 0 *et des* b_j;
que $f''(0)$ *soit distinct de* 0 (1).

Enfin, dans la formule de $S_1(r)$ *interviennent d, qui est une quantité quelconque inférieure ou égale à la plus petite des distances sphériques de* $a_1, a_2, \ldots, a_p$, *prises deux à deux et d', qui est une quantité quelconque inférieure ou égale à la plus petite des distances sphériques de* $b_1, b_2, \ldots b_q$, 0, ∞, *prises deux à deux.*

R *est une quantité quelconque supérieure à r, mais telle cependant que la fonction* $f(x)$ *soit méromorphe dans le cercle de centre* O *et de rayon* R.

13. *Comparaison avec des résultats antérieurs.* — Supposons en particulier p et q égaux à 1, et, pour fixer les idées, $a = 0$ et $b = 1$. Il vient l'inégalité

$$(16) \qquad T(r,f) < \overline{N}(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{f-1}\right) - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + S_1(r)$$

dont l'analogie avec l'une des formes habituelles de la deuxième inégalité de R. Nevanlinna est frappante ; cette forme est la suivante :

$$(16') \qquad T(r,f) < \overline{N}(r,f) + N\left(r,\frac{1}{f}\right) + N\left(r,\frac{1}{f-1}\right) - N\left(r,\frac{1}{f'}\right) + S(r).$$

Rappelons, ce qui a été dit dans l'introduction, qu'une inégalité, un peu moins précise que l'inégalité (16), avait déjà été obtenue; le Mémoire qui contient cette inégalité (voir la référence dans l'introduction) traite de questions plus générales; on substitue, à la dérivée $f'(x)$, une combinaison linéaire et homogène $\varphi(x)$ quelconque de la fonction initiale $f(x)$ et de quelques-unes de ses dérivées successives, avec coefficients holomorphes, et l'on majore $T(r,f)$ en fonction de $N(r,f)$, de $N\left(r,\frac{1}{f}\right)$ et de $N\left(r,\frac{1}{\varphi-1}\right)$.

La substitution de la fonction $\varphi(x)$ à la dérivée $f'(x)$ dans l'étude actuelle pourrait se faire aussi; mais une telle extension exigerait de longs calculs.

14. La majoration de l'indice caractéristique $T(r,f)$ résumée dans l'inégalité (8), s'opère en fonction des indices de densité suivants : un premier groupe, concernant la fonction $f(x)$, contient obligatoirement l'indice (réduit) des pôles $\overline{N}(r,f)$; le deuxième groupe, concernant la dérivée $f'(x)$, élimine obligatoirement l'indice de densité des zéros de cette dérivée.

Il est possible d'obtenir des inégalités analogues à (8), mais où le deuxième membre ne contient plus l'indice relatif aux pôles de la fonction.

---

(1) Ces trois groupes de conditions n'ont rien de fondamental. Dans le cas où l'une d'elles, ou plusieurs, ne sont pas réalisées, seuls les termes de $S_1(r)$ du septième au onzième rang changent; ils sont remplacés par d'autres constantes issues des trois premiers coefficients de la série de Laurent, développement de la fonction $f(x)$ au voisinage de l'origine.

Une première méthode, pour aboutir à ce but, consisterait à noter que $\overline{N}(r, f)$ est majoré par $T(r, f)$; le premier membre deviendrait alors $(pq-1)T(r, f)$ et le deuxième ne contiendrait plus l'indice des pôles.

Une seconde méthode va nous permettre de substituer à l'indice $\overline{N}(r, f)$ des indices de densité relatifs à la dérivée $f'(x)$.

Soient α et β deux constantes distinctes et finies. D'après la deuxième inégalité fondamentale de R. Nevanlinna, on a [*voir* inégalité (7)] :

$$T(r, f') < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f'-\alpha}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\beta}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S_2(r).$$

où $S_2(r)$ pourrait être précisé, en utilisant les résultats rappelés au n° 9. Or, $T(r, f')$ est supérieur ou égal à $N(r, f')$, qui vaut $N(r, f) + \overline{N}(r, f)$. D'où l'inégalité

$$N(r, f) < N\left(r, \frac{1}{f'-\alpha}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\beta}\right) - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + S_2(r).$$

A fortiori, $N(r, f)$ est majoré par le second membre précédent.

En reportant dans (8), il vient l'inégalité

$$(17)\quad pqT(r, f) < q\sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f-a_i}\right) + \sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f'-b_j}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\alpha}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-\beta}\right) - \left[(q-1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + 2N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] + S_3(r).$$

Rappelons que dans cette inégalité :

les a_i sont finis et distincts;
les b_j sont finis, distincts et différents de zéro;
α et β sont finis et distincts.

Enfin, $S_3(r)$ a une forme analogue à la forme (15), et en général négligeable devant $T(r, f)$.

Remarquons que l'on peut prendre l'une des quantités α ou β égale à zéro. Dans ce cas, on reportera l'indice de densité à l'intérieur du crochet, qui contient déjà cet indice (sauf dans le cas où $q=1$).

CHAPITRE II.

APPLICATIONS A LA THÉORIE DES DÉFAUTS.

15. *Définitions.* — Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan. Rappelons que M. R. Nevanlinna appelle *défaut* de la valeur a, l'expression

$$\delta(f, a) = \underline{\lim}\frac{m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)} = 1 - \overline{\lim}\frac{N\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)},$$

les limites étant prises lorsque r augmente indéfiniment.

Tout défaut est compris entre 0 et 1. En général, le défaut est nul : il ne peut être différent de zéro que pour une suite finie, ou un ensemble dénombrable de valeurs a; ces valeurs sont alors dites *exceptionnelles au sens de* R. Nevanlinna (nous dirons ici, plus brièvement, exceptionnelles); la somme de leurs défauts est au plus égale à 2. Par exemple, si la fonction $f(x)$ est entière, l'infini est une valeur exceptionnelle à défaut égal à 1; pour les autres valeurs exceptionnelles, il restera donc une somme de défauts au plus égale à 1.

Les résultats qui viennent d'être rappelés ne peuvent être améliorés. Ils s'étendent à la théorie des fonctions méromorphes dans un cercle (1).

Défaut absolu et défaut relatif d'une valeur prise par la dérivée $f'(x)$. — Lorsque, dans une étude, s'introduisent à la fois une fonction méromorphe $f(x)$ et sa dérivée, il peut y avoir intérêt à comparer l'indice de densité $N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)$ non pas seulement à $T(r, f')$, mais aussi à l'indice caractéristique $T(r, f)$ de la fonction génératrice. Nous appellerons *défaut absolu* et *défaut relatif* respectivement les expressions suivantes :

$$\delta'_a(f', b) = 1 - \overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f')}$$

et

$$\delta'_r(f', b) = 1 - \overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f)}.$$

Notons que le défaut absolu n'est autre que le défaut au sens de R. Nevanlinna.

16. Le défaut *absolu* est, bien entendu, compris entre 0 et 1. Il peut ne pas en être de même du défaut *relatif*. Dans certains cas assez généraux, on peut fixer une liaison d'inégalité entre les deux défauts; de cette liaison résulte que dans ces cas, *le défaut relatif est compris entre* -1 *et* $+1$; nous verrons sur des exemples que *ces limites peuvent être atteintes*.

A cet effet considérons l'indice caractéristique $T(r, f')$. Égal à

$$N(r, f) + \overline{N}(r, f) + m(r, f'),$$

il est majoré par

$$2N(r, f) + m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leq 2T(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right).$$

Or, on sait que le rapport $\frac{m\left(r, \frac{f'}{f}\right)}{T(r, f)}$ tend en général vers 0 lorsque r augmente

(1) *Voir* R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Gauthier-Villars, édit., Paris 1929. *Collection Borel*). *Voir* notamment pp. 78–96 et p. 150.

indéfiniment. Il tend toujours vers o lorsque la fonction $f(x)$ est d'ordre fini ou nul; lorsque la fonction $f(x)$ est d'ordre infini, il se peut qu'il existe une suite d'intervalles de valeurs de r, s'éloignant indéfiniment sur lesquels le rapport étudié ne tend pas vers o; à l'intérieur de ces intervalles que l'on nomme *extraordinaires*, la croissance de $T(r, f)$ est exceptionnellement brusque; de plus, la somme des longueurs de tous ces intervalles extraordinaires est finie (¹).

Ne retenons pour le moment *que le cas des fonctions méromorphes dépourvues d'intervalles extraordinaires*. De la majoration précédente de $T(r, f')$, il résulte que l'on a

$$\overline{\lim}\frac{T(r, f')}{T(r, f)} \leq 2.$$

D'où

$$\overline{\lim}\frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f)} \leq 2\,\overline{\lim}\frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f)}$$

et par suite, on a l'inégalité

$$\delta_r'(f', b) \geq -1 + 2\,\delta_a'(f', b), \tag{18}$$

de laquelle résulte en particulier que *le défaut relatif vaut au moins* -1.

D'autre part, du fait de sa définition, *il vaut au plus* $+1$, et ceci, dans tous les cas.

17. *Exemples.* — 1° La fonction $f(x) = e^x$ étant d'ordre fini, il n'y a pas d'intervalles extraordinaires. La dérivée étant identique à la fonction, les défauts relatif et absolu sont égaux; en particulier, le défaut relatif, pour $b = o$, vaut 1.

2° Considérons maintenant la fonction

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

qui est une fonction méromorphe d'ordre 1.

Le nombre des pôles de $f(x)$ contenus dans le cercle de centre O et de rayon r vaut $2E\left(\frac{r}{2\pi}\right) + 1$, où $E(a)$ est le plus grand entier contenu dans a. Il en résulte que l'indice de densité des pôles vaut $\frac{r}{\pi} + O(\log r)$. A l'extérieur de petits cercles les entourant, et de rayon fixe, on constate que la fonction (qui est périodique) reste bornée : l'indice $m(r, f)$ reste donc borné quand r augmente indéfiniment (²).

(¹) *Voir* R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel ...*, (*loc. cit.*, pp. 62-63).

(²) La même fonction est utilisée dans un autre but par R. Nevanlinna (*Le théorème de Picard-Borel ..., loc. cit., voir* pp. 91-92).

Tous les pôles de $f(x)$ étant simples, $N(r, f')$ vaut $2N(r, f)$.

Étudions l'indice $m(r, f')$. Il est majoré par $m(r, f) + m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$. La première partie de cette somme reste bornée; quant à la deuxième partie, on constate, en lui appliquant la majoration (11), où l'on remplace ϱ par r et par R par $2r$, qu'elle est tout au plus de l'ordre de grandeur de $\log r$; en effet, $M(2r, f)$ est de l'ordre de grandeur de r, $f(x)$ étant d'ordre 1.

Donc $m(r, f')$ est au plus de l'ordre de grandeur de $\log r$. Son rapport à $N(r, f')$ tend par suite vers 0 lorsque r augmente indéfiniment. L'indice caractéristique $T(r, f')$ et l'indice de densité $N(r, f')$ sont donc asymptotiquement égaux; il en est de même des indices $T(r, f)$ et $N(r, f)$. D'où résulte le fait que $\frac{T(r, f')}{T(r, f)}$ tend vers 2 lorsque r augmente indéfiniment. Si b est une constante quelconque, on a donc :

$$\overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f)} = 2 \overline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right)}{T(r, f')}$$

ou

$$\delta'_a(f', b) = 2\delta'_r(f', b) - 1.$$

L'inégalité (18) s'est transformée ici en égalité.

Il suffit maintenant de choisir pour b une valeur à défaut absolu nul (il existe une infinité non dénombrable de telles valeurs b) pour obtenir une valeur à défaut relatif égal à -1.

18. Dans certains cas particuliers, les relations entre les défauts relatif et absolu deviennent plus étroites.

Considérons d'abord une fonction $f(x)$ méromorphe dans le plan, *sans intervalles extraordinaires, et telle que l'infini a un défaut égal à* 1.

On a alors l'inégalité

$$T(r, f') < [1 + \varepsilon(r)]T(r, f),$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini. Cette inégalité entraîne de suite le fait que *le défaut relatif est supérieur ou égal au défaut absolu.*

Supposons en outre que *notre fonction $f(x)$ admette une valeur finie a comme valeur exceptionnelle à défaut égal à* 1 [notons que $f(x)$ n'aura plus d'autre valeur d'exception].

Appliquons alors l'inégalité (6) en faisant $p = 1$; $a_1 = a$. Comme $m\left(r, \frac{f'}{f}\right)$ est négligeable devant $T(r, f)$, on voit que le rapport de $T(r, f')$ à $T(r, f)$ a pour limite inférieure une quantité supérieure ou égale à 1, lorsque r augmente indéfiniment. Or, d'après ce qui précède, la limite supérieure vaut au plus 1. Donc le rapport étudié tend vers 1.

Plus généralement, il en est de même lorsque *la fonction $f(x)$ admet un nombre fini ou une infinité dénombrable de valeurs exceptionnelles finies, avec*

somme des défauts égale à 1 ; il suffit de prendre p d'entre elles, de façon que la somme de leurs défauts soit aussi voisine de 1 que l'on désire, et d'appliquer à nouveau l'inégalité (6), pour constater que la limite inférieure du rapport $\frac{T(r, f')}{T(r, f)}$ est une quantité supérieure ou égale à une quantité aussi voisine de 1 que l'on veut; d'où résultera le fait que ce rapport tend vers 1.

Enfin, en revenant à la définition des deux défauts relatif ou absolu, on voit que *ceux-ci sont identiques*. Résumons les conditions (suffisantes mais pas nécessaires) pour que cette conclusion soit vérifiée :

La fonction $f(x)$ est dépourvue d'intervalles extraordinaires; l'infini a pour défaut 1 ; *il existe une suite de valeurs finies à somme de défauts égale à* 1.

19. *Première application : étude des défauts absolus.* — Soit q constantes finies b_j; désignons par $\tilde{\delta}'_a$ la somme de leurs défauts *absolus* pour la dérivée $f'(x)$. De la définition de ces défauts résulte l'inégalité suivante

$$\sum_{j=1}^{q} N\left(r, \frac{1}{f' - b_j}\right) < [q - \tilde{\delta}'_a + \varepsilon(r)]T(r, f'),$$

où $\varepsilon(r)$ est une fonction positive ou nulle de r, tendant vers zéro lorsque r augmente indéfiniment.

Reportons l'inégalité qui précède dans l'inégalité (7); on obtient *a fortiori* l'inégalité :

$$[\tilde{\delta}'_a - \varepsilon(r)]T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r), \tag{19}$$

où $S(r)$ a la valeur précisée par l'égalité (12), dans le cas général, et une valeur analogue, dans les cas particuliers éliminés dans l'étude conduisant à l'égalité (12).

Désignons par $\tilde{\delta}'_a(0)$ le défaut absolu de zéro pour la fonction $f'(x)$: de la définition du défaut résulte que l'on a l'inégalité :

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < [1 - \tilde{\delta}'_a(0) + \varepsilon_1(r)]T(r, f'), \tag{20}$$

où $\varepsilon_1(r)$ est une fonction du même type que $\varepsilon(r)$.

Ceci posé, introduisons un paramètre λ tel que $0 < \lambda \leq 1$. Dans l'inégalité (19), nous séparons $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ en $\lambda N\left(r, \frac{1}{f'}\right) + (1 - \lambda) N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$, et nous appliquons seulement à la deuxième partie de la dernière somme l'inégalité (20). En reportant dans (19) on constate que ces opérations entraînent l'inégalité

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{\delta}'_a - (1 - \lambda)|1 - \tilde{\delta}'_a(0)| - \varepsilon(r) - (1 - \lambda)\varepsilon_1(r)\right]T(r, f') - \lambda N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \\ &< \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r). \end{aligned} \tag{21}$$

Ceci posé, pouvons-nous choisir le paramètre λ de façon que la partie du coefficient de $T(r, f')$, indépendante de $\varepsilon(r)$ et de $\varepsilon_1(r)$ dans l'inégalité précédente, soit égale à λ ? Oui, si l'on peut prendre

$$\lambda = \frac{\delta'_a + \delta'_a(0) - 1}{\delta'_a(0)}. \tag{22}$$

Comme λ doit satisfaire aux conditions $0 < \lambda \leq 1$, le choix (22) peut avoir lieu, mais ne peut avoir lieu que si les conditions suivantes sont réalisées :

$$\delta'_a \leq 1, \qquad \delta'_a + \delta'_a(0) > 1. \tag{23}$$

Nous examinerons plus tard des cas où ces conditions ne se trouvent pas réalisées. Pour le moment, supposons les conditions (23) vérifiées. L'inégalité (21) s'écrit alors, une fois choisi λ comme l'indique la formule (22) :

$$\begin{aligned} &\lambda\left[T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f''}\right)\right] \\ &\quad < [\varepsilon(r) + (1-\lambda)\varepsilon_1(r)]T(r, f') + \overline{N}(r, f) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r), \end{aligned} \tag{24}$$

et il est bien facile de minorer l'expression entre crochets du premier membre de cette inégalité, en utilisant l'inégalité (6) : l'inégalité (24) sera *a fortiori* vérifiée si l'on remplace l'expression étudiée par

$$pT(r, f) - \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) - m\left(r, \frac{f'}{F}\right) - \log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right| - p\log\frac{2}{d}.$$

Rappelons que $F(x)$ est le produit des fonctions $f(x) - a_i$, et que d est le minimum de la distance sphérique des a_i pris deux à deux.

Introduisons la somme des défauts des quantités a_i; soit δ cette somme. D'après la définition des défauts, on a l'inégalité

$$pT(r, f) - \sum_{i=1}^{p} N\left(r, \frac{1}{f - a_i}\right) > [\delta - \varepsilon_2(r)]T(r, f),$$

où $\varepsilon_2(r)$ est une fonction du même type que $\varepsilon(r)$.

Enfin, désignons par $\delta(\infty)$ le défaut de l'infini pour la fonction $f(x)$. On a l'inégalité

$$\overline{N}(r, f) < [1 - \delta(\infty) + \varepsilon_3(r)]T(r, f).$$

Les différentes remarques développées à partir de l'inégalité (24) montrent que celle-ci entraîne *a fortiori* l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} [\lambda\delta + \delta(\infty) - 1]T(r, f) < &- N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r) + [\varepsilon(r) + (1-\lambda)\varepsilon_1(r)]T(r, f') \\ &+ [\lambda\varepsilon_2(r) + \varepsilon_3(r)]T(r, f) \\ &+ \lambda\left[m\left(r, \frac{f'}{F}\right) + \log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right| + p\log\frac{2}{d}\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Dans l'inégalité (25), on peut *a fortiori* supprimer le premier terme du second membre. Cette suppression effectuée, divisons les deux membres par $T(r, f)$ et faisons tendre r vers l'infini *en évitant les intervalles extraordinaires si ceux-ci existent*. Étudions ce que donne alors le deuxième membre.

Le premier terme est supprimé.

Le deuxième devient $\frac{S(r)}{T(r, f)}$, donc tend vers zéro.

Le troisième est un produit de deux facteurs; le premier facteur tend vers zéro; le deuxième, devenu $\frac{T(r, f')}{T(r, f)}$, a ses valeurs limites majorées par 2 (*voir* n° 16).

Le quatrième tend vers zéro.

Le cinquième tend aussi vers zéro, car $\frac{m\left(r, \frac{f'}{F}\right)}{T(r, f)}$ tend vers zéro; on s'en aperçoit en utilisant l'inégalité (14) pour l'étude du numérateur de cette fraction.

En résumé, ce qu'est devenu le deuxième membre de (25) tend vers zéro. D'où résulte que $\lambda\delta + \delta(\infty) - 1$ ne peut être que négatif ou nul.

Résumons dans l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et possédant des valeurs finies exceptionnelles au sens de Nevanlinna; on désigne par δ la somme de leurs défauts, et par $\delta(\infty)$ le défaut (éventuel) de l'infini* (1).

On suppose que la dérivée $f'(x)$ admet zéro, et d'autres valeurs finies comme valeurs exceptionnelles. On désigne par $\delta'_a(0)$ le défaut absolu de zéro, et par δ'_a la somme des défauts absolus des autres valeurs finies.

Si δ'_a est inférieur ou égal à 1, et si $\delta'_a + \delta'_a(0)$ est supérieur à 1, alors on a l'inégalité

$$\delta[\delta'_a + \delta'_a(0) - 1] \leqq [1 - \delta(\infty)]\delta'_a(0). \tag{26}$$

20. *Cas particulier.* — Supposons $\delta(\infty)$ égal à 1 (ce qui, par exemple, est le cas des fonctions entières). Les conditions du théorème précédent sont inapplicables, puisque l'inégalité (26) ne peut être vérifiée. D'où la propriété suivante :

THÉORÈME III. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe telle que le défaut de l'infini est égal à 1.*

L'une au moins des circonstances suivantes se présente obligatoirement :

Ou bien la fonction $f(x)$ n'a aucune valeur exceptionnelle finie (au sens de Nevainnan);

---

(1) En examinant de plus près le passage où $\delta(\infty)$ s'introduit dans la démonstration, on constate que l'on peut tenir compte des pôles comme s'ils étaient tous simples: on pourrait donc ici désigner par $\delta(\infty)$ ce qu'on pourrait appeler le *défaut réduit* de l'infini.

Ou bien sa dérivée $f'(x)$ n'admet pas zéro comme valeur exceptionnelle ;

Ou bien la somme des défauts (absolus) des valeurs exceptionnelles finies de $f'(x)$ ne surpasse pas 1.

Remarquons que si $f(x)$ est une fonction entière, cette dernière conclusion est évidente ; en effet, pour $f'(x)$ aussi, l'infini aurait pour défaut l'unité : il en résulterait la dernière conclusion, comme application du théorème de Nevanlinna sur la limitation à 2 de la somme des défauts.

21. Dans le théorème du n° 19, nous formulons deux hypothèses sur δ'_a et $\delta'_a(0)$. Plaçons-nous maintenant dans l'un des cas non examinés, *celui où δ'_a est supérieur à* 1. On peut aussi supposer δ'_a égal à 1 dans les raisonnements qui vont suivre.

Nous ne pouvons plus employer la méthode du n° 19. Étudions à nouveau l'inégalité (19).

Dans son premier membre, nous pouvons *a fortiori* remplacer $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ par $\delta'_a N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$; dans son deuxième membre, nous pouvons aussi substituer à $\overline{N}(r, f)$ l'expression majorante $[1 - \delta(\infty) + \varepsilon_3(r)]T(r, f)$, nous pouvons encore supprimer le deuxième terme, négatif ou nul, $-N\left(r, \frac{1}{f''}\right)$. D'où finalement l'inégalité simplifiée suivante :

$$\delta'_a\left[T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] - [1 - \delta(\infty)]T(r, f) < \varepsilon(r)T(r, f') + \varepsilon_3(r)T(r, f) + S(r).$$

Introduisons, comme plus haut, l'inégalité (6) : dans le premier membre de l'inégalité précédente, nous pouvons *a fortiori* remplacer le coefficient de δ'_a par

$$[\delta - \varepsilon_2(r)]T(r, f) - m\left(r, \frac{f'}{F}\right) - \log\left|\frac{F(0)}{f'(0)}\right| - p\log\frac{2}{d},$$

en conservant les notations du n° 19.

D'où finalement l'inégalité suivante :

$$[\delta\delta'_a + \delta(\infty) - 1]T(r, f) < S_2(r),$$

où $S_2(r)$ est négligeable devant $T(r, f)$, pour les grandes valeurs de r, sauf peut-être pour les intervalles extraordinaires, en cas d'existence de ceux-ci.

Il en résulte immédiatement que le coefficient de $T(r, f)$ dans l'inégalité précédente est négatif ou nul. D'où le

THÉORÈME IV. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et telle qu'il existe des valeurs exceptionnelles finies ; on désigne par δ la somme de leurs défauts, et par $\delta(\infty)$ le défaut de l'infini (ce défaut peut être nul).*

On suppose en outre que la dérivée $f'(x)$ possède des valeurs finies et différentes de zéro comme valeurs exceptionnelles, et que la somme δ'_a de leurs défauts (absolus) est au moins égale à 1. *Alors, entre δ, $\delta(\infty)$ et δ'_a on a l'inégalité*

$$\delta\delta'_a + \delta(\infty) \leq 1. \tag{27}$$

22. En particulier, on a le théorème suivant :

THÉORÈME V. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et telle que l'infini a pour défaut* 1. *L'une au moins des circonstances suivantes est obligatoire :*

Ou bien la fonction $f(x)$ n'a pas de valeur finie exceptionnelle;

Ou bien, si l'on considère les valeurs finies et différentes de zéro, qui sont exceptionnelles pour la dérivée $f'(x)$, la somme de leurs défauts (absolus) est inférieure à 1.

23. *Remarque.* — Dans l'étude faite au n° 21, nous avons utilisé l'inégalité (19) en remplaçant, dans son premier membre, $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ par l'expression $\delta'_a N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$, qui lui est supérieure ou égale.

On peut améliorer le résultat, obtenu sous forme de l'inégalité (27), en conservant à $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ son coefficient. On écrit alors

$$\delta'_a\left[T(r, f') - N\left(r, \frac{1}{f'}\right)\right] + (\delta'_a - 1)N\left(r, \frac{1}{f'}\right) < \varepsilon(r)T(r, f') + \overline{N}(r, f) + S(r),$$

en supprimant toujours l'indice $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$.

Ceci posé introduisons la quantité :

$$\omega = \underline{\lim} \frac{N\left(r, \frac{1}{f'}\right)}{T(r, f)},$$

de sorte que l'on a

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) > [\omega - \varepsilon_4(r)]T(r, f),$$

où $\varepsilon_4(r)$ tend vers zéro lorsque r augmente indéfiniment.

En terminant comme au n° 19, c'est-à-dire en faisant tendre r vers l'infini en dehors des intervalles extraordinaires, on obtient l'inégalité suivante :

$$\delta\delta'_a + \delta(\infty) + \omega(\delta'_a - 1) \leq 1 \tag{27'}$$

plus précise que l'inégalité (27), lorsque δ'_a est supérieur à 1, et ω différent de zéro.

Cette nouvelle inégalité peut être, à son tour, améliorée dans le cas où les intervalles extraordinaires n'existent pas, comme par exemple dans le cas des fonctions d'ordre fini.

En effet, au lieu de faire tendre r vers l'infini d'une façon quelconque en dehors des intervalles extraordinaires, on peut faire choix d'une suite de valeurs de r pour lesquelle le rapport $\frac{N\left(r, \frac{1}{f}\right)}{T(r, f)}$ tend vers sa limite maxima, qui est précisément $1 - \delta'_r(0)$, d'après la notation des défauts relatifs. D'où, dans ce cas, l'inégalité

$$\delta\delta'_a + \delta(\infty) + (\delta'_a - 1)[1 - \delta'_r(0)] \leq 1. \tag{27'}$$

24. *Deuxième application : étude des défauts relatifs.* — Sauf dans les toutes dernières lignes qui précèdent, les défauts relatifs ne se sont pas introduits dans les applications des inégalités obtenues dans le premier chapitre de ce Mémoire. Nous sommes tout naturellement amenés à cette introduction, si nous utilisons directement l'inégalité (8) du théorème I.

Désignons par $\delta(\infty)$ le défaut de l'infini pour la fonction $f(x)$, par δ la somme des défauts des quantités a_i pour $f(x)$, et par δ'_r la somme des défauts *relatifs* des quantités b_j (qui, rappelons-le, sont finies et différentes de o) pour la dérivée $f'(x)$.

Si, dans l'inégalité (8) nous supprimons, par simplification, l'expression entre crochets du second membre, laquelle est positive ou nulle, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$[\delta(\infty) - 1 + q\delta - q + \delta'_r]T(r, f) < \varepsilon(r)T(r, f) + S_1(r),$$

où $\varepsilon(r)$ tend vers zéro quand r tend vers l'infini, et où $S_1(r)$ donné par la formule (15), est en général négligeable devant $T(r, f)$.

Faisant tendre r vers l'infini en dehors des intervalles extraordinaires, on obtient le théorème suivant :

Théorème VI. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et possédant des valeurs exceptionnelles finies; on désigne par δ la somme de leurs défauts, et par $\delta(\infty)$ le défaut (qui peut être nul) de l'infini.*

Si l'on considère q quantités finies et différentes de o, la somme δ'_r de leurs défauts relatifs satisfait à l'inégalité

$$\delta'_r \leq q(1 - \delta) + 1 - \delta(\infty). \tag{28}$$

En particulier, tout défaut relatif est majoré par $2 - \delta(\infty)$.

25. *Cas particulier.* — Supposons que $\delta(\infty)$ et δ soient égaux à 1 (ce qui est le maximum). Alors *tout défaut relatif est négatif ou nul.* Nous avons vu plus haut (n° 17) qu'un défaut relatif peut être négatif.

Supposons en outre que notre fonction $f(x)$ est dépourvue d'intervalles extraordinaires. Au n° 18, nous avons vu que par suite de cet ensemble d'hypothèses, les défauts relatif et absolu sont identiques.

D'où le théorème suivant :

THÉORÈME VII. — *Soit $f(x)$ une fonction méromorphe dans le plan, et dépourvue d'intervalles extraordinaires. On suppose que l'infini a pour défaut* 1, *et qu'il existe un ensemble de quantités finies pour lesquelles la somme des défauts vaut* 1.

Dans ces conditions, la dérivée $f'(x)$ ne peut pas avoir de valeur finie autre que zéro, comme valeur exceptionnelle au sens de Nevanlinna.

C'est par exemple le cas de la fonction exponentielle.

26. L'inégalité (28) a été obtenue par utilisation de l'inégalité (8), simplifiée au préalable par la suppression, dans son second membre, de l'expression entre crochets. On pourrait aussi tenir compte de cette expression lorsque q surpasse 1.

Il est également possible d'obtenir d'autres propriétés, en utilisant plus directement les inégalités (6) et (7), qui sont à l'origine de l'inégalité (8); pour terminer, indiquons l'une de ces utilisations.

Soit b une constante finie différente de zéro. L'inégalité (7) donne en particulier

$$T(r, f') < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f'-b}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r),$$

d'où, d'après la notation des défauts absolus :

$$[1 - \varepsilon(r)]\,\delta'_a(b)\,T(r, f') < \overline{N}(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S(r)$$

[qui est, en somme, un cas particulier de l'inégalité (19)].

Utilisons maintenant l'inégalité (6) : dans le premier membre de l'inégalité qui précède, nous pouvons *a fortiori*, d'après (6), remplacer $T(r, f')$ par l'expression :

$$[\delta - \varepsilon_1(r)]\,T(r, f) + N\left(r, \frac{1}{f''}\right) - S_1(r),$$

où δ désigne la somme des défauts des quantités finies a_i pour la fonction $f(x)$. On en déduit l'inégalité :

$$[\delta\delta'_a(b) + \delta(\infty) - 1]\,T(r, f) < [1 - \delta'_a(b)][1 - \varepsilon(r)]\,N\left(r, \frac{1}{f'}\right) - N\left(r, \frac{1}{f''}\right) + S_2(r),$$

dans laquelle $\varepsilon(r)$ tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini, ainsi qu'en général le rapport $\frac{S_2(r)}{T(r, f)}$.

On simplifie l'inégalité précédente par la suppression de l'indice $N\left(r, \frac{1}{f''}\right)$; en outre, on majore $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ en le remplaçant par $[1 - \delta'_a(0) + \varepsilon_1(r)]\,T(r, f)$.

Finalement, en faisant tendre r vers l'infini en dehors des intervalles extraordinaires, il vient l'inégalité suivante :

$$(29) \qquad (1+\delta)\,\delta'_a(b)+\delta'_r(o)\,|1-\delta'_a(b)|+\delta(\infty)\leq 2,$$

faisant intervenir, pour la dérivée $f'(x)$, le défaut absolu de la constante b différente de zéro, et le défaut relatif de zéro.

27. Signalons encore d'autres possibilités : jusqu'ici l'infini intervient par son défaut, dans les inégalités obtenues. Ceci provient notamment de ce que l'inégalité (8) comporte l'indice $\overline{N}(r, f)$.

Ce n'est pas le cas de l'inégalité analogue (17), qui donnera donc naissance à une relation d'inégalité faisant intervenir la somme des défauts des quantités finies a_i pour la fonction $f(x)$, la somme des défauts relatifs des quantités b_j finies et différentes de zéro pour la dérivée $f'(x)$, ainsi que deux autres défauts de qaantités finies, pour cette même dérivée.

28. Enfin, comme il a été indiqué dans l'introduction, toute la théorie développée dans ce Mémoire peut être reprise, en substituant à la dérivée première $f'(x)$ une combinaison linéaire et homogène quelconque de la fonction $f(x)$ et de quelques-unes de ses dérivées successives (1).

---

(1) *Voir* un résultat particulier, utilisant la notion de défaut relatif, dans A. RAUCH, *Deux remarques sur les fonctions entières d'ordre fini* (*Bull. Soc. Math.*, t. LXXII, 1944, pp. 93-96).

SUR

L'ENSEMBLE DE PUISSANCES D'UNE LOI DE PROBABILITÉ

PAR M. W. DOEBLIN (¹).

1. *Introduction.* — Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes ayant la même loi de probabilité $\mathcal{L}$. De nombreux auteurs ont étudié depuis presque deux cents ans la forme de la loi de probabilité de $S_n = \sum_1^n X_i$, ou, ce qui revient au même, la forme de la fonction de répartition $F_n(x)$ de S_n, lorsque $n \to \infty$. Ce problème peut être considéré comme résolu à l'heure actuelle (au moins en première approximation) et ne fait pas l'objet de ce mémoire. Les premières recherches avaient pour but de montrer que, sous des hypothèses très larges, la loi de probabilité de $\frac{(S_n - n\mathcal{E}(X))}{\sqrt{n}}$ converge vers la

(¹) W. Doeblin, mort en 1940 en combattant pour la France, s'était fait connaître par sa Thèse de Doctorat (mars 1938), puis, par une série de mémoires consacrés au Calcul des Probabilités. Le nombre et l'importance des travaux qu'il a pu mener à bien dans ce court intervalle, permet de mesurer la perte que la Science a faite en sa personne. Certains mathématiciens s'intéressent surtout aux questions dont la portée est la plus grande. Doeblin était plutôt de ceux qui s'attachent aux problèmes les plus difficiles et les résolvent. Ceci ressort de tous ses travaux et, en particulier du mémoire posthume publié ici. On y trouvera la démonstration de résultats énoncés par W. Doeblin dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*.

On devra, pour juger équitablement ce mémoire se souvenir que l'auteur n'a pu le corriger et que certaines imperfections de détail sont dues à cette circonstance. Je remercie ici M. Michel Loève qui a fait une première lecture de ce mémoire, M. Fortet, qui a bien voulu me signaler quelques légères corrections de forme, et surtout un ami anonyme de l'auteur qui a introduit avec discrétion de nombreuses améliorations de détail, mais qui a dû, de crainte de trahir la pensée de l'auteur, se résigner à laisser subsister quelques lacunes et bien des obscurités

Une suite de ce mémoire, en ce moment à la révision, paraîtra plus tard si son état d'achèvement très imparfait le permet (Note de M. Maurice Fréchet).

loi de Gauss; toutefois l'exemple de la loi de Cauchy montrait qu'il pouvait y avoir d'autres lois-limites. Dans son livre *Calcul des Probabilités* (²) M. P. Lévy a indiqué toute une famille de lois de probabilité, les lois stables, qui sont, lorsque $\mathcal{L}$ satisfait à certaines conditions, les limites des lois de $\frac{(S_n - a_n)}{b_n}$, a_n et b_n étant choisis convenablement. Le même auteur montrait plus tard (³) que si $b_n \to \infty$ et $\frac{b_{n+1}}{b_n} \to 1$, et si pour une suite d'entiers $\{n_p\}$ la loi de $\frac{(S_{n_p} - a_{n_p})}{b_{n_p}}$ tend vers une loi limite, celle-ci est indéfiniment divisible, et M. Khintchine (⁴) a prouvé que toutes les lois indéfiniment divisibles peuvent être obtenues de cette façon.

Une expression asymptotique de la loi de S_n a été indiquée dans notre Note « Étude de l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité » (⁴ᵃ).

Toutefois, l'étude dans le cas général de l'ensemble des lois de S_n, lorsque n varie, et de l'ensemble des lois I, limites de lois de $(S_{n_p} - a_{n_p})\, b_{n_p}^{-1}$, a été à peine ébauchée. On possède seulement sur ce sujet quelques remarques que P. Lévy a consacrées dans ses livres à ce qu'il appelle le groupe d'une loi de probabilité. C'est cette lacune que nous nous sommes efforcé de combler dans nos recherches sur « l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité » dont la première partie est exposée dans ce Mémoire (⁵).

2. *L'espace des classes de lois de probabilité.* — Soient $\mathcal{L}$ la loi de probabilité d'une variable aléatoire, $F(x)$ sa fonction de répartition,

$$\Pr\{|X| > x\} = 1 - F(x+0) + F(-x-0).$$

On appelle dispersion pour la probabilité α d'une variable aléatoire X ou d'une loi de probabilité $\mathcal{L}$ la longueur du plus petit intervalle fermé auquel $\mathcal{L}$ affecte une probabilité $\geq \alpha$. Nous noterons $(a^2\mathcal{L} + b)$ la loi de probabilité de la variable aléatoire $a^2X + b$, dont la fonction de répartition est $F(xa^{-2} - ba^{-2})$. Les lois $(a^2\mathcal{L} + b)$ sont dites du même type (généralisé) que $\mathcal{L}$; leur ensemble, si a et b varient $(a \neq 0)$, s'appelle, suivant M. A. Khintchine, la classe $K[\mathcal{L}]$ de $\mathcal{L}$ (⁶).

La courbe $y = F(x)$ n'est pas nécessairement continue, elle le devient si à chaque valeur de x pour laquelle $F(x)$ est discontinue, nous faisons correspondre le segment $F(x-0) \leq y \leq F(x+0)$. La courbe Γ ainsi obtenue est

---

(²) Gauthier-Villars, 1925.

(³) *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier-Villars, 1937.

(⁴) *Zur Theorie der unendlich-teilbaren Verteilungsgesetze* (*Rec. Math.*, Moscou, t. 1, nouvelle série, 1937, p. 71-120).

(⁴ᵃ) *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 206, 1938, p. 718-20.

(⁵) La plupart des théorèmes démontrés dans ce qui suit ont été énoncés dans deux Notes aux *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences* de Paris, le 31 janvier et le 7 mars 1938.

(⁶) *Mitt. Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk*, t. 1, 1937, p. 258-261.

manifestement coupée en un point et un seul par n'importe quelle parallèle à la droite $x+y=0$. Deux lois $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ étant ainsi représentées par deux courbes Γ et Γ' que la droite $x+y=c$ coupe en A et A', nous appellerons avec M. P. Lévy (2) distance $d[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$ de ces deux lois, le maximum de $\overline{AA'}$ quand c varie de $-\infty$ à $+\infty$. Ce maximum est sûrement atteint à cause de la continuité des courbes Γ et Γ'. $d[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$ satisfait à l'inégalité triangulaire, et ne s'annule que pour $\mathcal{L}=\mathcal{L}'$. On dit qu'une suite de lois $\mathcal{L}_n$ converge vers une loi limite L, si les fonctions de répartition $F_n(x)$ convergent vers la fonction de répartition $F(x)$ de $\mathcal{L}$ en chaque point de continuité de $F(x)$ (ceci correspond à la convergence en mesure) et l'on a $d[\mathcal{L}, \lim \mathcal{L}_n]=\lim d[\mathcal{L}, \mathcal{L}_n]$. Il est bien connu qu'un ensemble de fonctions de répartition est compact (ou forme une famille normale) si pour une certaine fonction $\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$, on peut écrire

$$1-F(x)+F(-x)<\varepsilon(x),$$

quelle que soit la fonction $F(x)$ appartenant à l'ensemble considéré.

Envisageons maintenant une suite infinie de classes $K[\mathcal{L}_1], \ldots, K[\mathcal{L}_n], \ldots$; il peut arriver que, pour un choix convenable des $\mathcal{L}_n$ de $K[\mathcal{L}_n]$, $\mathcal{L}_n$ converge vers une loi $\mathcal{L}$. Si $\mathcal{L}$ n'est pas du type de la loi impropre dont la fonction de répartition est $E(x)=0$ si $x<0$, et $=1$, si $x>0$, nous dirons que $K[\mathcal{L}]$ est la limite de $K[\mathcal{L}_n]$. On prouve alors simplement (7) qu'on ne peut pas trouver une autre suite de lois $\mathcal{L}'_n$ de $K[\mathcal{L}_n]$ convergeant vers une loi $\mathcal{L}'$ non impropre avec $K[\mathcal{L}']\neq K[\mathcal{L}]$. Par contre, on peut trouver dans toute classe $K[\mathcal{L}_n]$ une loi $\mathcal{L}''_n$ avec $F''_n\left(-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, $F''_n\left(\frac{1}{n}\right)>1-\frac{1}{n}$ et les lois $\mathcal{L}''_n$ convergent vers la loi impropre. La classe $K[E]$ joue donc ici un rôle tout à fait particulier; nous dirons que $K[\mathcal{L}_n]$ converge vers $K[E]$ seulement dans le cas où aucune sous-suite dénombrable $\{K[\mathcal{L}_{n_k}]\}$ ne converge vers une classe limite non impropre.

Étant donné un ensemble de classes $\neq K[E]$, nous dirons que $K[\mathcal{L}]$, $(\neq K[E])$ est une classe d'accumulation de cet ensemble s'il existe une suite infinie de classes de l'ensemble convergeant vers $K(\mathcal{L})$. Nous dirons qu'un ensemble de classes (différant de $K[E]$) est compact si toute suite dénombrable de classes de l'ensemble a au moins une classe d'accumulation différant de la classe impropre. L'ensemble des classes d'accumulation différentes de la classe impropre est appelé l'ensemble dérivé de l'ensemble.

Soient $\mathcal{L}\in K[F]$, $\beta[\mathcal{L}]=\beta(F)$ le maximum de $F(x+0)-F(x-0)$, $(\beta<1)$. Dans la classe $K[\mathcal{L}]$ nous allons choisir la loi $\mathcal{L}$ dont la médiane est nulle (il est facile de définir la médiane d'une façon univoque) et dont la dispersion pour la probabilité $\frac{(1+\beta)}{2}$ est $=1$. $\mathcal{L}'$ étant une loi quelconque, nous

(7) *Cf.* A. KHINTCHINE, *loc. cit.* (6).

appellerons écart $e[\mathcal{L}', \mathcal{L}]$ de la classe de $\mathcal{L}'$ à celle de $\mathcal{L}$ la borne inférieure des distances $d\big((a^2\mathcal{L}'+b), \overline{\mathcal{L}}\big)$ quand a et b varient. L'écart $e[\mathcal{L}', \mathcal{L}]$ est généralement différent de $e[\mathcal{L}, \mathcal{L}']$. Il a les propriétés suivantes : Si $K[\mathcal{L}_n] \to K[\mathcal{L}]$, $e[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}] \to 0$, et inversement; $e[\mathcal{L}', \mathcal{L}] \neq 0$ si $K[\mathcal{L}'] \neq K[\mathcal{L}]$. $K[\mathcal{L}_n] \to K[\mathcal{L}']$ entraîne $e[\mathcal{L}_n, \mathcal{L}] \to e[\mathcal{L}', \mathcal{L}]$.

L'espace $\mathfrak{K}$ des classes différentes de K[E], avec la définition de la limite que nous y avons donnée est un espace $\mathfrak{E}$ de M. Fréchet, c'est-à-dire à chaque point $K[\mathcal{L}]$ de cet espace nous pouvons faire correspondre une fonction $e[\mathcal{L}', \mathcal{L}]$ tendant vers zéro si, et seulement si, $\mathcal{L}' \to \mathcal{L}$. L'espace $\mathfrak{K}$ n'est pas distanciable, car nous verrons plus loin un exemple d'un ensemble qui n'est pas compact et qui est le dérivé d'un ensemble compact, et cela serait impossible dans un espace distancié.

Nous dirons qu'un ensemble de classes est fortement compact, s'il est compact ainsi que son ensemble dérivé. Notons que l'ensemble dérivé $\mathfrak{K}'$ d'un ensemble de classes $\mathfrak{K}$ est toujours fermé, comme on le vérifie aisément.

3. *Définition de l'ensemble de puissances.* — n étant un entier positif, on désigne par $\mathcal{L}^n$ la loi dont la fonction caractéristique est la $n^{\text{ième}}$ puissance de celle de $\mathcal{L}$ (c'est la loi de probabilité de S_n). L'ensemble des classes des lois $\mathcal{L}_n (n = 1, 2, \ldots)$ est appelé l'ensemble de puissances de la loi $\mathcal{L}$ (ou de la classe $K[\mathcal{L}]$) et désigné par $EP[\mathcal{L}]$ (M. P. Lévy l'appelle le groupe de cette loi).

4. On dit qu'une loi de probabilité I est indéfiniment divisible (ind. div.) si sa fonction caractéristique $\varphi(t)$ est de la forme

$$(1)\quad \left\{ \exp\left\{ iat - \sigma^2\frac{t^2}{2} + \int_{-\infty}^{0}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) dN^{(-)}(x) + \int_{0}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) dN^{(+)}(x)\right\}\right.,$$

$$N^{(-)}(x) = \int_{-\infty}^{x-0} dN^{(-)}(x), \qquad -N^{(+)}(x) = \int_{x+0}^{\infty} dN^{(+)}(x).$$

Si I est ind. div., $[\varphi(t)]^n$ est la fonction caractéristique d'une loi de proba- que nous appellerons I^n.

Nous allons supposer dans tout ce qui suit que

$$K[\mathcal{L}] \neq K[E]$$

et que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) = \infty.$$

Les deux cas que nous écartons ainsi sont deux cas banals bien connus. Rappelons que si $K[\mathcal{L}] \neq K[E]$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x) < \infty$, $K[\mathcal{L}^n]$ converge si n augmente indéfiniment vers la classe de la loi de Gauss [*cf.* P. Lévy, *loc. cit.* (2)].

Soit $D_n(\alpha)$ la dispersion de $\mathcal{E}^n$ pour la probabilité α. Il résulte du théorème sur l'augmentation de la dispersion (8) que $D_n(\alpha)$ est au moins $O(\sqrt{n})$ pour $n \to \infty$. De plus, on a pour $n \geq n_0\,[\alpha; F(x)]$ les deux inégalités

$$(2) \qquad n\Pr\{|X| > \eta D_n(\alpha)\} < \frac{K(\alpha)}{\eta^2} \qquad (\eta < 1),$$

$$(3) \qquad n\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2\,dF(x) - n\left(\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\,dF(x)\right)^2 < K'(\alpha)D_n^2(\alpha),$$

démontrées dans notre mémoire « Sur les sommes d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes » (*Bull. Sc. Math.* t. 63, 1939, p. 23-32 et 35-64) que nous citerons dans ce qui suit par Var. Ind.

Si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,dF(x) = \infty,$$

on a

$$(4) \qquad n\left(\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\,dF(x)\right)^2 = o[D_n^2(\alpha)].$$

En effet, on a pour $o < C < D_n(\alpha)$

$$\left|\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\,dF(x)\right| < \left|\int_{-C}^{C} x\,dF(x)\right| + \left|\int_{D_n(\alpha)>|x|>C} x\,dF(x)\right|.$$

Choisissons C tel que $1 - F(C+o) + F(-C-o) < \varepsilon$. En appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\left|\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x\,dF(x)\right| < C + \varepsilon\sqrt{\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2\,dF(x)},$$

d'où résulte (4). Ceci permet de transformer (3) en

$$(3') \qquad n\int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2\,dF(x) < K'(\alpha)D_n^2(\alpha).$$

5. En appliquant le théorème principal de notre Mémoire cité, on obtient le

LEMME PRINCIPAL. — *Soit* T_n *un nombre* $\geq aD_n(\alpha)$ $(a > o)$, *soit* $I(x)$ *la fonction de répartition de la loi de probabilité définie par la fonction caractéristique* (1) *avec*

$$a = n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dF(xT_n), \qquad \sigma^2 = \frac{n}{T_n^2}\int_{-\eta_1 T_n}^{\eta_1 T_n} x^2\,dF(x),$$

$$dN^{(+)}(x) = n\,dF[xT_n], \quad \text{si } x > \eta_{1n}; \qquad dN^{(+)}(x) = o, \quad \text{si } x \leq \eta_{1n};$$

$$dN^{(-)}(x) = n\,dF[xT_n], \quad \text{si } x < -\eta_{1n}; \qquad dN^{(-)}(x) = o, \quad \text{si } x \geq -\eta_{1n};$$

(8) *Cf.* W. DOEBLIN et P. LÉVY, *Sur les sommes de variables aléatoires indépendantes à dispersions bornées inférieurement* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 202, 1936, pp. 2027-2029).

alors, si η_n tend suffisamment lentement vers zéro,

$$F_n(x T_n) = I_n[x + \theta\varphi(\eta_n)] + \theta'\varphi(\eta_n),$$

où

$$\varphi(\eta_n) \to 0, \qquad -1 < \theta, \quad \theta' < 1.$$

6. Théorème I. — *Si* $K[\mathcal{L}^{n_p}] \to K[\mathfrak{M}]$, *la fonction caractéristique d'une loi de* $K[\mathfrak{M}]$ *est*

$$\exp\left\{-\sigma^2\frac{t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)dN(x)\right\},$$

où

$$\sigma^2 = \lim_{\eta_1 \to 0}\ \overline{\lim_{p \to \infty}} \int_{|x| < \eta_1 D_{n_p}(\alpha)} x^2\, dF(x),$$

$$\int_x^{\infty} dN(x) = \underset{\text{(en mesure)}}{\text{limite}}\ n_p \Pr\{X > x\, D_{n_p}(\alpha)\} \qquad \text{pour } x > 0,$$

$$\int_{-\infty}^{x} dN(x) = \underset{\text{(en mesure)}}{\text{limite}}\ n_p \Pr\{X < x\, D_{n_p}(\alpha)\} \qquad \text{pour } x < 0,$$

α étant un nombre convenable.

Démonstration. — La dispersion pour la probabilité β de $\mathfrak{M}$, soit $d(\beta)$, est une fonction monotone de β. Nous pouvons choisir une valeur α de β avec $d(\alpha) \neq 0$, $d(\beta)$ étant continue pour $\beta = \alpha$. Montrons que si

$$\left(\frac{1}{T_{n_p}}\mathcal{L}^{n_p} - A_{n_p}\right) \to \mathfrak{M}, \tag{1'}$$

$\lim_{p \to \infty} D_{n_p}(\alpha)/T_{n_p}$ existe. De (1') résulte l'existence d'un intervalle (x_1, x_2), $x_2 - x_1 = d(\alpha + \varepsilon)$, tel que

$$\Pr\{x_1 - \varepsilon \leq S_{n_p}/T_{n_p} - A_{n_p} \leq x_2 + \varepsilon\} > \alpha,$$

donc

$$D_{n_p}(\alpha)/T_{n_p} \leq d(\alpha + \varepsilon) + 2\varepsilon;$$

d'autre part (1') entraîne, quel que soit u,

$$\Pr\{u \leq S_{n_p}/T_{n_p} - A_{n_p} \leq u + d(\alpha - \varepsilon) - \varepsilon\} < \alpha.$$

Par conséquent, $D_{n_p}(\alpha)/T_{n_p}$ tend vers une limite $\neq 0$. En appliquant alors le lemme principal on obtient immédiatement le théorème.

7. Théorème II. — $EP'[\mathcal{L}]$ *est fermé et composé uniquement de lois ind. div.* [*résultat dû à M. P. Lévy, loc. cit.* (3)]; *si* $\exp\{\psi(t)\}$ *est la fonction caractéristique d'une loi de* $EP'[\mathcal{L}]$, $\exp\{u\,\psi(t)\}$ *est aussi, quel que soit* $0 < u < \infty$, *la fonction caractéristique d'une loi de* $EP'[\mathcal{L}]$.

$EP'[\mathcal{L}]$ est fermé, étant l'ensemble dérivé d'un ensemble de classes. Si $K[\mathcal{L}^{n_j}] \to K[I]$, il suffit d'envisager $K[\mathcal{L}^{m_j}]$ où $m_j/n_j \to u$ et de tenir compte du lemme principal pour vérifier le reste de la proposition.

8. Théorème III. — *Pour que* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *contienne la loi ind. div.* I *dont la fonction caractéristique est* (1), *il faut et il suffit, si* I *n'est pas la loi de Gauss, qu'il existe une suite de nombres* $\{b_n\} \to \infty$, b_1 *étant un point de continuité de* $\mathrm{N}^{(+)}(x)$ *et de* $\mathrm{N}^{(-)}(-x)$ [*avec* $|\mathrm{N}^{(+)}(b_1)| + \mathrm{N}^{(-)}(-b_1) > 0$] *telle que, en tout point de continuité de* $\mathrm{N}(x)$,

$$(5) \qquad \frac{1 - \mathrm{F}(xb_n)}{1 - \mathrm{F}(b_n) + \mathrm{F}(-b_n)} \to \frac{|\mathrm{N}^{(+)}(xb_1)|}{|\mathrm{N}^{(+)}(b_1)| + \mathrm{N}^{(-)}(-b_1)} \qquad (x > 0),$$

$$(6) \qquad \frac{\mathrm{F}(xb_n)}{1 - \mathrm{F}(b_n) + \mathrm{F}(-b_n)} \to \frac{\mathrm{N}^{(-)}(xb_1)}{|\mathrm{N}^{(+)}(b_1)| + \mathrm{N}^{(-)}(-b_1)} \qquad (x < 0)$$

et

$$(7) \qquad \lim_{\tau_1 \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{|\mathrm{N}^{(+)}(b_1)| + \mathrm{N}^{(-)}(-b_1)}{1 - \mathrm{F}(b_n) + \mathrm{F}(-b_n)} \frac{1}{b_n^2} \int_{-\tau_1 b_n}^{\tau_1 b_n} x^2 \, d\,\mathrm{F}(x) = \sigma^2.$$

Corollaire. — *Pour que la loi ind. div. différente de la loi de Gauss dont la fonction caractéristique est* (1) *soit un élément de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, *il faut et il suffit qu'on ait* (5), (6) *et* (7) *où* $\mathrm{F}(-xb_n)$ et $1 - \mathrm{F}(xb_n)$ *peuvent être respectivement remplacés par* $\mathrm{N}^{(-)}(-xb_n)$ et $|\mathrm{N}^{(+)}(xb_n)|$.

Démonstration. — Si I est ind. div., différente de la loi de Gauss, on peut prendre b_1 tel que l'indique le théorème. En écrivant les conditions du théorème I et en éliminant n_ρ, on obtient (5)-(7). C. Q. F. D.

Notons parmi les lois $\mathcal{L}$ avec $\mathcal{L} \in \mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ les lois stables et semi-stables (9). Ces dernières sont caractérisées par le fait que $\frac{b_n}{b_{n-1}}$ tend vers une limite.

9. Théorème IV. — (*Condition pour que la loi de Gauss fasse partie de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$) [condition établie par P. Lévy, *loc. cit.* (3)]. *Soit* $\mathcal{G}$ *la loi de Gauss; pour que* $\mathrm{K}[\mathcal{G}] \in \mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, *il faut et il suffit que*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 \Pr\{|\mathrm{X}| > x\}}{\int_x^x t^2 \, d\,\mathrm{F}(t)} = 0.$$

Démonstration. — Soit $\{x_\rho\}$ une suite de nombres $\to \infty$, auquels nous faisons correspondre des nombres n_ρ (10) par la convention

$$n_\rho \Pr\{|\mathrm{X}| > x_\rho\} \simeq 1.$$

Pour que $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{n_\rho}] \to \mathrm{K}[\mathcal{G}]$, il faut (Var. Ind. § 3) que

$$\frac{n_\rho}{x_\rho^2} \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2 \, d\,\mathrm{F}(t) \to \infty,$$

(9) *Cf.* P. Lévy, *loc. cit.* (3).

(10) On prendra pour n_ρ l'entier le plus voisin de $[\Pr\{|\mathrm{X}| > x_\rho\}]^{-1}$.

c'est-à-dire que

$$\varphi(x_\rho)=\frac{x_\rho^2\Pr\{|X|>x_\rho\}}{\int_{-x_\rho}^{x_\rho}t^2\,dF(t)}\to 0.$$

D'autre part, si pour une suite $\{x_\rho\}$, on a $\varphi(x_\rho)\to 0$, nous pouvons trouver une suite d'entiers m_ρ tels que

$$m_\rho\Pr\{|X|>x_\rho\}\to 0,\qquad x_\rho^{-2}m_\rho\int_{-x_\rho}^{x_\rho}t^2\,dF(t)\to\infty,$$

ce qui entraîne (*cf.* Var. Ind. § 3) $K[\mathcal{L}^{m_\rho}]\to K[\mathcal{G}]$.

Corollaire. — *Pour que*

$$K[\mathcal{L}^n]\to K[\mathcal{G}],$$

il faut et il suffit que

$$(7')\qquad \overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{x^2\Pr\{|X|>x\}}{\int_{-x}^{x}t^2\,dF(t)}=0.$$

Démonstration. — La nécessité de la condition (7') résulte de la démonstration donnée ci-dessus. Pour que $K[\mathcal{L}^n]\to K[\mathcal{G}]$, il suffit que, quel que soit η, $n\Pr\{|X|>\eta D_n(\alpha)\}\to 0$. Or, soit

$$\gamma_n=n\Pr\{|X|>\eta D_n(\alpha)\}.$$

On a [formule (3')]

$$\frac{n}{D_n^2(\alpha)}\int_{-\eta D_n(\alpha)}^{\eta D_n(\alpha)}x^2\,dF(x)<K''(\alpha),$$

d'où, si $\varphi(x)\to 0$,

$$\gamma_n\eta^2<K''(\alpha)\varphi[\eta D_n(\alpha)]\to 0,$$

γ_n tendant donc vers zéro, quel que soit η, on a $K[\mathcal{L}^n]\to K[\mathcal{G}]$.

C. Q. F. D.

10. Lemme. — *Si*

$$n\int_{-\eta D_n(\alpha)}^{\eta D_n(\alpha)}x^2\,dF(x)>\varepsilon D_n^2(\alpha),$$

où $\eta\geq p^{-\frac{p'}{2}}$, *alors il existe un nombre* n' *avec*

$$np^{-p'}<n'<n,$$

tel que la classe $K[\mathcal{L}^{n'}]$ *est d'autant plus voisine de* $K[\mathcal{G}]$ *que* $\sqrt{p}\,\varepsilon$ *et* n *sont plus grands. Si* $EP'[\mathcal{L}]$ *contient la loi* I *de fonction caractéristique* (1) *avec* $\sigma\neq 0$, *alors* $\mathcal{G}\in EP'[\mathcal{L}]$.

Démonstration. — Posons $L_i = p^{-\frac{i}{2}} D_n(\alpha)$ $(i = 0, 1, \ldots, p)$; en vertu de (3'), nous pouvons écrire (pour $n > n_0$)

$$\frac{K D_n^2(\alpha)}{n} > \int_{-D_n(\alpha)}^{D_n(\alpha)} x^2 \, dF(x) = I_1 + I_2 + \ldots + I_p + \int_{-L_p}^{L_p} x^2 \, dF(x),$$

où

$$I_i = \int_{L_i < |x| \leq L_{i-1}} x^2 \, dF(x).$$

Il y a au moins un $I_j < p^{-1} K D_n^2(\alpha) n^{-1}$, d'où

$$\Pr\{L_{j-1} \geq |X| > L_j\} < p^{-1} K D_n^2(\alpha) n^{-1} L_j^{-2} = K p^{j-1} n^{-1}.$$

D'autre part, on a [*voir* (2)]

$$\Pr\{|X| > L_{j-1}\} = \Pr\left\{|X| > p^{-\frac{j-1}{2}} D_n(\alpha)\right\} < K(\alpha) p^{j-1} n^{-1},$$

donc, à l'aide de l'avant-dernière inégalité

$$\Pr\{|X| > L_j\} < K'(\alpha) n^{-1} p^{j-1}.$$

Soit $n' \approx p^{-j+\frac{1}{2}} n$; la quantité

$$n' \Pr\{|X| > L_j\} + L_j^2 n'^{-1} \left[\int_{-L_j}^{L_j} x^2 \, dF(x)\right]^{-1} = O\left(\frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\varepsilon \sqrt{p}}\right)$$

tend vers zéro si $\varepsilon \sqrt{p} \to \infty$. Il en résulte la première partie du lemme en vertu d'une proposition connue (11). La deuxième partie en découle aussi facilement en tenant compte du théorème I.

11. Théorème V. — *Si* $K[\mathcal{L}^n]$ *converge vers une classe limite* (*non impropre*), *celle-ci est soit la classe de Gauss, soit celle d'une autre loi quasi-stable. La condition nécessaire et suffisante pour le dernier cas est qu'on puisse écrire pour* $x \to \infty$,

$$F(-x) = h_1(x) x^{-\alpha}, \qquad 1 - F(x) = h_2(x) x^{-\alpha}$$

avec $h_i(kx)/h_i(x) \to 1$ *quel que soit* k *et que* $h_1/(h_1 + h_2)$ *tende vers une limite.*

---

(11) Soient $X_{n_1}, \ldots, X_{n_n}$ des variables aléatoires indépendantes.
Soit $\overline{X}_{n_i} = 0$ si $|X_{n_i}| > L_n$, et $= X_{n_i}$ si $X_{n_i} < L_n$, σ_{n_i} désignant l'écart-type de $\overline{X}_{n_i}$. Si

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr\{|X_{n_i}| > L_n\} + L_n^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_{n_i}^2\right)^{-1} \to 0,$$

la classe de la loi de $\sum_{i=1}^{n} X_{n_i}$ tend vers $K[\mathcal{G}]$. *Cf.* par exemple S. Bernstein, *Théorème limite du calcul des probabilités* (*Math. Ann.*, t. 97, 1927, p. 1-21).

Démonstration. — Supposons que $K[\mathcal{L}^n]$ converge vers une classe limite différente de $K[\mathcal{G}]$, définie par la loi I de fonction caractéristique (1).

Supposons en outre que X_1 et X_2 ont pour loi de probabilité la loi quasi-stable I; alors en vertu de la définition de ces lois, la loi de $\tau_1^2 X_1 + \tau_2^2 X_2$ est du même type que I, quels que soient τ_1 et τ_2. On démontre facilement [*cf.* p. ex. P. Lévy, *loc. cit.* (3)] que I est quasi stable si $K[\mathcal{L}^n] \to K[I]$. Si $K[I] \neq K[\mathcal{G}]$, le logarithme de la fonction caractéristique de I peut s'écrire, d'après les résultats classiques de P. Lévy, sous la forme (8)

$$(8) \qquad \varphi(t) = C_1 \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 2)$$

et de là, on déduit, en utilisant la démonstration du théorème III, la nécessité des conditions du théorème V.

Remarquons que la forme de $N(x)$ qui figure dans la dernière équation peut encore être déduite du théorème II, soit en montrant que la condition $K[I^u] = K[I]$ entraîne $u^{\alpha(u)} N^{(-)}(ux) = N^{(+)}(x)$, ce qui donne $\alpha(u/n) = \alpha(u) = \alpha$, soit en procédant de manière directe.

Avant de démontrer que les conditions indiquées sont suffisantes, nous allons établir le

LEMME. — *Soient* $k \geq 1$, $0 < \alpha < 2$; *l'inégalité*

$$(8') \qquad \Pr\{|X| > ku\} \leq k^{-\alpha} \Pr\{|X| > u\} \qquad \text{pour} \quad u > u_0$$

entraîne

$$(9) \qquad \overline{\lim_{x \to \infty}} \int_{-x}^{x} t^2 \, dF(t) / x^2 \Pr\{|X| > x\} \leq \frac{k^\alpha}{1 - k^{\alpha-2}}.$$

Démonstration du lemme. — u étant un nombre convenable entre u_0 et ku_0, nous pouvons écrire, pour $x > ku_0$,

$$x = k^l u,$$

$$\int_{-x}^{x} t^2 \, dF(t) = \int_{-u}^{u} t^2 \, dF(t) + \int_{u < |t| \leq ku} t^2 \, dF(t) + \ldots + \int_{k^{l-1}u < |t| \leq x} t^2 \, dF(t).$$

Pour $j < l$, on a

$$\int_{k^{j-1}u < |t| \leq k^j u} t^2 \, dF(t) < k^{2j} u^2 \Pr\{|X| > k^{j-1} u\}$$

et comme $\Pr\{|X| > k^{j-1}u\}$ est majoré en vertu de (8') par $k^{\alpha(l-j+1)} \Pr\{|X| > k^l u\}$, il vient

$$\int_{-x}^{x} t^2 \, dF(t) < \int_{-uk_0}^{uk_0} t^2 \, dF(t) + k^\alpha \Pr\{|X| > x\} x^2 \sum_{l=0}^{\infty} k^{l(\alpha-2)}.$$

Or,

$$x^2 \Pr\{|X|>x\} \geqq x^2 k^{-i\alpha} \Pr\{|X|>u\} = x^2 \left(\frac{x}{u}\right)^{-\alpha} \Pr\{|X|>u\}$$

en vertu de (8') et comme u est fixe et $\alpha<2$ par hypothèse, $x^2 \Pr\{|X|>x\}$ augmente indéfiniment avec x, de telle sorte que (8') entraine bien (9).

C. Q. F. D.

Il résulte de la démonstration, que pour $\eta_1 < k^{-l}$, on a

$$\int_{-\eta_1 x}^{\eta_1 x} t^2 dF(t) < C + \frac{k^2 k^{(\alpha-2)l}}{1-k^{\alpha-2}} x^2 \Pr\{|X|>x\}. \tag{11}$$

Revenons à la démonstration de la suffisance de nos conditions; n étant très grand, nous pouvons trouver un nombre x_n tel que

$$n \Pr\{|X|>x_n\} \simeq 1. \tag{12}$$

Appliquons le lemme principal, en écrivant x_n au lieu de T_n, à la loi de probabilité de S_n/x_n. Cette loi de probabilité est sensiblement celle d'une loi indéfiniment divisible (1) où σ^2 et $N(x)$ ont les valeurs résultant du lemme principal. Or, nous avons $\Pr\{|X|>x\} = [h_1(x)+h_2(x)]x^{-\alpha}$, $h_i(kx)/h_i(x)$ étant par hypothèse compris entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$ [pour $k<C$, $x>x(\varepsilon, C)$]. En prenant pour β un nombre quelconque entre 2 et α ($\alpha<\beta<2$), on aura

$$\Pr\{|X|>kx_n\} > \Pr\{|X|>x_n\} k^{-\beta}$$

et en posant $k=2$, il vient en vertu de (11) et (12), pour $\eta_1 < 2^{-\beta}$, $n>n(\eta_1)$,

$$\sigma^2 = \frac{n}{x_n}\int_{-\eta_1 x}^{\eta_1 x} t^2 dF(t) < 4\,\frac{2^{\beta-2}\eta^{\beta}}{1-2^{\beta-2}} < \varepsilon$$

et

$$|N^{+1}(u)| \simeq n \Pr\{X>ux_n\} \simeq \Pr\{X>ux_n\}/\Pr\{|X|>x_n\} \simeq k_1 u^{\alpha},$$

$K[\mathcal{L}^n]$ tend donc pour $n\to\infty$ vers la loi quasi stable (8), ce qui prouve la suffisance des conditions indiquées.

12. *Les lois universelles.* — Nous avons vu que toutes les lois de $EP'[\mathcal{L}]$ sont ind. div.; inversement, si nous nous donnons une loi ind. div. I, existe-t-il une loi $\mathcal{L}$ telle que $I \in EP'[\mathcal{L}]$? Ainsi que M. Khintchine l'a prouvé (12), la réponse est affirmative. Nous allons même montrer qu'il existe des lois que nous appelons des lois universelles dont l'ensemble de puissance a pour dérivé l'ensemble de toutes les lois ind. div.

(12) *Cf.* A. Khintchine, *loc. cit.* (6).

THÉORÈME VI. — *Un exemple d'une loi universelle est donné par la loi* U *dont la fonction caractéristique est de la forme*

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu^3}\left[\int_{\frac{k_\nu}{\nu}}^{\nu k_\nu}(e^{itx}-1)\,dN_\nu^{(+)}(k_\nu,x)+\int_{-\nu k_\nu}^{-\frac{k_\nu}{\nu}}(e^{itx}-1)\,dN_\nu^{(-)}(k_\nu,x)\right]\right\},$$

où $k_\nu = \exp\nu^3$ *et où l'ensemble des lois* L_ν *correspondant à*

$$\exp\left\{ita_\nu+\int_{-\infty}^{+\infty}(e^{itx}-1)\,dN_\nu(x)\right\}$$

est partout dense dans l'ensemble des lois ind. div. On peut supposer, et cela a été supposé dans la formule, que $dN_\nu(x)=0$ en dehors des intervalles $(1/\nu,\nu)$ et $(-\nu,-1/\nu)$ et que $|N_\nu^{(+)}(x)|$ et $|N_\nu^{(-)}(x)|<\nu$ (13).

Démonstration. — Soit J une loi ind. div., $J=\lim L_{n_p}$. Soit $t_p=\exp\{n_p^2\}$. Je dis que $K[J]=\lim_{p\to\infty} K[U^{t_p}]$. Soient $U_i\,(i=1,2,\ldots)$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi U. Considérons la fonction caractéristique de $\sum_1^{t_p} U_i/k_{n_p}$ qui est égale à $\varphi(t/k_{n_p})^{t_p}$. On a

$$\log\varphi(t/k_{n_p})^{t_p}=t_p\sum_{\nu<n_p}e^{-\nu^3}\int\cdots+t_p e^{-n_p^3}\int\cdots+t_p\sum_{\nu>n_p}\int\cdots$$

Or,

$$\left|t_p\sum_{\nu>n_p}e^{-\nu^3}\int\cdots\right|<2\sum_{\nu>n_p}\nu\,e^{-\nu^3}e^{n_p^2}\to 0,$$

$$\left|t_p\sum_{\nu<n_p}e^{-\nu^3}\int(e^{itxk_{n_p}^{-1}}-1)\,dN_\nu(xk_\nu^{-1})\right|$$

$$<t_p\sum_{\nu<n_p}2e^{-\nu^3}\nu^2\left|t\,\frac{k_\nu}{k_{n_p}}\right|<|t|\sum_{\nu=1}^{\infty}2\nu^2e^{-\nu^3}\exp\{n_p^2+(n_p-1)^3-n_p^3\}\to 0.$$

Donc, pour $|t|<T$ on a

$$\varphi_{n_p}(t)=\varphi\left(\frac{t}{k_{n_p}}\right)^{t_p}\to\exp\left\{\int(e^{itx}-1)\,dN_{n_p}(x)\right\}.$$

On en déduit immédiatement que les fonctions de répartition des grandeurs $k_{n_p}^{-1}\sum_1^{n_p}U_{n_p}+a_{n_p}$ convergent vers celle de J, ce qui démontre le théorème.

---

(13) Le lecteur vérifiera facilement qu'une telle suite de lois L_ν existe.

13. Théorème VII. — *Pour que* EP'$[\mathcal{L}]$ *soit vide, il suffit que*

$$\alpha = \lim_{l \to \infty} \underline{\lim}_{x \to \infty} \frac{\Pr\{|X| > lx\}}{\Pr\{|X| > x\}} \neq 0. \tag{13}$$

Démonstration. — Admettons que (13) soit satisfait et que K$[\mathcal{L}^{n_p}]$ converge vers une classe limite différente de K$[\mathcal{G}]$. Alors il existe un nombre l, une suite de nombres x_p et une suite d'entiers n_p tels que

$$n_p \Pr\{|X| > x_p\} \sim \beta, \qquad n_p \Pr\{|X| > l x_p\} < \beta \frac{\alpha}{2},$$

ce qui est contraire à (13). K$[\mathcal{L}^{n_p}]$ ne peut pas davantage converger vers K$[\mathcal{G}]$, car il résulte du lemme du n° 11 que (13) est incompatible avec

$$\underline{\lim}_{x \to \infty} \varphi(x) = \underline{\lim}_{x \to \infty} \frac{x^2 \Pr\{|X| > x\}}{\int_{-x}^{x} t^2 \, dF(t)} = 0.$$

14. Théorème VII'. — *Pour que* EP'$[\mathcal{L}]$ *soit vide, il faut et il suffit que, quelle que soit la fonction* $G(l)$ *donnée d'avance avec* $\lim_{l \to \infty} G(l) = 0$, *l'on ait*

$$\underline{\lim}_{x \to \infty} \varphi(x) \neq 0,$$

et que pour $x > x_0[G(l)]$, *l'inégalité*

$$\frac{\Pr\{|X| > lx\}}{\Pr\{|X| > x\}} > G(l)$$

soit satisfaite pour au moins un l.

Démonstration. — La condition est nécessaire : Si $\underline{\lim}\, \varphi(x) = 0$, EP'$[\mathcal{L}]$ contient $\mathcal{G}$. Supposons que $\underline{\lim}\, \varphi(x) \neq 0$ et que pour une fonction $G(l)$ avec $\lim_{l \to \infty} G(l) = 0$ et pour une suite $\{x_p\} \to \infty$, on ait

$$\frac{\Pr\{|X| > l x_p\}}{\Pr\{|X| > x_p\}} < G(l).$$

Posons $n_p \sim 1/\Pr\{|X| > x_p\}$; comme $\underline{\lim} \varphi(x) \neq 0$, il vient

$$n_p \int_{-x_p}^{x_p} t^2 \, dF(t) < K x_p^2 \qquad \text{et} \qquad n_p \Pr\{|X| > l x_p\} < 2 G(l).$$

Les lois $\left| \mathcal{L}^{n_p} \cdot \frac{1}{x_p} - \frac{\Lambda_{n_p}}{x_p} \right|$ forment donc une famille normale.

C. Q. F. D.

La condition est suffisante : EP'$[\mathcal{L}]$ ne peut pas contenir $\mathcal{G}$; et en vertu du raisonnement du numéro précédent l'éventualité K$[\mathcal{L}^{n_p}] \to$ K$[1]$, $1 = \mathcal{G}$ est également incompatible avec les conditions du théorème.

15. Théorème VIII. — *Pour que* EP$[\mathcal{L}]$ *soit compact, il faut et il suffit que,* $\{n_i\}$ *étant une suite quelconque d'entiers positifs, on puisse extraire de* $\{n_i\}$ *une sous-suite* $\{n_\rho\}$ *à laquelle on puisse faire correspondre une suite de nombres* x_ρ *tels que*

$$1 \geq n_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\}, \qquad \underline{\lim}\, n_\rho \Pr\{|X| \geq x_\rho\} \neq 0 \tag{14}$$

et

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{\rho\to\infty}}\, n_\rho \Pr\{|X| > k\,L(x_\rho)\} = 0, \tag{14'}$$

où

$$L^2(x) = \max\left\{x^2,\ n_\rho \int_{-x}^{x} t^2\, dF(t)\right\}. \tag{14''}$$

Démonstration. — La condition est nécessaire : Si EP$[\mathcal{L}]$ est compact, $\{n_i\}$ étant une suite quelconque d'entiers positifs, on peut extraire de $\{n_i\}$ une suite $\{n_\rho\}$ telle que K$[\mathcal{L}^{n_\rho}]$ tende vers une classe limite K[I]. Si I est la loi de Gauss, I = G, on a, en déterminant les x_ρ par les conditions

$$1 \geq n_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\}, \qquad 1 \leq n_\rho \Pr\{|X| \geq x_\rho\} \quad (^{14}),$$

$$x_\rho^2 = o\left(n_\rho \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t)\right), \qquad L^2(x_\rho) = n_\rho \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t), \tag{15}$$

$$\lim_{\rho\to\infty} n_\rho \Pr\{|X| > L(x_\rho)\} = 0. \tag{15'}$$

Si I n'est pas la loi de Gauss, il existe une fonction N(x) telle que pour une suite $\{b_\rho\} \to \infty$

$$\begin{aligned} n_\rho[1 - F(tb_\rho)] &\to -N(t), && \text{en mesure} && \text{si } t > 0,\\ n_\rho F(tb_\rho) &\to N(t), && \text{»} && \text{si } t < 0; \end{aligned}$$

alors,

$$n_\rho \int_{-b_\rho}^{b_\rho} x^2\, dF(x) = O(b_\rho^2). \tag{16}$$

Il existe au moins un nombre t_1 tel que

$$-N^{(+)}(t_1) + N^{(-)}(t_1) = \beta > 0.$$

Pour $\rho > \rho_0(\varepsilon)$, on a

$$\varepsilon + |N^{(+)}(t_1 - \varepsilon)| + N^{(-)}(-t_1 + \varepsilon) > n_\rho \Pr\left\{|X| > b_\rho\left(t_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} > \beta - \varepsilon,$$

$$n_\rho \Pr\{|X| > b_\rho(t_1 + \varepsilon)\} < \beta + \varepsilon,$$

$$-N^{(+)}(t_1 - \varepsilon) + N^{(-)}(-t_1 + \varepsilon) < \beta + \eta,$$

où $\eta(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε. Si $\beta < 1$, nous prendrons $x_\rho = b_\rho\left(t_1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$, les conditions (14') seront réalisées en vertu de (16), (15') et (15), (16') entraînent (14'').

---

(14) Ces nombres ne sont pas toujours bien déterminés, mais cela n'a aucune importance.

On ne peut pas prendre $\beta < 1$ dans le cas où $\int_{|x|>t} d\mathrm{N}(x) = 0$ si $t > t_1$, et > 1 si $t < t_1$. En déterminant alors x_ρ par les conditions

$$n_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\} \leq 1, \qquad n_\rho \Pr\{|X| \geq x_\rho\} \geq 1,$$

il résulte de (15) que $x_\rho / b_\rho \to t_1$; donc, les conditions (14) sont encore satisfaites.

La condition est suffisante : Si les conditions (14) du théorème sont satisfaites, les lois de probabilité de $\left(S_{n_\rho} - n_\rho \int_{-x_\rho}^{+x_\rho} t\, d\mathrm{F}(t)\right)/\mathrm{L}(x_\rho)$ forment une famille normale et en vertu de (14'), une loi limite quelconque est différente de $\mathbf{E}(x)$ (*cf.* Var. Ind.).

Théorème IX. — *Si* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *est compact,* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *ne comporte pas de lois discontinues et il existe une fonction* $\Phi(\alpha)$ *avec* $0 < \Phi(\alpha) < \infty$ $(0 < \alpha < 1)$, *telle que le rapport de la dispersion pour la probabilité* α *d'une loi quelconque de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *à la dispersion pour la probabilité* $\frac{1}{2}$ *est* $< \Phi(\alpha)$, *si* $\alpha > \frac{1}{2}$, *et* $> \Phi(\alpha)$, *si* $\alpha < \frac{1}{2}$. *Si* $\mathrm{EP}[\mathcal{L}]$ *est compact, mais non* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *contient des lois discontinues.*

Démonstration. — Si I est une loi discontinue, le nombre probable des sauts est $< \infty$ et la composante gaussienne est nulle :

$$-\mathrm{N}^{(+)}(x) \leq -\mathrm{N}^{(+)}(+0) < \mathrm{C}, \qquad \mathrm{N}^{(-)}(-x) \leq \mathrm{N}^{(-)}(-0) < \mathrm{C}, \qquad \sigma^2 = 0.$$

La fonction caractéristique est

$$\exp\left[iat + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1)\, d\mathrm{N}(x)\right].$$

On peut définir I^u $(u > 0)$. Si u est très petit, le nombre probable des sauts pour I^u est très petit et $< 2\mathrm{C}u$. I^u affecte une probabilité voisine de 1 à la valeur ua, et par conséquent, l'ensemble dérivé de l'ensemble de classes $\mathrm{K}\left[\mathrm{I}^{\frac{1}{n}}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est vide; donc, I ne peut pas faire partie d'un $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ compact.

La dispersion pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est donc différente de 0 pour toute loi de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$. Si le rapport $\mathrm{D}(\alpha)/\mathrm{DC}\left(\frac{1}{2}\right)$ n'était pas borné inférieurement, pour $\alpha < \frac{1}{2}$, pour toute loi de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, nous pourrions extraire de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ une suite de classes convergeant vers une classe non impropre pour laquelle $\mathrm{D}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ [13] et qui serait par conséquent la classe d'une loi discontinue.

[13] En effet, nous pourrions alors trouver une suite de lois $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_n \in \mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ avec des fonctions de répartition $\mathrm{G}_n(x)$ convergeant vers une certaine loi I de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, le rapport $\mathrm{D}(\alpha)/\mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\right)$ étant $< 1/n$

Ceci montre l'existence d'une fonction $\Phi(x)$ ayant pour $\alpha < \frac{1}{2}$ les propriétés indiquées. La démonstration est analogue pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

Réciproquement, si $EP'[\mathcal{L}]$ est tel que pour toute loi I de $EP'[\mathcal{L}]$ $D(\alpha)/D\left(\frac{1}{2}\right)$ est $> \Phi(\alpha)$ pour $\alpha < \frac{1}{2}$, et $< \Phi(\alpha)$ pour $\alpha > \frac{1}{2}$, on voit immédiatement que l'ensemble fermé $EP'[\mathcal{L}]$ est compact.

Supposons maintenant que $EP[\mathcal{L}]$ est bien compact, mais non $EP'[\mathcal{L}]$; alors par exemple, $D(\beta)/D\left(\frac{1}{2}\right)$ ne sera pas borné inférieurement sur $EP'[\mathcal{L}]$ de sorte qu'il existera une suite de lois $I_1, \ldots, I_n$ de $EP'[\mathcal{L}]$ avec $D(\beta)/D\left(\frac{1}{2}\right) \to 0$. Nous pouvons donc trouver des indices n_p tels que, pour les lois $\mathcal{L}^{n_p}$, $D_{n_p}(\beta - \varepsilon)/D_{n_p}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) \to 0$; car à chaque loi I_i correspond une suite d'indices $\{l^{(i)}\}$ avec $K[\mathcal{L}^{l^{(i)}}] \to K[I_i]$. De la suite $K[\mathcal{L}^{n_p}]$ nous pouvons extraire une suite partielle convergeant vers une classe limite; car $EP[\mathcal{L}]$ est compact. Pour cette classe limite $D(\beta - 2\varepsilon) = 0$; donc, c'est la classe d'une loi discontinue.

17. *Exemple d'un ensemble dérivé d'un ensemble compact de classes qui n'est pas compact.* — Soit I^z la loi de probabilité dont la fonction caractéristique est

$$\varphi_z(t) = \exp\{z \cos t\}.$$

Posons $I^\infty = \mathcal{G}$. Alors l'ensemble F des classes $K[I^z]$, $0 < z \leqq \infty$, est un ensemble fermé qui n'est pas compact puisque pour $z \to 0$, I^z prend la valeur 0 avec une probabilité de la forme $1 - O(z)$.

Déterminons la fonction de répartition $F(x)$ de la loi $\mathcal{L}$ par les conventions

$$dF(x) = 0 \qquad \text{pour } |x| \neq \exp\{p^2\} \qquad (p = 0, 1, \ldots),$$
$$dF(x) = C \exp\{-p^2\}\, dx^2 \qquad \text{pour } |x| = \exp\{p^2\};$$

on prouve facilement que $EP[\mathcal{L}]$ est compact et $EP'[\mathcal{L}] = F$.

Supposons que $K[\mathcal{L}^{n_\rho}] \to K[I]$, n_ρ étant déterminé par

$$n_\rho \Pr\{|X| > x_\rho\} \simeq 1,$$

et que, d'autre part,

$$\int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t)/x_\rho^2 \Pr\{|X| > x_\rho\} \to 0;$$

alors, la loi I est discontinue ce que le lecteur vérifiera sans peine.

---

pour I_n. $D\left(\frac{1}{2}\right)$ serait borné supérieurement pour toute la suite $I_1, \ldots, I_n$ et $D(\alpha)$ tendrait vers zéro pour I_n tendant vers I; pour n suffisamment grand, on aurait $d[I_n, I] < \varepsilon$ et il existerait un intervalle de longueur ε avec $G_n(x + \varepsilon) - G_n(x) \geqq \alpha$, d'où $G(x + 2\varepsilon) - G(x - \varepsilon) > \alpha - 2\varepsilon$, ce qui entraîne bien $D\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ pour I.

18. Théorème X. — *Pour que l'ensemble de puissances soit fortement compact, il faut et il suffit qu'en désignant par* $T(x)$ *la fonction*

$$T(X)=\frac{1}{\Pr\{|X|>x\}}\int_{-x}^{x}t^2\,dF(t), \tag{17}$$

l'on ait

$$\lim_{l\to\infty}\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\Pr\{|X|>lT(x)\}}{\Pr\{|X|>x\}}=0. \tag{18}$$

Démonstration. — La condition est nécessaire. En effet le rapport $T(x)/x$ est borné inférieurement si $EP[\mathcal{L}]$ est fortement compact, car $EP'[\mathcal{L}]$ ne contient pas de lois discontinues. Supposons, par impossible, que

$$\frac{\Pr\{|X|>l_\varrho T(x_\varrho)\}}{\Pr\{|X|>x_\varrho\}}\to\alpha>0$$

pour x_ϱ et l_ϱ tendant vers l'infini, et considérons les lois $\mathcal{L}^{n_\varrho}$ où n_ϱ sera déterminé par $n_\varrho\Pr\{|X|>x_\varrho\}\cong 1$. Dans des cas de probabilité $\sim 1-e^{-1}$, $S_{n_\varrho}-n_\varrho\int_{-x_\varrho}^{x_\varrho}t\,dF(t)$ est de l'ordre de $T(x_\varrho)$, donc $D_{n_\varrho}\left(\frac{1}{5}\right)$ est $<KT(x_\varrho)$ et comme $n_\varrho\Pr\{|X|>l_\varrho T(x_\varrho)\}>\frac{\alpha}{2}\to\alpha$, il existe une grandeur $\alpha_1(\alpha)$ telle que pour $\varrho>\varrho_0$ la dispersion $D_{n_\varrho}(\alpha_1)$ est $\geq l_\varrho T(x_\varrho)$ (*cf.* Var. Ind., § 1). Mais ceci est impossible, puisque $D_{n_\varrho}(\alpha_1)/D_{n_\varrho}\left(\frac{1}{5}\right)$ doit être borné. On a donc bien (18).

La condition est suffisante. Considérons les lois $\left(\frac{1}{T'_n}\mathcal{L}^n-A_n\right)$ où

$$T'_n=T(x_n),\qquad A_n=n\int_{-x_n}^{x_n}t\,dF(t),$$

x_n étant déterminé par la condition

$$n\Pr\{|X|>x_n\}\leq 1,\qquad n\Pr\{|X|\geq x_n\}\geq 1.$$

Pour que ces lois forment une famille normale, il faut et il suffit que

$$n\Pr\{|X|>lT'_n\}<\varepsilon(l),\qquad n\Pr\{|X|\geq T'_n\}<K, \tag{20}$$

avec

$$\lim_{l\to\infty}\varepsilon(l)=0,\qquad [\varepsilon(l)<\varepsilon\quad\text{pour}\quad l>R(\varepsilon)]$$

et

$$n\int_{-T'_n}^{T'_n}x^2\,dF(x)<KT'^2_n. \tag{21}$$

Or,

$$n\int_{-T'_n}^{T'_n}t^2\,dF(t)<n\left(\int_{-x_n}^{x_n}t^2\,dF(t)+T'^2_n\Pr\{|X|>x_n\}\right)\leq 2T'^2_n,$$

de telle sorte qu'il suffit de vérifier la condition (19).

ε étant donné d'avance, nous distinguons deux cas suivant que

$$n\Pr\{|X|>x_n\}>\varepsilon \quad \text{ou} \quad \leqq\varepsilon.$$

Dans le premier cas, si $l>R(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon}$,

$$n\Pr\{|X|>lT'_n\}\leqq n\Pr\{|X|>l\sqrt{\varepsilon}\,T(x_n)\}$$
$$\leqq\frac{\Pr\{|X|>l\sqrt{\varepsilon}\,T(x_n)\}}{\Pr\{|X|>x_n\}}<\varepsilon$$

Dans le second cas, on a

$$n\Pr\{|X|=x_n\}\geqq 1-\varepsilon;$$

par conséquent,

$$T'^2_n=n\int_{-x_n}^{x_n}t^2\,dF(t)\geqq(1-\varepsilon)\,x_n^2$$

et

$$n\Pr\{|X|>2T'_n\}<n\Pr\{|X|>x_n\}<\varepsilon.$$

La condition (19) est donc une conséquence de (18) et les lois considérées forment une famille normale. Pour prouver que EP[$\mathfrak{L}$] est fortement compact, il faudra prouver que les lois d'accumulation ne sont pas impropres et que EP'[$\mathfrak{L}$] est compact. Soit $\varphi(t)$ la fonction caractéristique d'une loi limite; on tire du théorème I et de (20) et (21)

$$(22)\qquad \sigma^2+\int_{-1}^{1}x^2\,dN(x)\leqq 2,\qquad \int_{|x|\geqq 1}dN(x)<2,\qquad \int_{|x|\geqq d}dN(x)\leqq\varepsilon(l)$$

et l'on a pour toute loi limite, soit

$$\sigma^2+\int_{-1}^{1}x^2\,dN(x)\geqq 1,$$

soit

$$\int_{|x|\geqq 1}dN(x)\geqq 1.$$

Les lois I forment par conséquent une famille normale et ne font pas partie de K[E]. Une limite quelconque J de lois I_i satisfait aussi à (22) et ne fait non plus partie de K[E]. EP'[$\mathfrak{L}$] est donc fortement compact. C. Q. F. D.

19. Théorème XI. — *Soient* I *une loi de* EP'[$\mathfrak{L}$], $G(x)$ *sa fonction de répartition*, $D\left(\frac{1}{2}\right)$ *la dispersion de* I *pour la probabilité* $\frac{1}{2}$, m *la médiane de* I. *Si, quelle que soit la loi* I *de* EP'[$\mathfrak{L}$], *on a*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x-m|^{\alpha}\,dG(x)=KD^{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right),\qquad 0<\alpha<2$$

et si $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *est compact, alors*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-\varepsilon} d\mathrm{F}(x) < \infty,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

La démonstration utilisera deux lemmes.

LEMME 1. — *Si les hypothèses du théorème sont vérifiées, les conditions* $u > u_0$ *et*

$$\frac{1}{u^2 \Pr\{|X| > u\}} \int_{-u}^{u} x^2 d\mathrm{F}(x) < \mathrm{M}^2 \tag{23}$$

entraînent

$$\Pr\{|X| > ku\} < k^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}} \Pr\{|X| > u\}, \tag{24}$$

$$\int_{u \leq |x| \leq ku} x^2 d\mathrm{F}(x) < \Pr\{|X| > u\}\, u^2 \mathrm{R}^{2-\alpha-\frac{\varepsilon}{3}}. \tag{25}$$

Démonstration. — Soit $\{x_i\}$ une suite de nombres augmentant indéfiniment, avec $\varphi(x_i) \geqq \mathrm{M}^{-2}$. Soit I une loi limite des lois de $(\mathrm{S}_{n_i} - \mathrm{A}_{n_i})/x_i$ où

$$\mathrm{A}_{n_i} = n_i \int_{-x_i}^{x_i} t\, d\mathrm{F}(t), \qquad n_i \Pr\{|X| > x_i\} \approx 1. \tag{26}$$

Y étant une variable aléatoire dépendante de I, on peut considérer Y comme somme de deux variables aléatoires indépendantes Y_1 et Y_2, de fonctions caractéristiques

$$\varphi_1(t) = -\sigma^2 \frac{t^2}{2} + iat + \int_{-1}^{1} (e^{itx} - 1 - itx)\, d\mathrm{N}(x)$$

et

$$\varphi_2(t) = \int_{|x|>1} (e^{itx} - 1)\, d\mathrm{N}(x).$$

Il résulte de (23) et (26) que

$$\mathfrak{E}[Y_1] \leqq 1, \qquad \mathfrak{E}[Y_1^2] \leqq \mathrm{M}^2 + 2, \qquad \int_{|x|>1} d\mathrm{N}(x) \leqq 1.$$

le symbole $\mathfrak{E}$ désignant la valeur probable de la variable aléatoire entre crochets. En vertu de la condition (18), nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ soit fortement compact, on a $\int_{|x|>l} d\mathrm{N}(x) < \varepsilon(l)$, car $\mathrm{T}(x) < 2\mathrm{M}x$. Les lois limites I obtenues de la façon indiquée forment donc une famille normale, il y a une constante K telle que

$$m < \mathrm{K}, \qquad \mathrm{D}\left(\frac{1}{2}\right) < \mathrm{K}.$$

Par conséquent

$$\mathfrak{E}[|Y|^\alpha] = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha d\,G(x) < 2^\alpha |m|^\alpha + 2^\alpha \int_{|x|>2|m|} |x-m|^\alpha d\,G(x)$$
$$< 2^\alpha |m|^\alpha + 2^\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} |x-m|^\alpha d\,G(x) < C$$

et

$$C > \mathfrak{E}[|Y_1+Y_2|^\alpha] > \Pr\{|Y_1| < 3\sqrt{M^2+2}\}\left(\frac{2}{3}\right)^\alpha \int_{|x|>3\sqrt{M^2+2}} |x|^\alpha d\,G(x).$$

D'autre part on a (*cf.* Var. Ind.)

$$d\,G(x) > e^{-1} d\,N(x),$$

c'est-à-dire

$$C' = [3\sqrt{M^2+2}]^\alpha + \frac{4}{3} e C \left(\frac{3}{2}\right)^\alpha > \int_{|x|>1} |x|^\alpha d\,N(x).$$

Nous en déduisons que, $\int_{|x|>k} dN(x) < k^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{4}}$ pour $k^{\frac{\varepsilon}{4}} > \max\left\{2C', M^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{4}}\right\}$.

Il résulte facilement qu'on a pour $u > u_0$ et $\varphi(u) > M^{-2}$

$$\Pr\{|X| > uk\} < k^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}} \Pr\{|X| > u\}.$$

On peut écrire

$$\int_{1<x\leqq y} x^2 d\,N(x)$$
$$= \int_{1<x\leqq y} \left[\int_{1<t\leqq y} t^2 d\,N(t) - \int_{1<t\leqq y} t^2 d\,N(t)\right] dx^{2-\alpha} + \int_{1<x\leqq y} x^2 d\,N(x) < C' y^{2-\alpha}.$$

La seconde formule du lemme en résulte sans peine.

Lemme 2. — *Dans les hypothèses du théorème, on a*

$$\int_{-x}^{x} t^2 d\,F(t) < C''|x|^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}} \qquad \text{pour} \quad x > x_0.$$

Démonstration. — Nous pouvons toujours supposer $M \neq k$. Posons

$$x_{l+1} = k x_l \quad \text{si} \quad \varphi(x_l) > M^{-2} \quad \text{et} \quad x_{l+1} = M x_l \quad \text{si} \quad \varphi(x_l) \leqq M^{-2} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Posons en outre

$$y(x) = \int_{-x}^{x} t^2 d\,F(t).$$

Si $\varphi(x) \leqq M^{-2}$, il vient

$$y(Mx) = y(x) + \int_{Mx \geqq |t| > x} t^2 d\,F(t) \leqq y(x) + \Pr\{|X| > x\} x^2 M^2,$$

(27)
$$y(Mx) \leqq 2\,y(x) < M^{2-\alpha} y(x).$$

Supposons maintenant $\varphi(x) > M^{-2}$; dans ce cas

$$y(kx) < k^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}} \Pr\{|X| > x\} x^2 + y(x).$$

$\varphi(x_i) > M^{-2}, \ldots, \varphi(x_{i+\rho}) > M^{-2}$ entrainent, en tenant compte du lemme 1, l'inégalité

$$y(x_{i+l}) < y(x_i) + \Pr\{|X| > x_l\} x_i^2 \left(\frac{x_{i+l}}{x_i}\right)^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}} \frac{1}{1 - k^{-\left(2-\alpha+\frac{\varepsilon}{3}\right)}} \qquad (l \leq \rho).$$

Si le nombre des x_i avec $\varphi(x_i) \leq M^{-2}$ (ou celui des x_i avec $\varphi(x_i) \geq M^{-2}$) est limité, il en résulte immédiatement le lemme. S'il y a par contre un nombre infini d'indices j_r tels que

$$\varphi(x_i) \leq M^{-2} \qquad \text{pour} \quad j_{2r-1} < i \leq j_{2r},$$
$$\varphi(x_i) > M^{-2} \qquad \text{pour} \quad j_{2r} < i \leq j_{2r+1},$$

il suit pour $j_{2r} < i \leq j_{2r+1}$, $i = j_{2r} + l$,

$$y(x_i) < 2y(x_{j_{2r}}) + \Pr\{|X| > x_{1+j_{2r}}\} x_{1+j_{2r}}^2 \left[\frac{x_i}{x_{1+j_{2r}}}\right]^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}$$
$$\Pr\{|X| > x_{1+j_{2r}}\} x_{1+j_{2r}}^2 < \Pr\{|X| > x_{j_{2r}}\} x_{j_{2r}}^2 M^2 < y(x_{j_{2r}}),$$
$$y(x_i) < y[x_{j_{2r}}] \left(2 + \left[\frac{x_i}{x_{j_{2r}+1}}\right]^{2-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}\right),$$
$$< y[x_{j_{2r}}] \left(\frac{x_i}{x_{j_{2r}}}\right)^{2-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}} \left(2 + M^{2-\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}\right),$$
$$y(x_i) < y[x_{j_{2r}}] \left(\frac{x_i}{x_{j_{2r}}}\right)^{2-\alpha+\frac{3\varepsilon}{4}}. \tag{28}$$

On obtient immédiatement à partir de (27) et (28)

$$y(x_i) < C x_i^{2-\alpha-\frac{3\varepsilon}{4}}$$

et

$$y(x) < (M+k) C x^{2-\alpha-\frac{3\varepsilon}{4}} \qquad \text{pour} \quad x > x_0.$$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème. Posons $u(x) = \int_{-x}^{x} |t|^\alpha dF(t)$, alors

$$y(x) = \int_{-x}^{x} [u(x) - u(t)] d(t^{2-\alpha}),$$
$$y(2x) > [u(2x) - u(x)] |x|^{2-\alpha};$$

ceci donne, en utilisant le lemme 2 pour $x > x_0$,

$$u(2x) - u(x) < K' |x|^{\frac{\varepsilon}{2}},$$

donc $\Pr\{2u \geqq |X| > u\} < K' u^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}$, d'où l'on conclut immédiatement que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\alpha-\varepsilon} dF(x) < \infty. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarque. — Il se peut très bien que $EP'[\mathcal{L}]$ contienne des lois sans moments et que quand même

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} dF(x) < \infty \qquad (\alpha < 2).$$

Nous allons en donner un exemple. Soit

$$dF(x) = 0 \qquad \text{pour } |x| < x_1 = 1,$$

$$dF(x) = dF(-x) = \Pr\{X > x_{2i-1}\}\, d\left(\frac{x}{x_{2i-1}}\right) \qquad \text{pour } x_{2i-1} \leqq x < x_{2i},$$

$$dF(x) = dF(-x) = \Pr\{X > x_{2i}\}\, d\left(\frac{1}{lg\left[\frac{ex}{x_{2i}}\right]}\right) \qquad \text{pour } x_{2i} \leqq x < x_{2i+1},$$

$$x_{2i+1} = (lgei)x_{2i}, \qquad x_{2i} = e^i x_{2i-1}.$$

On vérifie aisément que $EP'[\mathcal{L}]$ contient la loi dont la fonction de sauts est $N(x)$:

$$dN^{(+)}(x) = dN^{(-)}(-x) = d[x^{-\beta}] \quad \text{pour } 0 < x \leqq 1, \quad = d(lgex)^{-1} \quad \text{pour } x > 1 \quad (2 > \beta > \alpha),$$

loi qui n'a pas de moments.

Le lecteur pourra prouver (la démonstration est analogue à celle du théorème XI) la

Proposition. — Pour que $EP[\mathcal{L}]$ soit fortement compact, il faut, mais il ne suffit pas, que pour un $\alpha > 0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} dF(x) < \infty.$$

20. Théorème XII. — *Si* $EP'[\mathcal{L}]$ *n'est pas vide et* $EP[\mathcal{L}]$ *n'est pas compact,* $EP'[\mathcal{L}]$ *contient des lois discontinues ou, quel que soit* ε, *des lois avec*

$$\int_{|x|\geqq 1} dN(x) = 1, \qquad \sigma^2 + \int_{|x|<1} x^2 dN(x) < \varepsilon. \tag{29}$$

Démonstration. — $EP[\mathcal{L}]$ n'étant pas compact par hypothèse, il y aura une suite de classes $K[\mathcal{L}^{n_1}], \ldots, K[\mathcal{L}^{n_p}]$, telle que l'ensemble dérivé de $\sum_p K[\mathcal{L}^{n_p}]$ soit vide. Il y aura par suite, comme on le voit facilement [*voir* aussi (2), (3)],

un nombre $\beta > 0$, tel que

$$\mathrm{K}\left(\frac{1}{2}\right) > n_\rho \Pr\left\{|X| > D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} > \beta \tag{30}$$

et

$$\frac{n_\rho}{D^2_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-D_{n_\rho}}^{D_{n_\rho}} x^2\, dF(x) < K'\left(\frac{1}{2}\right). \tag{31}$$

Soit T un nombre très grand; pour un certain entier m_ρ ($m_\rho \leqq \infty$), on aura

$$\frac{\Pr\left\{|X| > T^i D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}}{\Pr\left\{|X| > D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}} \leqq (1-\eta_1)^i \qquad \text{pour } i < m_\rho$$

et

$$\Pr\left\{|X| > T^{m_\rho} D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} > (1-\eta_1)^{m_\rho} \Pr\left\{|X| > D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}. \tag{32}$$

Le nombre m_ρ peut être borné supérieurement pour $\rho > \rho_0$. En effet, dans le cas contraire, s'il existait une infinité de $m_\rho = \infty$ ou si $m_{\rho'} \to \infty$ pour une sous-suite $\{n_{\rho'}\}$, on obtiendrait

$$n_{\rho'} \Pr\left\{|X| > K D_{n_{\rho'}}\left(\frac{1}{2}\right)\right\} < \varphi(K),$$

$\varphi(K)$ tendant vers zéro pour $K \to \infty$, d'où l'on déduirait que les lois de $S_{n_{\rho'}} D^{-1}_{n_{\rho'}}\left(\frac{1}{2}\right) - A_{n_{\rho'}}$ ($A_{n_{\rho'}}$ étant une grandeur convenable) forment une famille normale, contrairement à l'hypothèse faite sur la suite $\{K[\mathcal{L}^{m_\rho}]\}$.

Soient $\rho > \rho_0$, $D_\rho = D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $x_\rho = T^{m_\rho} D_{n_\rho}\left(\frac{1}{2}\right)$; on a les relations suivantes :

$$\int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t) = \int_{-D_\rho}^{D_\rho} t^2\, dF(t) + \int_{TD_\rho \geqq |t| > D_\rho} + \ldots + \int_{x_\rho \geqq |t| > T^{m_\rho - 1} D_\rho} t^2\, dF(t);$$

$$\int_{T^i D_\rho \geqq |t| > T^{i-1} D_\rho} t^2\, dF(t) < \Pr\{|X| > T^{i-1} D_\rho\}\, T^{2i} D_\rho^2 < (1-\eta)^{i-1} \Pr\{|X| > D_\rho\}\, D_\rho^2 T^{2i} \qquad (i < m_\rho),$$

$$\int_{x_\rho \geqq |t| > T^{m_\rho - 1} D_\rho} t^2\, dF(t) < x_\rho^2 \Pr\{x_\rho \geqq |X| > T^{m_\rho - 1} D_\rho\},$$

$$\Pr\{|X| > x_\rho\} > (1-\eta_1)^{m_\rho} \Pr\{|X| > D_\rho\}.$$

Il vient donc

$$\int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t) < \int_{-D_\rho}^{D_\rho} t^2\, dF(t) + T^{2m_\rho - 2} D_\rho^2 (1-\eta)^{m_\rho - 2} \frac{1}{1-(1-\eta_1)T^{-1}} + (1-\eta)^{m_\rho - 1} \eta_1 x_\rho^2 \Pr\{|X| > D_\rho\},$$

$$\frac{1}{\Pr\{|X| > x_\rho\}\, x_\rho^2} \int_{-x_\rho}^{x_\rho} t^2\, dF(t) < \frac{\int_{-D_\rho}^{D_\rho} t^2\, dF(t)}{D_\rho^2 \Pr\{|X| > D_\rho\}} (1-\eta)^{-m_\rho} T^{-2m_\rho} + \frac{2}{T^2} + \frac{\eta_1}{1-\eta_1} < \varepsilon$$

Pour T suffisamment grand et η_1 suffisamment petit, en vertu de (30) et (32) le premier terme du second membre de l'inégalité ci-dessus est $< 2K'\left(\frac{1}{2}\right)\beta^{-1}T^{-2}$.

Déterminons $n_\rho^{(1)}$ par la condition

$$n_\rho^{(1)} \Pr\{|X| > x_\rho\} \approx 1.$$

Appelons $m_\rho^{(2)}$ un entier $\leq \alpha$ tel que

$$\Pr\{|X| > T^i x_\rho\} < (1-\eta)^i \Pr\{|X| > x_\rho\} \quad \text{pour} \quad i < m_\rho^{(2)}$$
$$\Pr\{|X| > T^{m_\rho^{(2)}} x_\rho\} > (1-\eta)^{m_\rho^{(2)}} \Pr\{|X| > x_\rho\}$$

et soit $x_\rho^{(2)} = T^{m_\rho^{(2)}} x_\rho$, si $m_\rho^{(2)} \neq \infty$. On aura

$$\frac{1}{\Pr\{|X| > x_\rho^{(2)}\}\ [x_\rho^{(2)}]^2} \int_{-x_\rho^{(2)}}^{x_\rho^{(2)}} t^2\, dF(t) < \varepsilon.$$

Nous pouvons alors déterminer $n_\rho^{(2)}$, $m_\rho^{(2)}$, etc. L'opération pourra se poursuivre indéfiniment si l'on ne rencontre pas de $m_\rho^{(i)} = \infty$.

Nous distinguerons deux cas :

A. Pour $\rho \geq \rho'$, les nombres $m_\rho^{(i)}$ sont tous $\neq \infty$ et $< k$. Considérons alors pour ρ fixe ($> \rho'$), la suite des nombres $n_\rho^{(1)}, \ldots, n_\rho^{(i)}, \ldots$. On a

$$1 \simeq n_\rho^{(i)} \Pr\{|X| > x_\rho^{(i)}\} = n_\rho^{(i)} \Pr\{|X| > T^{m_\rho^{(i)}} x_\rho^{(i-1)}\}$$
$$\geq n_\rho^{(i)} (1-\eta_i)^k \Pr\{|x| > X_\rho^{(i-1)}\} \approx \frac{n_\rho^{(i)}}{n_\rho^{(i-1)}} (1-\eta_i)^k,$$
$$n_\rho^{(i-1)} < n_\rho^{(i)} \leq (1-\eta)^{-k-1} n_\rho^{(i-1)}$$

$EP'[\mathcal{L}]$ n'étant pas vide, par hypothèse, il y aura une suite $\{p_j\}$ avec $K[\mathcal{L}^{p_j}] \to K[I]$; de $\{n_\rho^{(i)}\}$ nous pouvons extraire une suite partielle de nombres $\{p'_j\}$ avec $p'_j/p_j \to u$, $1 \leq u \leq (1-\eta_i)^{-k-1}$. Alors

$$K[\mathcal{L}^{p'_i}] \to K[I^u] = K[J].$$

B. Il y a une infinité de ρ avec un $m_\rho^{(i)} = \infty$ ou une suite partielle de $m_\rho^{(i)}$ tendant vers l'infini. Soit $\{p_j\}$ la suite des entiers $n_\rho^{(i)}$ correspondant à cette suite partielle. On voit comme ci-dessus que les classes $K[\mathcal{L}^{p_j}]$ forment un ensemble compact et pour une suite partielle $\{p'_j\}$ de $\{p_j\}$

$$K[\mathcal{L}^{p'_j}] \to K[J].$$

Nous allons étudier cette loi limite J.

p'_i étant de la forme $n_\rho^{(i)}$, il y aura un nombre x'_i avec

$$p'_i \Pr\{|X| > x'_i\} \simeq 1$$

et

$$\frac{p'_i}{x'^2_i} \int_{-x'_i}^{x'_i} t^2\, dF(t) < \varepsilon;$$

en déterminant τ de telle sorte que

$$\tau \int_{|x|\geq 1} d\,\mathrm{N}(x) = 1,$$

on a

$$\tau \leq 1, \qquad \tau\left(\sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2\, d\,\mathrm{N}(x)\right) < \varepsilon.$$

J^{τ} satisfait alors à (29). C. Q. F. D.

Il y aura d'autre part deux suites de constantes T_i et A_i telles que la loi de $\frac{1}{T_i} S_{p'_i} - A_i$ tende vers J. Soit (1) la fonction caractéristique de J. L'équation (33) a pour conséquence

$$\frac{x'_i}{T_i} < \varepsilon.$$

Si $\frac{x'_i}{T_i} \to 0$, on aura

$$\sigma^2 = \lim_{\tau_i \to 0} \overline{\lim_{i \to \infty}} \frac{p'_i}{T_i^2} \int_{-\tau_i T_i}^{\tau_i T_i} t^2\, d\,\mathrm{F}(t)$$

et

$$\frac{p'_i}{T_i^2} \int_{-\tau_i T_i}^{\tau_i T_i} t^2\, d\,\mathrm{F}(t) \leq \frac{p'_i}{T_i^2} \int_{-x'_i}^{x'_i} t^2\, d\,\mathrm{F}(t) + 2\tau_i^2,$$

d'où $\sigma^2 = 0$ et, pour $i > i(\tau)$,

$$-\mathrm{N}^{(+)}(\tau) + \mathrm{N}^{-}(-\tau) < \tau + p'_i \Pr\left\{|\mathrm{X}| > \frac{\tau}{2} T_i\right\} \leq \tau + p'_i \Pr\{|\mathrm{X}| > x'_i\} < 2\tau + 1,$$

donc

$$|\mathrm{N}^{(+)}(+0)| + \mathrm{N}^{(-)}(-0) \leq 1;$$

J est donc discontinu.

Si $\frac{x'_i}{T_i} > a > 0$, nous pouvons admettre (en considérant au besoin une suite partielle des lois $\mathfrak{L}^{p'_i}$) que

$$\frac{x'_i}{T_i} \to \mathrm{L} \neq 0.$$

Les lois de

$$\frac{S_{p'_i}}{x'_i} - \frac{A_i T_i}{x'_i}$$

convergent également vers une limite $\in \mathrm{K}[\mathrm{J}]$. Pour cette limite on aura

$$\sigma^2 + \int_{-1<x<1} x^2\, d\,\mathrm{N}(x) \leq \varepsilon, \qquad 1 \leq \int_{|x|\geq 1} d\,\mathrm{N}(x) \leq 1 + \varepsilon.$$

Corollaire. — Si $\mathrm{EP}'[\mathfrak{L}]$ est compact, $\mathrm{EP}[\mathfrak{L}]$ l'est aussi.

Démonstration. — Si $EP'[\mathcal{L}]$ est compact, $EP'[\mathcal{L}]$ ne contient pas de lois discontinues et la condition $\frac{D(\alpha)}{D(\beta)} > \frac{\Phi(\beta)}{\Phi(\alpha)}$ pour $\alpha < \beta$ est incompatible avec l'existence de lois J de $EP'[\mathcal{L}]$ avec

$$\sigma^2 + \int_{|x|<1} x^2 d\mathrm{N}(x) < \varepsilon, \qquad \int_{|x|\geq 1} d\mathrm{N}(x) = 1 \qquad (\text{pour } \varepsilon \to 0).$$

En effet, la variable aléatoire Z de J pourrait être considérée comme la somme de deux termes indépendants, Z_1 et Z_2, de fonctions caractéristiques

$$\exp\left\{-\sigma^2 \frac{t^2}{2} + \int_{|x|<1} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) d\mathrm{N}(x)\right\},$$

et

$$\exp\left\{\int_{|x|\geq 1} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) d\mathrm{N}(x)\right\}.$$

L'écart-type σ' de Z_1 serait $< \sqrt{\varepsilon}$ et Z_2 serait égale à une constante dans des cas de probabilité $\geq e^{-1}$.

La dispersion $D\left(\frac{1}{4}\right)$ serait donc, en utilisant l'inégalité de Tchebichef, $\leq 2\sqrt{\varepsilon}$; d'autre part, on vérifie aisément que la dispersion de Z_2 pour la probabilité $\frac{4}{5}$ est ≥ 1, donc

$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{4}\right)}{\Phi\left(\frac{1}{2}\right)} < \frac{D\left(\frac{1}{4}\right)}{D\left(\frac{1}{2}\right)} \leq 2\sqrt{\varepsilon},$$

ce qui est impossible. $EP[\mathcal{L}]$ doit donc être compact et sera fortement compact.

21. Soient I et I deux lois ind. div. dont les fonctions caractéristiques sont respectivement (1) et

$$\exp\left\{iat - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) d\overline{\mathrm{N}}(x)\right\}.$$

Nous dirons que I est normé si la dispersion de I pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est $= 1$. Une loi ne peut évidemment être normée que si la dispersion pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est $\neq 0$. Si l'on a les relations suivantes (θ et θ' désignant des nombres compris entre -1 et 1, dont les valeurs ne sont généralement pas les mêmes dans deux formules différentes)

$$\int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} d\mathrm{N}(t) = \int_{\pm\varepsilon-\theta\Delta}^{\pm\infty} d\overline{\mathrm{N}}(t) + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad x > \Delta,$$

$$\sigma^2 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t^2 d\mathrm{N}(t) = \overline{\sigma}^2 + \int_{-\varepsilon+\theta\Delta}^{\varepsilon+\theta\Delta} t^2 d\overline{\mathrm{N}}(t) + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \Delta,$$

nous écrirons $\varphi[\mathrm{I}, \mathrm{I}] < \Delta$. Si l'on a, pour un z convenable,

$$n\int_{\pm x z}^{\pm z} dF(t) = \int_{\pm x - \Delta 0}^{\pm z} dN(t) + 0'\Delta \qquad \text{pour} \quad x > \Delta,$$

$$\frac{n}{z^2}\int_{-z}^{z} t^2 dF(t) = \sigma^2 + \int_{-x-0\Delta}^{x+0\Delta} t^2 dN(t) + 0'\Delta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \Delta,$$

nous écrirons $\varphi_n[\mathrm{I}] < \Delta$. La borne inférieure de $\varphi_n[\mathrm{I}]$ pour toutes les lois *normées* I de $\mathrm{EP}'[\mathcal{E}]$ sera notée e_n. Si $\mathrm{K}[\mathcal{E}^{n_2}] \to \mathrm{K}[\mathrm{I}]$, la dispersion de I pour la probabilité $\frac{1}{2}$ étant $=1$, e_{n_2} tend évidemment vers zéro.

Si I est normé, il existe des nombres K et R tels que

$$\sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2 dN(x) < \mathrm{K}, \qquad \int_{|x|>1} dN(t) < \mathrm{K}, \tag{34}$$

$$2\mathrm{R} < \int_{|x|>b} dN(x) + \sigma^2 + \int_{-b}^{b} x^2 dN(x), \tag{35}$$

quel que soit b.

Ceci étant, soit r un nombre entier et supposons que pour une certaine valeur z on ait $\varphi\left[\bar{\mathrm{I}}, \frac{\mathrm{I}^r}{z}\right] < \frac{1}{4}$, les lois I et $\bar{\mathrm{I}}$ étant normées. On aura

$$\mathrm{K} > \int_{|x|>\frac{1}{z}}^{z} d\bar{N}(x) > r\int_{|x|>\frac{z}{2}}^{\infty} dN(x) - \frac{1}{4},$$

d'où l'on déduit que si $1 + \mathrm{K} < rk$, on a

$$\int_{|x|>\frac{z}{2}} dN(x) < k,$$

donc $\sigma^2 + \int_{-\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} x^2 dN(x) < k$, ce qui conduit à

$$\mathrm{K} > \sigma^2 + \int_{-1}^{1} x^2 dN(x) > rkz^{-2} - \frac{1}{4},$$

c'est-à-dire $z > 4$. Nous choisirons toujours dans ce qui suit

$$r > 16(k+1)k^{-1};$$

r satisfaisant à cette condition, nous écrirons $\varphi'[\mathrm{I}, \mathrm{I}] < \varepsilon$, si pour un certain z on a $\varphi\left[\bar{\mathrm{I}}, \frac{\mathrm{I}^r}{z}\right] < \varepsilon$.

LEMME. — I *et* $\overline{\mathrm{I}}$ *étant normées, les inégalités suivantes sont satisfaites pour* $\Delta < \frac{1}{4}$, $r > r_0$:

$$m\int_{\pm x\mathrm{H}}^{\pm\infty} dF(t) = \int_{\pm x+\theta\Delta}^{\pm\infty} dN(t) + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad x > \Delta,$$

$$\frac{m}{\mathrm{H}^2}\int_{-x\mathrm{H}}^{x\mathrm{H}} t^2\, dF(t) = \int_{-x-\theta\Delta}^{x-\theta\Delta} t^2\, dN(t) + \sigma^2 + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \Delta$$

et

$$mr\int_{\pm x\overline{\mathrm{H}}}^{\pm\infty} dF(t) = \int_{\pm x+\theta\Delta}^{\pm\infty} d\overline{N}(t) + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad x > \Delta,$$

$$\frac{mr}{\overline{\mathrm{H}}^2}\int_{-x\overline{\mathrm{H}}}^{x\overline{\mathrm{H}}} t^2\, dF(t) = \int_{-(x+\theta\Delta)}^{x-\theta\Delta} t^2\, d\overline{N}(t) + \overline{\sigma}^2 + \theta'\Delta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \Delta$$

et si $\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}} > \sqrt{\Delta}$, *on peut écrire,* η_1 *étant* $\mathrm{O}(\sqrt{\Delta})$,

$$(36)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\pm x}^{\pm\infty} d\overline{N}(t) = r\int_{\pm\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}(x-\theta\eta_1)}^{\pm\infty} dN(t) + \theta'\eta \qquad \text{pour} \quad x > \eta_1, \\ \displaystyle\overline{\sigma}^2 + \int_{-x}^{x} t^2\, d\overline{N}(t) = \frac{r\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left(\int_{-(x-\theta\eta_1)\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}}^{(x-\theta\eta_1)\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}} t^2\, dN(t) + \sigma^2\right) + \theta'\eta \qquad \text{pour} \quad 1 > x > \eta. \end{cases}$$

Démonstration. — On déduit de (35) qu'il existe un nombre a tel que

$$\frac{m}{\mathrm{H}^2}\int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} x^2\, dF(x) + m\int_{|x|>\mathrm{T}} dF(x) > 2a,$$

quel que soit T et en particulier pour $\mathrm{T} = \overline{\mathrm{H}}$. D'autre part,

$$\frac{mr}{\overline{\mathrm{H}}^2}\int_{-\overline{\mathrm{H}}}^{\overline{\mathrm{H}}} x^2\, dF(x) + mr\int_{|x|>\overline{\mathrm{H}}} dF(x) < \mathrm{K},$$

et pour $r_1 > r_0 > \frac{16\,\mathrm{K}}{a}$, on déduit

$$\frac{m}{\mathrm{H}^2}\int_{-\mathrm{H}_1}^{\mathrm{H}_1} x^2\, dF(x) > a, \qquad \overline{\mathrm{H}} > 4\mathrm{H}.$$

Si $x > \Delta$, on a *a fortiori* $\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}x > \Delta$ et

$$rm\int_{x\mathrm{H}}^{\infty} dF(t) = \int_{x-\theta\Delta}^{\infty} d\overline{N}(t) + \theta'\Delta = rm\int_{x'\mathrm{H}}^{\infty} dF(t) = 2\left(\int_{x'+\theta''\Delta}^{\infty} dN(t) + \theta''\Delta\right)$$

ce qui donne

$$\int_x^\infty d\overline{\mathrm{N}}(t) = r\int_{(x-2\theta\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^\infty d\mathrm{N}(t) + \theta'(r\mathrm{H})\Delta \qquad \text{pour} \quad x > 2\Delta$$

et une formule analogue pour $x < 0$.

Si $\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}} - \Delta > x > 2\Delta$, nous pouvons écrire

$$\overline{\sigma}^2 + \int_{-(x-\theta\Delta)}^{x-\theta\Delta} t^2\, d\overline{\mathrm{N}}(t) = \frac{r\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left[\sigma^2 + \int_{-x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}-\theta'\Delta}^{x\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}-\theta'\Delta} t^2\, d\mathrm{N}(t)\right] + \theta'(r+1)\Delta$$

$$\overline{\sigma}^2 + \int_{-x}^{x} t^2\, d\overline{\mathrm{N}}(t) = \frac{r\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left[\sigma^2 + \int_{-(x+2\theta\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}}^{(x+2\theta\Delta)\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}} t^2\, d\mathrm{N}(t)\right] + \theta'(r+1)\Delta,$$

Supposons $\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}} - \Delta > y > \frac{\mathrm{H}}{2\overline{\mathrm{H}}}$, $2 > x > \frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}} - \Delta$; on a

$$\int_y^x t^2\, d\overline{\mathrm{N}}(t) = x^2\overline{\mathrm{N}}(x) - y^2\overline{\mathrm{N}}(y) - 2\int_y^x t\overline{\mathrm{N}}(t)\, dt,$$

$$(37) \qquad \left|\int_y^x t\overline{\mathrm{N}}(t)\, dt - r\int_y^x t\mathrm{N}\left(t\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right) dt\right| < \int_y^x t\left|\overline{\mathrm{N}}(t) - r\mathrm{N}\left(t\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right)\right| dt.$$

Soient B et B′ respectivement les ensembles des points de (x, y) et de $(-x, -y)$ avec $\left|\overline{\mathrm{N}}(t) - \mathrm{N}\left(t\overline{\mathrm{H}}\,\mathrm{H}^{-1}\right)\right| > \tau$; on obtient

$$\int_y^x t^2\, d\overline{\mathrm{N}}(t) = r\int_y^x t^2\, d\mathrm{N}\left(t\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right) + x^2\left[\overline{\mathrm{N}}(x) - r\mathrm{N}\left(x\overline{\mathrm{H}}\,\mathrm{H}^{-1}\right)\right]$$
$$- y^2\left[\overline{\mathrm{N}}(y) - r\mathrm{N}\left(y\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}\right)\right] + 2\theta\left[\mathrm{mes\,B}.x.\max\left|\mathrm{N}(t) - r\mathrm{N}\left(t\frac{\overline{\mathrm{H}}}{\mathrm{H}}\right)\right| + \tau x^2\right]$$

et comme nous pouvons supposer que $8\bar{\Delta} < \sqrt{\Delta} < \frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}$, en vertu de (37) il vient

$$\max\left|\overline{\mathrm{N}}(t) - r\mathrm{N}\left(t\overline{\mathrm{H}}\,\mathrm{H}^{-1}\right)\right| < r\mathrm{N}\left(\frac{1}{4}\right) + (r+1)\Delta < \mathrm{K}.$$

Nous verrons plus loin qu'on peut prendre y tel que

$$(38) \qquad \left|y^2\int_{|t|>y} d\overline{\mathrm{N}}(t) - y^2 r\int_{|t|>y\overline{\mathrm{H}}\mathrm{H}^{-1}} d\mathrm{N}(t)\right| < \tau,$$

$$(39) \qquad \left|\overline{\sigma}^2 + \int_{-y}^{y} t^2\, d\overline{\mathrm{N}}(t) - \frac{r\mathrm{H}^2}{\overline{\mathrm{H}}^2}\left(\int_{-y\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}}^{y\frac{\mathrm{H}}{\overline{\mathrm{H}}}} t^2\, d\mathrm{N}(t) + \sigma^2\right)\right| < \tau.$$

Par conséquent

$$\overline{\sigma}^2+\int_{-x}^{x}t^2d\overline{N}(t)=r\frac{\Pi^2}{\overline{\Pi}^2}\left(\sigma^2+\int_{-x\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{x\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}t^2dN(t)\right)$$
$$-x^2\left(\int_{|t|>x}d\overline{N}(t)-r\int_{|t|>x\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}dN(t)\right)+O[\operatorname{mes}(B+B')+\tau].$$

Pour $x<2$, on a en vertu de la formule (37)

$$-x^2\left(\int_{|t|>x+2\Delta}dN(t)-r\int_{|t|>x\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}dN(t)\right)>-4\Delta(r+1),$$

$$\overline{\sigma}^2+\int_{-x-\Delta}^{x+\Delta}t^2d\overline{N}(t)>r\frac{\Pi^2}{\overline{\Pi}^2}\left(\sigma^2+\int_{-x\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{x\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}t^2dN(t)\right)-C[\tau+\operatorname{mes}(B+B')+\Delta r]$$

et de même

$$\overline{\sigma}^2+\int_{-x+\Delta}^{x-\Delta}t^2d\overline{N}(t)=r\frac{\Pi^2}{\overline{\Pi}^2}\left(\sigma^2+\int_{-x\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{x\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}t^2dN(t)\right)+C[\tau+\operatorname{mes}(B+B')+\Delta r].$$

Ces formules peuvent être réunies dans la suivante, valable pour $\eta_1<x<1$,

$$\overline{\sigma}^2+\int_{-x}^{x}t^2d\overline{N}(t)=r\frac{\Pi^2}{\overline{\Pi}^2}\left(\sigma^2+\int_{-(x-\theta\eta_1)\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{(x+\theta\eta_1)\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}t^2dN(t)\right)+\theta'\eta_1,$$

où

$$\eta_1=O[\Delta+\tau+\operatorname{mes}(B+B')].$$

Reste à borner $\operatorname{mes}(B+B')$ et à prouver qu'on peut choisir y de la façon indiquée. Si $\operatorname{mes}B>4l\Delta$, il existe l points de B, $x_1,\ldots,x_l$, avec $x_i-x_{i-1}>4\Delta$. L'inégalité

$$\int_{x_i}^{\infty}d\overline{N}(t)>r\int_{x_i\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{\infty}dN(t)+\tau\qquad(x_i>2\Delta)$$

entraîne

$$(r+1)\Delta+r\int_{(x_i-2\Delta)\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{x_i}dN(t)\geq r\int_{x_i\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{\infty}dN(t)+\tau,$$

$$r\int_{(x_i-2\Delta)\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{x_i}dN(t)>\tau-\Delta(r+1).$$

De même

$$\int_{x_i}^{\infty}d\overline{N}(t)<r\int_{x_i\frac{\overline{\Pi}}{\Pi}}^{\infty}d(Nt-\tau)$$

entraine

$$r\int_{r_1\frac{H}{\overline{H}}}^{(r_1+2\Delta)\frac{H}{\overline{H}}} dN(t) > \tau-(r+1)\Delta.$$

Donc

$$r\int_{(\gamma-2\Delta)\frac{H}{\overline{H}}}^{\gamma} dN(t) > l[\tau-(r+1)\Delta],$$

d'où, comme $(\gamma-2\Delta)\frac{\overline{H}}{H} > \frac{1}{2}-2\Delta\frac{\overline{H}}{H} > \frac{1}{4}$ par hypothèse, et que

$$r\left|N\left(\frac{1}{4}\right)\right| + N\left(-\frac{1}{4}\right) < K,$$

$$\text{mes}(B+B') < 4\Delta K[\tau-(r+1)\Delta]^{-1}.$$

L'ensemble des points z de $\left(\frac{1}{2}HH^{-1}, HH^{-1}\right)$ pour lesquels on n'a pas (38) est également de mesure $< 4\Delta K[\tau-(r+1)\Delta]$.

Si (39) n'est pas vérifié pour un point z de $\left(\frac{1}{2}H\overline{H}^{-1}, H\overline{H}^{-1}\right)$, on a par exemple

$$\overline{\sigma}^2 + \int_{-z}^{z} t^2 d\overline{N}(t) > r\overline{H}^2\overline{H}^{-2}\left(\sigma^2 + \int_{-zHH^{-1}}^{zHH^{-1}} t^2 dN(t)\right) + \tau,$$

$$\int_{(z-2\Delta)\frac{H}{\overline{H}} < t \leq \frac{H}{\overline{H}}} t^2 dN(t) > [\tau-(r+1)\Delta]\frac{H^2}{\overline{H}^2 r}.$$

Comme $\int_{-1}^{1} x^2 dN(x) < K$, la mesure des points de $\left(\frac{1}{2}HH^{-1}, HH^{-1}\right)$ pour lesquels on n'a pas (39) est $< 4KrH^2\overline{H}^{-2}\Delta[\tau-(r+1)\Delta]^{-1}$.

La mesure des points z de $\left(\frac{1}{2}HH^{-1}, HH^{-1}\right)$ pour lesquels (38) ou (39) n'est pas vérifié est donc

$$O\left[\Delta[\tau-(r+1)\Delta]^{-1}\right].$$

Si

$$\frac{H}{\overline{H}} > \frac{C\Delta}{\tau-(r+1)\Delta} + C\Delta,$$

cette mesure sera inférieure à $\frac{1}{2}HH^{-1}-2\Delta$ et nous pouvons trouver un nombre γ ayant les propriétés indiquées. Nous allons prendre

$$2C\Delta[1+(\tau-r\Delta-\Delta)^{-1}] = \sqrt{\Delta}, \qquad \tau = O(\sqrt{\Delta}).$$

on a l'équation (36) avec $\tau_1 = O(\sqrt{\Delta})$. C. Q. F. D.

22. Théorème XIII. — *Si* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *n'est pas vide, il y a une suite de lois* I_i *normées telles que :*

1° *toute classe* $\mathrm{K}[\mathrm{J}]$ *de* $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ *est de la forme*

$$\lim_{\rho\to\infty} \mathrm{K}[\mathrm{I}'_{n_\rho}] \qquad (t>0).$$

2° *il existe une suite d'entiers* j_p *et une suite de nombres* τ_p, $\{j_p\}$ *et* $\{\tau_p\}$ *pouvant être vides, telles que*

$$\varphi'[\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_{n+1}]\to 0 \qquad \text{si } n\neq j_p,$$

$$\sigma_n^2+\int_{-\tau_p}^{\tau_p} t^2\, d\mathrm{N}_n(t)\to 0, \qquad \int_{|t|>\tau} d\mathrm{N}(t)<\mathrm{K} \qquad \text{si } n=j_p.$$

Démonstration. — Si $e_n<\varepsilon$, on peut trouver une loi I et une suite de nombres z_n tels qu'on ait

$$r^n\int_{xz_n}^{\infty} d\mathrm{F}(t)=\int_{x+0\varepsilon}^{\infty} d\mathrm{N}(t)+0'\varepsilon \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{40}$$

Supposons d'abord que $e_n\to 0$ et que $\underline{\lim}\,\frac{z_n}{z_{nr}}>0$, z_n étant le nombre intervenant dans la formule (40) où nous prendrons $\varepsilon=2e_n$. Il y aura une suite de lois I_n de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ normées avec $\varphi_{r^n}[\mathrm{I}_n]<2e_n$, et en vertu du lemme, $\underline{\lim}\,\frac{z_n}{z_{nr}}$ étant $\neq 0$, on a $\varphi'[\mathrm{I}_n, \mathrm{I}_{n+1}]\to 0$. Soit $\mathrm{K}[\mathrm{J}]$ une classe de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$, nous pouvons trouver deux suites de nombres m_ρ et n_ρ telles que $m_\rho/r^{n_\rho}\to u$, $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{m_\rho}]\to\mathrm{K}[\mathrm{J}]$, donc $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{r^{n_\rho}}]\to\mathrm{K}\left[\mathrm{J}^{\frac{1}{u}}\right]$. Comme $\varphi_{r^{n_\rho}}[\mathrm{I}_{n_\rho}]\to 0$, on en tire $\mathrm{I}_{n_\rho}\to\mathrm{J}^{\frac{1}{u}}$. Si $e_n\to 0$ et $\underline{\lim}\, z_n/z_{nr}\neq 0$, nous pouvons donc indiquer une suite I_n ayant les propriétés demandées et la suite $\{j_p\}$ est vide.

a. Supposons maintenant $\overline{\lim}\; e_n\neq 0$ ou $\underline{\lim}\,\frac{z_n}{z_{nr}}=0$. Soient I une loi de $\mathrm{EP}'[\mathcal{L}]$ à dispersion $\neq 0$ pour la probabilité 1, que nous pouvons supposer normée, et ε un nombre très petit quelconque. Il y aura une suite de nombres $\{n_\rho\}$ avec $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{n_\rho}]\to\mathrm{K}[\mathrm{I}]$. Soit $m_\rho=n_\rho r^{-i_\rho}$ (i_ρ entier) le nombre défini par les conditions

$$e_{m_\rho}\leq\varepsilon^2, \qquad e_{m_\rho r}<\varepsilon^2, \qquad \ldots, \qquad e_{\frac{n_\rho}{r}}<\varepsilon^2,$$

ou

$$\frac{z_{m_\rho}}{z_{m_\rho r}}\leq\varepsilon, \qquad \frac{z_{m_\rho r}}{z_{m_\rho r^2}}>\varepsilon, \qquad \ldots, \qquad \frac{z_{\frac{n_\rho}{r}}}{z_{n_\rho}}>\varepsilon.$$

Supposons $\overline{\lim}\, e_{m'_\rho}\neq 0$ et $\underline{\lim}\,\frac{z_{m'_\rho}}{z_{m'_\rho r}}\neq 0$. Il y aura une suite de nombres m'_ρ avec $\underline{\lim}\, e_{m'_\rho}\neq 0$ et $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{m'_\rho}]\to\mathrm{K}[\mathrm{E}]$, l'hypothèse $\mathrm{K}[\mathcal{L}^{p_i}]\to\mathrm{K}[\mathrm{J}]$, $\mathrm{K}[\mathrm{J}]\neq\mathrm{K}[\mathrm{E}]$ entraînant $e_{p_i}\to 0$. Il résulte du théorème que pour $\rho>\rho_0$, il existe un entier p

de la forme $m'_p r^s$, $m'_p < p < n_p$ avec

$$\frac{p}{x^2}\int_{-c}^{x} t^2\,dF(t) < \varepsilon, \qquad 1 < p\int_{|t|>c} dF(t) \leq r,$$

$$p\int_{|t|>\frac{x}{2}} dF(x) < r + 4\varepsilon < r + 1$$

et, comme on a pour une certaine loi I'

$$p\int_{x-c}^{\infty} dF(t) = \int_{x-0\varepsilon}^{\infty} dN'(t) + 0'\varepsilon, \qquad \ldots.$$

on en tire

$$\int_{|t|>\frac{1}{2}\frac{x}{y}-2\varepsilon} dN'(t) < K, \tag{41}$$

et pour $1 > \frac{x}{y} > 6\varepsilon$

$$\sigma'^2 + \int_{-\frac{x}{y}+\varepsilon}^{\frac{x}{y}-\varepsilon} t^2\,dN'(t) < 2\varepsilon.$$

Soit $c = \frac{x}{y} - \varepsilon$, on a

$$\int_{t<-c} dN'(t) < K, \qquad \int_{-c}^{c} x^2\,dN'(x) + \sigma'^2 < 2\varepsilon.$$

Si $\frac{x}{y} > 1$, on a

$$\sigma'^2 + \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} t^2\,dN'(t) < 2\varepsilon.$$

et, comme la dispersion de I' pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est 1, on a

$$\int_{t<-1+\varepsilon} dN'(t) < K.$$

Si $\frac{x}{y} < 6\varepsilon$, on a toujours (41) et

$$\frac{p}{x^2}\int_{-6\varepsilon y}^{6\varepsilon y} t^2\,dF(t) < \frac{p}{y^2}\int_{-x}^{x} t^2\,dF(t) + 36r\varepsilon^2 < 2\varepsilon.$$

donc

$$\int_{t<-5\varepsilon} dN'(t) < K, \qquad \int_{-5\varepsilon}^{5\varepsilon} t^2\,dN'(t) + \sigma'^2 < 3\varepsilon.$$

Nous venons de prouver que dans tous ces cas, on peut écrire pour un nombre convenable c,

$$\sigma'^2 + \int_{-c}^{c} t^2\,dN'(t) < K\varepsilon, \qquad \int_{t<-c} dN'(t) < K. \tag{42}$$

b. Admettons que pour un certain nombre m_ρ, l'on a $e_{m_\rho} < \varepsilon^2$, $e_{m_\rho r} < \varepsilon^2$, ..., $\frac{z_{m_\rho}}{z_{m_\rho r}} < \varepsilon$. Dans ce cas on a deux lois normées I′ et I″ de EP′[$\mathcal{L}$] respectivement avec les relations

$$m_\rho \int_{x z_{m_\rho}}^{\infty} d\mathrm{F}(t) = \int_{x+\theta\varepsilon}^{\infty} d\mathrm{N}''(t) + \theta'\varepsilon, \qquad \ldots,$$

et

$$r m_\rho \int_{x z_{m_\rho r}}^{\infty} d\mathrm{F}(t) = \int_{x+\theta\varepsilon}^{\infty} d\mathrm{N}'(t) + \theta'\varepsilon, \qquad \ldots.$$

Des inégalités

$$\frac{m_\rho}{z^2_{m_\rho}} \int_{-z_{m_\rho}}^{z_{m_\rho}} t^2 d\mathrm{F}(t) < \sigma''^2 + \int_{-1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} t^2 d\mathrm{N}''(t) < \mathrm{K}$$

et

$$r m_\rho \int_{|t|>z_{m_\rho}} d\mathrm{F}(t) < \mathrm{K},$$

qui résultent du fait que I′ est normé, on déduit

$$r m_\rho \int_{|t|>z_{m_\rho}} d\mathrm{F}(t) < \mathrm{K}, \qquad \frac{r m_\rho}{z^2_{m_\rho r}} \int_{-z_{m_\rho r}}^{z_{m_\rho r}} t^2 d\mathrm{F}(t) < r\varepsilon^2 \mathrm{K}$$

ce qui conduit encore aux équations (42). Il existe par conséquent une suite finie de lois normées de EP′[$\mathcal{L}$], $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_l$ où $\mathrm{I}_1 = \mathrm{I}'$, $\mathrm{I}_l = \mathrm{I}$ avec $\varphi'[\mathrm{I}_i, \mathrm{I}_{i-1}] = \mathrm{O}(\tau)$, $(i = 2, \ldots, l)$, I_1 vérifiant (42).

Ceci étant, si I est une loi de EP′[$\mathcal{L}$], il existe un nombre t tel que la dispersion de I^t pour la probabilité $\frac{1}{2}$ est $\neq 0$ (ceci résulte du théorème sur l'augmentation de la dispersion). Nous pouvons donc trouver une suite de lois normées de EP′[$\mathcal{L}$], $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_n$ telle que toute classe K[J] de EP′[$\mathcal{L}$] soit de la forme $\lim_{p\to\infty} \mathrm{K}[\mathrm{J}'_{n_p}]$. A chaque loi J_n, nous pouvons faire correspondre une suite de lois normées $\mathrm{I}_{n1}, \ldots, \mathrm{I}_{nm}$ où $m = m_n$, telles que

$$\varphi'[\mathrm{I}_{n.i}, \mathrm{I}_{n.i+1}] < \frac{1}{n}, \qquad \mathrm{I}_{nm} = \mathrm{J}_{n1}, \qquad \sigma^2_{n1} + \int_{-c_n}^{c_n} t^2 d\mathrm{N}_{n1}(t) < \frac{1}{n}, \qquad \int_{|t|>c_n} d\mathrm{N}_{n1}(t) < \mathrm{K}.$$

La suite des lois I_n obtenue en dénombrant la suite

$$\mathrm{I}_{11}, \ \ldots, \ \mathrm{I}_{nm_1}, \ \mathrm{I}_{21}, \ \ldots, \ \mathrm{I}_{2m_2}, \ \ldots, \ \mathrm{I}_{n1}, \ \ldots, \ \mathrm{I}_{nm_n}$$

a bien les propriétés indiquées. Ce qui termine la démonstration du théorème.

SUR

UNE INÉGALITÉ FONDAMENTALE

PAR M. S. MANDELBROJT.

INTRODUCTION.

L'inégalité que nous démontrons dans ce travail permet de retrouver la presque totalité des résultats connus de plusieurs branches de la théorie des fonctions, ainsi que des résultats considérablement plus généraux que ceux déjà connus. Cette inégalité constitue un principe général, d'un caractère asymptotique, applicable au prolongement analytique, à la quasi-analyticité, aux problèmes gravitant autour du problème de Watson.

Les résultats de ce travail sont essentiellement plus généraux et, en même temps, plus simples que ceux que nous avons établis dans un Mémoire paru dans les *Transactions* (1).

Les inégalités de Cauchy portant sur les coefficients d'une série de Taylor, et transposés à une série de Dirichlet, fournissent une évaluation des coefficients d'une telle série par l'intermédiaire du maximum du module de la fonction correspondante sur une ligne verticale. Le point de départ de ce travail est d'évaluer les coefficients des expressions de la forme $\sum_{k=1}^{m} d_k e^{\lambda_k s}$ qui représentent, lorsque m tend vers l'infini, une fonction $F(s)$ seulement avec une « précision » suffisante. D'ailleurs, et ce point n'est pas moins important pour les applications, cette évaluation est faite en partant du maximum du module de $F(s)$ sur des cercles situés aussi loin à gauche que le prolongement analytique de $F(s)$ le permet, les rayons de ces cercles ne dépendant d'ailleurs que de la « fréquence » des λ_k.

(1) S. MANDELBROJT, *Quasi-analyticity and analytic continuation — a general principle* (*Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 55, n° 1, p. 96-131, janvier 1944).

Pour que nos inégalités soient valables, il suffit que les polynomes de Dirichlet représentent $F(s)$ avec une « précision » suffisante dans un domaine contenant des points s dont la partie réelle est arbitrairement grande. Cette précision doit être d'autant plus grande que la région est moins évasée à l'infini $(\mathcal{R}(s)\to\infty)$ et que la « fréquence » des λ_k est plus grande. Ce sont d'ailleurs des propriétés assez fines de distribution de la suite $\{\lambda_k\}$ qui jouent ici un rôle essentiel.

Le fait que la série $\Sigma d_k e^{-\lambda_k s}$ n'est pas supposée convergente (pour aucune valeur de s) est très important, car, par exemple, les fonctions indéfiniment dérivables sur une demi-droite fournissent pour leurs transformées de Fourier des séries qui ne représentent cette transformée qu'avec une précision qui est d'autant plus grande que la classe à laquelle appartient la fonction indéfiniment dérivable est plus restreinte. Ce ne sont que des fonctions d'un caractère bien trivial qui fournissent des transformées de Fourier à séries convergentes. Cette remarque fournit une nouvelle preuve, s'il en était encore besoin, qu'il est parfaitement arbitraire et beaucoup trop restrictif, au point de vue de la théorie des fonctions d'une variable réelle, de ne considérer que des séries de Dirichlet convergentes.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Nous allons commencer par quelques définitions. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs croissants $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_n\ldots$. Une telle suite sera souvent désignée par $(0<\lambda_n\uparrow)$. Soit $N(\lambda)$ le nombre d'éléments de $\{\lambda_n\}$ inférieurs à $\lambda(\lambda>0)$; cette fonction sera appelée *distribution* de $\{\lambda_n\}$. On a $N(\lambda)=0$ pour $0<\lambda\leq\lambda_1$. La fonction $D(\lambda)=N(\lambda)/\lambda$ sera appelée *fonction de densité* de $\{\lambda_n\}$. La quantité $D^*=\overline{\lim_{\lambda=\infty}}D(\lambda)$ est la *densité supérieure* de $\{\lambda_n\}$. La fonction $D^*(\lambda)=\overline{\text{borne}}_{x\geq\lambda}D(x)$ sera appelée *fonction de densité supérieure* de $\{\lambda_n\}$. Il est évident que $D^*(\lambda)$ tend en décroissant vers D^*. $D^*(\lambda)$ est une fonction continue $(\lambda\geq 0)$, à moins que l'on n'ait identiquement $D^*(\lambda)\equiv\infty$.

La fonction $\overline{D}(\lambda)=\int_0^\lambda D(x)\,dx/\lambda(\lambda>0)$ est appelée *fonction de densité moyenne*. $\overline{D}^*=\overline{\lim_{\lambda=\infty}}\overline{D}(\lambda)$ est la *densité moyenne supérieure*. La fonction $D^*(\lambda)=\overline{\text{borne}}_{x\geq\lambda}\overline{D}(x)(\lambda>0)$ est appelée *fonction de densité moyenne supérieure*. On voit que $D^*(\lambda)$ tend en décroissant vers $\overline{D}^*$. On a toujours $\overline{D}^*\leq D^*$, mais il est très facile de construire des exemples où $\overline{D}^*<D^*$; voici une manière simple pour y parvenir : soit $\{\nu_n\}(\nu_0=0)$ une suite d'entiers tendant vers l'infini en croissant. Posons

$$\lambda_n=\nu_k+(n-\nu_{k-1})/(\nu_k-\nu_{k-1}),$$

pour

$$\nu_{k-1}+1\leq n<\nu_k \quad (k\geq 1).$$

Si la suite $\{\nu_n\}$ tend vers l'infini assez rapidement, on a

$$\overline{D}^*<D^*=1 \quad (1).$$

Dans tout ce travail nous supposerons que $\overline{D}^*<\infty$.

Si $D>\overline{D}^*$, la fonction

$$\nu(D)=\overline{\operatorname{borne}}_{\lambda>0}\,\lambda\big(\overline{D}(\lambda)-D\big)=\overline{\operatorname{borne}}_{\lambda>0}\int_0^\lambda\big(D(x)-D\big)\,dx$$

est non négative, continue et décroissante. On peut dire que $\nu(D)$ indique le « nombre moyen » des termes de $\{\lambda_n\}$ qui empêchent la distribution d'être toujours inférieure ou égale à $D\lambda$. Cette fonction mesure une certaine irrégularité de la distribution $N(\lambda)$. Nous l'appellerons *fonction d'excès de la suite* $\{\lambda_n\}$.

2. Posons

$$\Lambda(r)=\Pi(1+r^2/\lambda_n^2) \qquad (r\geq 0). \tag{1}$$

Comme nous supposons $\overline{D}^*<\infty$, ce produit infini converge et l'on a

$$\log\Lambda(r)=2r^2\int_0^\infty D(\lambda)\,d\lambda/(\lambda^2+r^2)=-2r^2\int_0^\infty\overline{D}(\lambda)\lambda\,d_\lambda\left(\frac{1}{\lambda^2+r^2}\right). \tag{2}$$

On a en effet en intégrant par parties

$$2\int_0^t D(\lambda)r^2\,d\lambda/(r^2+\lambda^2)=-\log(1+r^2/t^2)N(t)+\int_0^t\log(1+r^2/\lambda^2)\,dN(\lambda).$$

Mais comme $\overline{D}^*<\infty$, il existe une suite $0<t_i\to\infty$, telle que $D(t_i)=O(1)$, et, pour cette suite $\{t_i\}$ et pour r fixe, on a

$$\log(1+r^2/t_i^2)N(t_i)\sim r^2N(t_i)/t_i^2\to 0.$$

Donc

$$2r^2\int_0^\infty D(\lambda)\,d\lambda/(\lambda^2+r^2)=\int_0^\infty\log(1+r^2/\lambda^2)\,dN(\lambda)=\Sigma\log(1+r^2/\lambda_n^2). \tag{3}$$

En intégrant par parties de la seconde manière, on obtient

$$\int_0^t D(\lambda)\,d\lambda/(\lambda^2+r^2)=\left(\int_0^t D(\lambda)\,d\lambda\right)\Big/(t^2+r^2)$$
$$-\int_0^t\left(\int_0^x D(\lambda)\,d\lambda\right)d_x\left(\frac{1}{x^2+r^2}\right)$$

(1) On peut d'ailleurs noter, comme me l'ont fait remarquer MM. J. Deny et A. Dvoretzky, que $D^*\leq e\overline{D}^*$, la constante e étant ici la meilleure possible.

et il résulte de $\overline{D}^* < \infty$ que

$$\int_0^\infty D(\lambda)\, d\lambda/(\lambda^2+x^2) = -\int_0^\infty \overline{D}(\lambda)\lambda\, d_\lambda\Big(\frac{1}{\lambda^2+r^2}\Big).$$

Or la dernière expression a certainement une valeur finie, ce qui prouve, d'après (3), que la somme $\log A(r) = \Sigma \log(1 + r^2/\lambda_n^2)$ converge et que cette somme est représentée par chacune des intégrales dans (2). Il résulte immédiatement de (2) que

$$\overline{\lim}\, \log A(r)/r \leqq \pi \overline{D}^*. \tag{4}$$

3. Posons

$$A_n(r) = \prod_{m\neq n}(1 + r^2/\lambda_m^2),$$

$$L_n(u) = \int_0^\infty e^{-ur} A_n(r)\, dr. \tag{5}$$

Il résulte de (4) que $L_n(u)$ est une fonction continue pour $u > \pi\overline{D}^*$. En réalité $L_n(n)$ est analytique pour $u > \pi\overline{D}^*$.

Nous allons maintenant démontrer que :

Pour $D > \overline{D}^*$ *on a*

$$\log L_n(\pi D) \leqq \log(\pi\lambda_n/2) + 2\nu(D). \tag{6}$$

On a, en effet, d'après (5),

$$\begin{aligned} L_n(\pi D) &= \int_0^\infty e^{-\pi D r}\Big(A(r)/(1 + r^2/\lambda_n^2)\Big)\, dr \\ &= \lambda_n \int_0^\infty e^{-\pi\lambda_n D t} A(\lambda_n t)\, dt/(1+t^2) \\ &\leqq (\pi\lambda_n/2)\, \overline{\text{borne}}_{x\geqq 0}\, e^{\log A(x) - \pi D x}. \end{aligned}$$

On a donc, d'après (2),

$$\begin{aligned} \log L_n(\pi D) &\leqq \log(\pi\lambda_n/2) - 2\,\overline{\text{borne}} \int_0^\infty \lambda\Big(\overline{D}(\lambda) - D\Big) d_\lambda\Big(r^2/(\lambda^2+r^2)\Big) \\ &\leqq \log(\pi\lambda_n/2) + 2\,\overline{\text{borne}}\, \lambda\Big(\overline{D}(\lambda) - D\Big) \\ &= \log(\pi\lambda_n/2) + 2\,\nu(D). \end{aligned}$$

4. Nous ferons correspondre à la suite $\{\lambda_n\}$ la suite $\{A_n^*\}$ que nous appellerons *suite associée à la suite* $\{\lambda_n\}$, et qui est définie par

$$A_n^* = \prod_{m\neq n} \frac{\lambda_m^2}{|\lambda_n^2 - \lambda_m^2|} \qquad (n \geqq 1). \tag{7}$$

Puisque le produit dans (1) converge, on voit que A_n^* a une valeur finie non nulle.

Bien que nous n'ayons pas à utiliser, dans ce Mémoire, la valeur de Λ_n^*, nous allons indiquer une manière rapide d'évaluer cette quantité, cette évaluation étant importante pour les applications de notre théorème fondamental à la théorie du prolongement analytique.

En posant $h_n = \min_{0 \leq m \leq N(\sqrt{2}\lambda_n)} (\lambda_{m+1} - \lambda_m)$ $(\lambda_0 = 0)$, *on a les deux inégalités suivantes* (A *étant une constante*) (¹) :

$$\log \Lambda_n^* \leq \lambda_n \left[5 D(\sqrt{2}\lambda_n) + 2 D^*(\sqrt{2}\lambda_n) - 3 \log\left(\lambda_n D(\sqrt{2}\lambda_n)\right) D(\sqrt{2}\lambda_n) \right] + A,$$

$$\log \Lambda_n^* \leq \lambda_n \left[5\left(D(\sqrt{2}\lambda_n) + \bar{D}^*(\sqrt{2}\lambda_n)\right) + 3\bar{D}(\sqrt{2}\lambda_n) - 3 \log\left(h_n D(\sqrt{2}\lambda_n)\right) \bar{D}(\sqrt{2}\lambda_n) \right] + A.$$

Soit, en effet, $a > 1$. Pour simplifier l'écriture, n étant fixé, on posera

$$N(a\lambda_n) = N, \qquad \lambda_n = \lambda, \qquad h = h_n(a) = \min_{0 \leq m \leq N} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \quad (\lambda_0 = 0).$$

On a

$$\Lambda_n^* = A_n^{-1} . B_n^{-1},$$

avec

$$A_n = \prod_{\substack{m \neq n \\ m=1}}^{N-1} | 1 - \lambda^2/\lambda_m^2 |, \qquad B_n = \prod_{m=N}^{\infty} (1 - \lambda^2/\lambda_m^2).$$

Mais

$$\log A_n \geq \sum_{k=1}^{N-1} \log\left[\left(\lambda/(\lambda - kh)\right)^2 - 1 \right] + \sum_{k=1}^{N-n} \log\left[1 - \left(\lambda/(\lambda + kh)\right)^2 \right]$$

$$\geq \int_{1-n}^{N-n} \log\left[h\,|x|\,(2\lambda + xh)/(\lambda + xh)^2 \right] dx \geq (1/h) \int_{h(1-n)}^{h(N-n)} \log\left[|t|/(\lambda + t) \right] dt$$

$$\geq (N-1) \log\left[\lambda/\left(\lambda + (N-n)h\right) \right] + (1/h) \int_{h(1-n)}^{h(N-n)} \log(|t|/\lambda)\, dt.$$

Comme

$$Nh = N(a\lambda)h \leq a\lambda,$$

on a pour $|t| \leq hN$

$$|t| \leq a\lambda.$$

On a aussi

$$\log\left(1 + (N-n)h/\lambda\right) < (N-n)h/\lambda,$$

ce qui permet d'écrire

$$\log A_n \geq (2/h) \int_0^{hN} \log(t/a\lambda)\, dt + (N-1)\log a - N(N-n)h/\lambda$$

$$\geq \left[2 \log\left(hD(a\lambda)\right) - (2 + a - \log a) \right] N + na - \log a. \tag{9}$$

(¹) Si $\lim(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h > 0$, les inégalités qui suivent donnent immédiatement une inégalité asymptotique pour $\log \Lambda_n^*/\lambda_n$, qu'on obtient aussi, comme on le sait, par la théorie des fonctions, mais d'une manière bien pénible.

On a de même, en intégrant par parties,

$$\log B_n = \int_{a\lambda_n}^{\infty} \log[1-(\lambda_n/x)^2]\, dN(x) \tag{10}$$
$$= -\log(1-1/a^2)N - 2\lambda_n^2 \int_{a\lambda_n}^{\infty} D(x)\, dx/(x^2-\lambda_n^2),$$

car, comme il existe une suite $\{k_i\}$ $(0<k_i\to\infty)$ telle que $N(k_i)/k_i^2\to 0$, on a

$$\lim_{i=\infty} \log[1-(\lambda/k_i)^2]N(k_i) = 0.$$

L'inégalité (10) fournit immédiatement

$$\log B_n \geqq -\log(1-1/a^2)N - 2\lambda_n^2 D^*(a\lambda_n)\int_{a\lambda_n}^{\infty} dx/(x^2-\lambda_n^2) \tag{11}$$
$$= -\log(1-1/a^2)N + \log[(a-1)/(a+1)]D^*(a\lambda_n)\lambda_n.$$

Les inégalités (9) et (10) fournissent, lorsqu'on y pose $a=\sqrt{2}$, la première de nos inégalités.

En intégrant par parties l'intégrale dans (10), on a

$$\int_{a\lambda_n}^{\infty} D(x)\, dx/(x^2-\lambda_n^2) = \overline{D}(x)x/(x^2-\lambda_n^2)\Big]_{a\lambda_n}^{\infty} + 2\int_{a\lambda_n}^{\infty} \overline{D}(x)x^2\, dx/(x^2-\lambda_n^2)$$
$$\leqq a\overline{D}(a\lambda_n)/\lambda_n(1-a^2) + (2/\lambda_n)\overline{D}^*(a\lambda_n)\int_a^{\infty} t^2\, dt/(t^2-1)^2.$$

En revenant alors à (10) et en tenant compte de (9), on obtient, en prenant $a=\sqrt{2}$, notre seconde inégalité.

5. Soit Δ un domaine contenant des points $s=\sigma+it$ avec σ arbitrairement grand, c'est-à-dire un domaine dont l'intersection avec aucun demi-plan $\sigma>\sigma_0$ n'est vide. Soit $F(s)$ une fonction holomorphe dans Δ. Soit $\{d_n\}$ une suite de nombres réels ou complexes. Soit, enfin, $p_n(x)$ une fonction croissante vers l'infini telle qu'on ait pour $s\in\Delta$, x étant suffisamment grand

$$\overline{\underset{m\geqq n}{\text{borne}}}\ \overline{\underset{\sigma\geqq x}{\text{borne}}} \left| F(s) - \sum_{k=1}^{m} d_k e^{-\lambda_k s} \right| \leqq e^{-p_n(x)}.$$

On dira que *les sommes* $\sum_{k=1}^{m} d_k e^{-\lambda_k s}$, *avec* $m\geqq n$, *représentent* $F(s)$ *dans* Δ *avec la précision logarithmique* $p_n(\sigma)$. Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\lambda_k s}$ converge pour σ suffisamment grand vers $F(s)$, $s\in\Delta$, la précision logarithmique peut être prise comme égale à $+\infty$ pour tout n. Réciproquement, si $p_n(\sigma)=\infty$, pour $\sigma>c$ il y a ultra-convergence de la série dans $\Delta(\sigma>c)$ vers $F(s)$.

Nous désignerons par $C(a, R)$ le cercle $|s-a|<R$. La réunion des cercles $C(s, R)$ dont les centres s parcourent un arc de Jordan L est appelée *canal de largeur* $2R$. L'arc L est la *ligne centrale du canal.*

Soient Δ_1 et Δ_2 deux domaines (ouverts ou fermés) dans le plan s; si la fonction $F(s)$ est holomorphe dans la réunion de Δ_1, Δ_2 et d'un canal de largeur $2R$ dont les cercles extrêmes se trouvent respectivement dans Δ_1 et Δ_2, on dira que $F(s)$ peut être prolongée analytiquement de Δ_1 (ou de Δ_2) à travers un canal de largeur $2R$ jusqu'à Δ_2 (ou Δ_1).

ÉNONCÉ DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

1. Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème fondamental. Nous lui donnerons plusieurs formes, tout en indiquant plus loin les relations qui existent entre ces différentes formes. Ces formes d'énoncé ne diffèrent que par leurs hypothèses; la conclusion est toujours la même. Elle se traduit par l'inégalité (I).

On remarquera que nous n'avons souligné que les formes A, B et D qui sont les plus intéressantes pour les applications.

THÉORÈME F. *Forme* A. — *Hypothèse* I. — $\{\lambda_n\}$ $(0<\lambda_n\uparrow)$ *est de densité supérieure* $D^*<\infty$. Δ *est un domaine dans le plan* $s=\sigma+it$ *donné par* $\sigma>a_0$, $|t|<\pi g(\sigma)$, *où* $g(\sigma)$ *est une fonction continue, à variation bornée, et telle que* $g(\sigma)>D^*$, $\lim g(\sigma)>D^*$.

Hypothèse II. — $F(s)$ *est une fonction holomorphe dans* Δ *et peut être prolongée analytiquement de* Δ *à travers un canal plus large que* $2\pi D^*$ *jusqu'au cercle* $\overline{C(s_0, \pi R)}$ (1).

Hypothèse III^a. — *La suite* $\{d_m\}$ *et l'entier* n *sont tels que les sommes* $\sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s}$, *avec* $m\geq n$, *représentent* $F(s)$ *dans* Δ *avec une précision logarithmique* $p_n(\sigma)$ *satisfaisant à la condition*

$$\text{(A)}\qquad \int^{\infty} p_n(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma}\frac{du}{g(u)-D^*(p_n(u))}}\, d\sigma = \infty \quad (2),$$

où $D^*(\lambda)$ *est la fonction de densité supérieure de* $\{\lambda_n\}$.

CONCLUSION. — *On a*

$$\text{(I)}\qquad |d_n| \leq (\pi^2 \lambda_n R/2)\, e^{\pi\lambda_n R}\, \Lambda_n^* M(s_0, R)\, e^{\lambda_n \sigma_0}.$$

(1) E étant un ensemble, $\overline{E}$ désigne son adhérence (sa fermeture).

(2) Lorsque, dans une intégrale définie, on omet une de ses limites, par exemple sa limite inférieure, c'est que la relation écrite doit avoir lieu lorsque cette limite est choisie suffisamment grande (s'il s'agit de la limite inférieure).

où $\nu(D)$ *est la fonction d'excès de* $\{\lambda_n\}$, $\{\Lambda_n^*\}$ *la suite associée à la suite* $\{\lambda_n\}$,

$$M(s_0, R) = \text{Max}\,|F(s)|\,(s \in \overline{C(s_0, \pi R)}),$$

$\mathcal{R}(s_0)$ *la partie réelle de* s_0.

Forme B. — *Dans les hypothèses* I *et* II, D^* *est remplacé par la densité moyenne supérieure* $\overline{D}^*$, *et dans l'intégrale* (A), $D^*(p_n(u))$ *est remplacé par* $\overline{D}^*(p_n(u))$, *où* $\overline{D}^*(\lambda)$ *est la fonction de densité moyenne supérieure de* $\{\lambda_n\}$.

Même conclusion que dans la forme (A).

Forme C. — Mêmes hypothèses I et II que dans la forme B. L'hypothèse III′ est remplacée par l'hypothèse suivante :

Hypothèse III^c. — Les sommes $\sum^{m} d_k e^{-\lambda_k s}$, avec $m \geqq n$, représentent $F(s)$ dans Δ avec une précision logarithmique $p_n(\sigma)$ satisfaisant à la condition

$$(C) \qquad \int^{\infty} p_n(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - \nu^{-1}(\alpha p_n(u))}}\, d\sigma = \infty,$$

où α est une constante telle que $0 < \alpha < 1/2$, et où ν^{-1} est la fonction inverse de la fonction ν, c'est-à-dire

$$\nu^{-1}(x) = \underset{\overline{\nu(D)} \leq x}{\text{borne D}} \quad (1).$$

Même conclusion que dans la forme A.

Forme D. — Mêmes hypothèses I et II que dans la forme B. L'hypothèse III′ est remplacée par l'hypothèse suivante :

Hypothèse III^d. — *Les sommes* $\sum_{1}^{m} d_k e^{-\lambda_k s}$, *avec* $m \geqq n$, *représentent* $F(s)$ *dans* Δ *avec une précision logarithmique* $p_n(\sigma)$ *telle qu'il existe une fonction continue décroissante* $h(\sigma)$, *avec* $\lim h(\sigma) = \overline{D}^*$, *et une fonction croissante* $C(\sigma)$ *telles que*

$$(D) \qquad \begin{cases} 2\nu\big(h(\sigma)\big) - p_n(\sigma) < -C(\sigma), \\ \displaystyle\int^{\infty} C(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{g(u) - h(u)}}\, d\sigma = \infty. \end{cases}$$

Même conclusion que dans la forme A.

---

(1) C'est-à-dire que, si $\lim_{D \to \overline{D}^*} \nu(D) = \infty$, on a, pour x suffisamment grand, $\nu^{-1}(x) = D$, où $D > \overline{D}^*$ est tel que $\nu(D) = x$. Si, par contre, $\lim_{D \to \overline{D}^*} \nu(D) < \infty$, on a, pour x suffisamment grand, $\nu^{-1}(x) = \overline{D}^*$.

Forme E. — Mêmes hypothèses I et II que dans la forme B. L'hypothèse III^a est remplacée par l'hypothèse suivante :

Hypothèse III^e. — Cette hypothèse diffère de l'hypothèse III^d par le fait que dans les relations (D) de III^d l'expression $2\nu\left(h(\sigma)\right)$ est remplacée par l'expression $\log L_n\left(\pi h(\sigma)\right)$, où la fonction L_n est définie par (5).

Même conclusion que dans la forme A.

2. Avant de comparer les différentes formes d'énoncés, remarquons que, dans toutes, la condition III s'exprime par une inégalité de la forme

$$\int A(\sigma)e^{-\int^{\sigma}\frac{du}{E(u)}}d\sigma=\infty,$$

où $E(u)\geq k>0$ et où $A(\sigma)$ est une fonction croissante. Pour $A(\sigma)$ donnée, cette condition est d'autant plus restrictive que la fonction $E(u)$ est plus petite.

Il en résulte que si $D^*<D'$ la forme A est plus restrictive que la forme B, car, comme $\lim \bar{D}^*(\lambda)=D^*$, $\lim D'(\lambda)=D'$, on a, pour u assez grand.

$$g(u)-D^*\left(p_n(u)\right)<g(u)-\bar{D}^*\left(p_n(u)\right).$$

Si, par contre, $D^*=\bar{D}^*$, il y a des cas où la forme A est plus générale que la forme B, car on construit alors facilement des exemples où $D^*(\lambda)<D'(\lambda)$ pour λ assez grand.

Les deux formes A et B sont des cas particuliers de la forme C. En effet, d'après la définition de la fonction $\nu(D)$, on a

$$\begin{aligned}\nu\left(\bar{D}^*(p)\right)&=\overline{\underset{\lambda>0}{\text{borne}}}\,\lambda\left(\bar{D}(\lambda)-\bar{D}^*(p)\right)\leq\overline{\underset{\lambda>0}{\text{borne}}}\,\lambda\left(\bar{D}^*(\lambda)-\bar{D}\,(p)\right)\\&=\overline{\underset{0<\lambda\leq p}{\text{borne}}}\,\lambda\left(\bar{D}^*(\lambda)-\bar{D}^*(p)\right),\end{aligned}$$

et comme $\lim_{\lambda=\infty}\bar{D}^*(\lambda)=\lim_{p=\infty}\bar{D}^*(p)=\bar{D}^*$, on a évidemment

$$\nu\left(D^*(p)\right)=o(p)\qquad(p\to\infty).$$

On a de même, si $D^*<\infty$,

$$\begin{aligned}\nu\left(D^*(p)\right)&=\overline{\underset{\lambda>0}{\text{borne}}}\int_0^{\lambda}\left(D(x)-D^*(p)\right)dx\leq\overline{\underset{\lambda>0}{\text{borne}}}\int_0^{\lambda}\left(D^*(x)-D^*(p)\right)dx\\&=\int_0^{p}\left(D^*(x)-D^*(p)\right)dx=o(p)\qquad(p\to\infty).\end{aligned}$$

Comme $\lim p_n(\sigma)=\infty$, on voit que, quel que soit $\alpha>0$, on a, pour σ suffisamment grand, $\nu\left(\bar{D}^*\left(p_n(u)\right)\right)<\alpha p_n(\sigma)$, et si $D^*<\infty$ (comme c'est le cas dans la forme A), on a aussi $\nu\left(D^*\left(p_n(\sigma)\right)\right)<\alpha p_n(\sigma)$. Mais comme ν est une fonction

décroissante pour $D > D'$, on a $\nu^{-1}(\alpha p_n(\sigma)) \leq \overline{D}'(p_n(\sigma))$ et, si $D' < \infty$, $\nu^{-1}(\alpha p_n(\sigma)) \leq D'(p_n(\sigma))$. Donc les formes A et B sont des cas particuliers de la forme C.

La forme C est à son tour un cas particulier de la forme D; la forme C correspond en effet au cas où $h(\sigma) = \nu^{-1}(\alpha p_n(\sigma))$, car, du fait que $0 < \alpha < 1$ 2, on a

$$p_n(\sigma) - 2\nu\left(\nu^{-1}(\alpha p_n(\sigma))\right) \geq p_n(\sigma) - 2\alpha p_n(\sigma) = \gamma p_n(\sigma) \qquad (\gamma > 0),$$

par conséquent si la condition (C) est satisfaite, les conditions (D) sont également satisfaites. On voit enfin, d'après l'inégalité (6), que la forme D est un cas particulier de la forme E.

Nous donnons, à la fin de ce Mémoire, un théorème qui prouve que le théorème F (le théorème fondamental) ne peut être amélioré que dans des limites restreintes. A vrai dire, déjà les formes A et B du théorème F, bien qu'elles admettent comme généralisation les formes C, D, E, sont, au point de vue pratique, près de la meilleure forme possible.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

1. D'après ce que nous venons de voir, il suffit de démontrer le théorème F sous sa forme E. Avant d'aborder sa démonstration proprement dite, commençons par quelques lemmes.

Le lemme suivant a été démontré dans un Mémoire que nous avons publié en collaboration avec M. Mac Lane (1).

LEMME I. — *Soit* $G(\sigma) > 0$ *une fonction continue, à variation bornée pour* $\sigma \geq d$, *où* $-\infty \leq d < \infty$, *et soit* $\lim G(\sigma) = l > 0$. *Soit* c *une constante* $c > d$, *et posons*

$$S(\sigma) = \frac{\pi}{2} \int_c^\sigma \frac{du}{G(u)}.$$

Soit Δ *la région du plan* $s = \sigma + it$ *définie par* $\sigma > d$, $|t| < G(\sigma)$, *et soit* $F_1(s)$ *une fonction non identiquement nulle, holomorphe et bornée dans* Δ *et continue dans* Δ_1. *Soit, enfin,* $N(\sigma)$ *une fonction croissante telle que, pour* σ *suffisamment grand, on ait*

$$\log\left|F_1\left(\sigma + iG(\sigma)\right)\right| \leq -N(\sigma).$$

On a alors

$$\int^{\infty} N(\sigma) e^{-S\sigma}\, d\sigma < \infty.$$

(1) *Voir* théorème I dans S. MANDELBROJT and G. R. MAC LANE, *On functions holomorphic in a strip, and an extension of Watson's problem* (*Transactions of American Mathematical Society*, vol. 61, 1947, pp. 454-467).

Ce lemme (théorème I dans le Mémoire cité) constitue une généralisation d'un théorème classique portant sur les fonctions holomorphes et bornées dans la bande $|t| < \pi/2$ (énoncé, en général, pour les fonctions holomorphes, bornées et non identiquement nulles dans un demi-plan). La démonstration du lemme I est basée, en partie, sur les inégalités d'Ahlfors. Pour cette démonstration nous renvoyons le lecteur au Mémoire cité.

LEMME II. — *Soit $\Phi(s)$ une fonction holomorphe dans le cercle $C(s', \pi R)$, et soit, dans ce cercle, $|\Phi(s)| < M$. Soit $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_n \uparrow)$ de densité moyenne supérieure $\overline{D} < R$, et posons*

$$\Lambda_n(iz) = \prod_{m \neq n} (1 - z^2/\lambda_m^2) = \sum_k (-1)^k c_k^{(n)} z^{2k} \qquad (c_k^{(n)} > 0). \tag{12}$$

La série

$$\Sigma (-1)^k c_k^{(n)} \Phi^{2k}(z)$$

converge uniformément dans chaque cercle $\overline{C(s', \pi\rho)}$, avec $0 < \rho < R - D$, et elle y représente une fonction holomorphe $\Phi_n(s)$ satisfaisant à l'inégalité

$$|\Phi_n(s')| < \pi R L_n(\pi R) M,$$

où L_n est la fonction définie par (5).

D'après le théorème de Cauchy on a, pour $s \in \overline{C(s', \pi\rho)}$,

$$|\Phi^{2k}(s)| \leq (2k)!\, M/\big(\pi(R - \rho)\big)^{2k},$$

et l'on a par conséquent dans ce cercle

$$|\Phi_n(s)| \leq M \Sigma (2k)!\, c_k^{(n)}/\big(\pi(R - \rho)\big)^{2k}.$$

Or on sait (d'ailleurs l'intégration terme à terme le prouve immédiatement) que

$$\pi u \int_0^\infty e^{-\pi u r} \Big(\Sigma c_k^{(n)} r^{2k}\Big)\, dr = \Sigma (2k)!\, c_k^{(n)}/(\pi u)^{2k},$$

et comme

$$\Lambda_n(r) = \Sigma c_k^{(n)} r^{2k} = \prod_{m \neq n} (1 + r^2/\lambda_m^2),$$

on voit, d'après (5) que, dans $\overline{C(s', \pi\rho)}$,

$$|\Phi_k(s)| \leq \pi(R - \rho) L_n\big(\pi(R - \rho)\big),$$

ce qui prouve le lemme.

2. Nous allons maintenant passer à la démonstration proprement dite du théorème.

Posons

$$A_m(s) = F(s) - \sum_1^m d_k e^{-\lambda_k s} \qquad (m \geqq n),$$

et soit

$$P_m(x) = \overline{\text{borne}}_{\substack{\sigma \geqq x \\ s \in \Delta}} |A_m(s)|.$$

Rappelons qu'il s'agit, en dernier lieu, de démontrer que si les hypothèses I et II de la forme B sont satisfaites et si l'on a

$$\overline{\text{borne}}_{m \geqq n} P_m(\sigma) \leqq e^{-p_n(\sigma)},$$

avec

$$\log L_n\big(\pi h(\sigma)\big) - p_n(\sigma) < -C(\sigma),$$

$$\int^{\infty} C(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\int^{\sigma} \frac{du}{h(u)}} d\sigma = \infty, \tag{13}$$

où $h(\sigma)$ est une fonction décroissante avec $\lim h(\sigma) = D$, et où $C(\sigma)$ est une fonction croissante, alors l'inégalité (I) a lieu.

Posons $\gamma(\sigma) = \min g(x)\big(|x-\sigma| \leqq \pi(D+1)\big)$ pour σ suffisamment grand. Soit p une constante positive, et désignons par $S_{\sigma'}$ (σ' étant suffisamment grand) le rectangle dont le contour est formé par les segments $t = \pm \pi\gamma(\sigma')$, $\sigma = \sigma' \pm \pi(\overline{D}+1)$. Soit $\varepsilon(\sigma)$ une fonction positive, continue, décroissante et telle que $\int^{\infty} \varepsilon(\sigma)\, d\sigma < \infty$, et posons $h_1(\sigma) = h(\sigma) + \varepsilon(\sigma)$. Tout point $\sigma' + it$ du segment $l_{\sigma'}$ défini par $\sigma = \sigma'$, $|t| \leqq \pi\big(\gamma(\sigma') - h_1(\sigma' - p)\big)$ est le centre d'un cercle $C\big(\sigma' + it,\ \pi h_1(\sigma' - p)\big) \equiv C_{\sigma', t}$, où la fonction $A_m(s)$ $(m \geqq n)$ est holomorphe, et l'on a, dans ce cercle,

$$|A_m(s)| \leqq P_m\big(\sigma' - \pi(\overline{D}+1)\big).$$

En posant alors

$$A_{m,n}(s) = \Sigma (-1)^k c_k^{(n)} A_m^{(2k)}(s),$$

on voit, d'après le lemme I, que pour $s \in l_{\sigma'}$, σ' étant suffisamment grand

$$|A_{m,n}(s)| \leqq \pi h_1(\sigma' - p) L_n\big(\pi h_1(\sigma' - p)\big) P_m\big(\sigma' - \pi(\overline{D}+1)\big), \tag{14}$$

la fonction $A_{m,n}(s)$ étant holomorphe dans le domaine qui est obtenu par la réunion des segments $l_{\sigma'}$.

Mais on a

$$A_{m,n}(s) = \sum_k (-1)^k c_k^{(n)} F^{(2k)}(s) - \sum_k (-1)^k c_k^{(n)} \sum_{p=1}^m d_p \lambda_p^{2k} e^{-\lambda_p s}$$

$$= F_n(s) - \sum_{p=1}^m d_p e^{-\lambda_p s} \sum_k (-1)^k c_k^{(n)} \lambda_p^{2k} = F_n(s) - \sum_{p=1}^m d_p \Lambda_n(i\lambda_p) e^{-\lambda_p s},$$

où $F_n(s)=\Sigma(-1)^k c_k^{(n)} F^{(2k)}(s)$. Mais, d'après (12), $A_n(i\lambda_p)=0$ pour $p\neq n$. On voit aussi, d'après la définition de la suite associée $\{A_n^*\}$ que

$$A_n^*=\frac{1}{A_n(i\lambda_n)}.$$

On peut donc écrire

$$A_{m,n}(s)=F_n(s)-(d_n/A_n^*)e^{-\lambda_n s}. \tag{15}$$

On voit ainsi que, pour $m\geqq n$, $A_{m,n}(s)$ est *indépendante* de m. Posons alors $A_{m,n}(s)=B_n(s)$ (pour $m\geqq n$). Si donc on choisit convenablement la constante b_p, et si l'on désigne par $\overline{\Delta}_p$ le domaine fermé défini par les inégalités

$$\sigma\geqq b_p, \qquad |t|\leqq\pi\big(\gamma(\sigma)-h_1(\sigma-p)\big),$$

on a, pour $s\in\overline{\Delta}_p$, $m\geqq n$,

$$|B_n(s)|\leqq\pi h_1(\sigma-p)L_n\big(\pi h_1(\sigma-p)\big)P_m\big(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1)\big),$$

et, dans les mêmes conditions,

$$|B_n(s)|\leqq\pi h_1(\sigma-p)L_n\big(\pi h_1(\sigma-p)\big)\underset{m\geqq n}{\text{borne}}\,P_m\big(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1)\big)$$
$$\leqq\pi h_1(\sigma-p)L_n\big(\pi h_1(\sigma-p)\big)e^{-p_n(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1))}.$$

Comme $L_n(u)$ est, pour $u>D^*$, une fonction décroissante, et comme $h_1(\sigma)>h(\sigma)$, on a, en choisissant $p=\pi(\overline{D}^*+1)$ et en désignant le domaine correspondant $\overline{\Delta}_p$ par $\overline{\Delta}$ (C étant la fonction définie dans la condition III^e)

$$|B_n(s)|\leqq\pi h_1\big(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1)\big)L_n\Big(\pi h\big(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1)\big)e^{-p_n(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1))}\Big)$$
$$\leqq\pi h_1\big(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1)\big)e^{-C(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1))},$$

la fonction $B_n(s)$ étant holomorphe dans $\overline{\Delta}$.

Posons

$$N(\sigma)=C\big(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1)\big)-\log h_1\big(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1)\big)-\log\pi.$$

Comme C est une fonction croissante et h_1 une fonction décroissante, $N(\sigma)$ est une fonction croissante.

En posant

$$\pi\Big(\gamma(\sigma)-h_1\big(\sigma-\pi(\overline{D}^*+1)\big)\Big)=G(\sigma),$$

on peut résumer ce qui est acquis de la manière suivante : *La fonction*

$$B_n(s)=F_n(s)-(d_n/A_n^*)e^{-\lambda_n s}$$

est holomorphe dans la région fermée $\overline{\Delta}$, *définie par* $\sigma\geqq d$ (*où d est une certaine*

constante), $|t| \leq G(\sigma)$, $G(\sigma) > 0$, *et dans cette région on a*

$$\log |B_n(\sigma + it)| < -N(\sigma),$$

où la fonction $N(\sigma)$ *est définie comme plus haut.*

D'après le lemme I il suffit de démontrer les deux faits :

1° $G(\sigma)$ est une fonction à variation bornée avec $\lim G(\sigma) = l > 0$;

2° en posant

$$S(\sigma) = \frac{\pi}{2} \int_d^\sigma \frac{du}{G(u)},$$

on a

$$\int^\infty N(\sigma) e^{-S(\sigma)}\, d\sigma = \infty, \tag{16}$$

pour qu'il en résulte que $B_n(s) \equiv 0$, c'est-à-dire que

$$\Lambda_n^* F_n(s) = d_n e^{-\lambda_n s}. \tag{17}$$

Cette égalité (17) constitue l'étape la plus importante de la démonstration.

Pour démontrer que $G(\sigma)$ est à variation bornée, il suffit de démontrer que $\gamma(\sigma)$ l'est (pour $\sigma \geq d$, avec d convenablement choisi), car $h_1 = h + \varepsilon$, où h et ε sont des fonctions décroissantes.

Il résulte de la définition de $\gamma(\sigma)$ que si σ_i est suffisamment grand, on a $\gamma(\sigma_i) = g(x_i)$ avec $|x_i - \sigma_i| \leq \pi(\overline{D}^* + 1)$ et si $\sigma_{i+1} > \sigma_i$, on a $x_{i+1} \geq x_i$. Si $\sigma_0 \leq \sigma_1 < \ldots < \sigma_p \leq b$, σ_0 étant suffisamment grand, on a

$$\sum_{i=1}^{p} |\gamma(\sigma_{i+1}) - \gamma(\sigma_i)| = \sum_{i=1}^{p} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|,$$

avec

$$\sigma_0 - \pi(\overline{D}^* + 1) \leq x_1 \leq x_2 \ldots \leq x_p \leq b + \pi(\overline{D}^* + 1).$$

Désignons alors par $V_\gamma(a, b)$ et $V_g(a, b)$ respectivement les variations de γ et g dans (a, b). On a, d'après ce qui précède,

$$V_\gamma(\sigma_0, b) \leq V_g\big(\sigma_0 - \pi(\overline{D}^* + 1),\ b + \sigma_0 + \pi(\overline{D}^* + 1)\big),$$

ce qui prouve que $V_\gamma(d, \infty) \leq V_g\big(d - \pi(\overline{D}^* + 1), \infty\big)$. Il est aussi évident que $\lim G(\sigma) = (\lim g(\sigma) - \overline{D}^*) = l > 0$. Ainsi 1° est démontré.

Pour démontrer 2°, écrivons les inégalités suivantes, pour d suffisamment grand :

$$0 \leq \int_d^\infty \big(g(\sigma) - \gamma(\sigma)\big)\, d\sigma \leq \int_d^\infty V_g\big(\sigma - \pi(\overline{D}^* + 1),\ \sigma + \pi(\overline{D}^* + 1)\big)\, d\sigma$$

$$\leq \pi(\overline{D}^* + 1) \sum_{p=-1}^{\infty} V_g\big[d + p\pi(\overline{D}^* + 1),\ d + (p+2)(\overline{D}^* + 1)\big]$$

$$\leq 3\pi(\overline{D}^* + 1)\, V_g\big(d - \pi(\overline{D}^* + 1), \infty\big) < \infty.$$

On voit immédiatement que

$$0 \leq \int_d^\infty \Big(h_1\big(\sigma - \pi(\overline{D}^* + 1)\big) - h(\sigma) \Big) d\sigma < \infty.$$

Les deux dernières inégalités donnent aussitôt

$$(18) \qquad S(\sigma) = \frac{\pi}{2} \int_d^\sigma \frac{du}{G(u)}$$

$$= \frac{1}{2} \int_d^\sigma \frac{du}{\gamma(u) - h_1\big(\sigma - \pi(\overline{D}^* + 1)\big)} = \frac{1}{2} \int_d^\sigma \frac{du}{g(u) - h(u)} + O(1).$$

De (13), de la définition de $N(\sigma)$ et de (18) résulte alors immédiatement (16). Donc (17) a lieu.

Cela prouve que la série $\Sigma (-1)^k c_k^{(n)} F^{(2k)}(s)$ converge uniformément dans $\overline{\Delta}$, et elle y est égale à $(d_n/\Lambda_n^*) e^{-\lambda_n s}$. Il est clair, d'après le lemme II, que la somme de cette série, $F_n(s)$, peut être prolongée analytiquement le long de la ligne centrale de tout canal dont la largeur est supérieure à $2\pi\overline{D}^*$ et à travers duquel $F(s)$ peut être prolongée analytiquement. On voit ainsi, d'après l'hypothèse II du théorème (dans n'importe quelle forme de l'énoncé) que

$$(19) \qquad \Lambda_n^* F_n(s_0) = d_n e^{-\lambda_n s_0}.$$

Mais, d'après le lemme II, on a aussi

$$|F_n(s_0)| \leq \pi R L_n(\pi R) M(s_0, R),$$

où $M(s_0, R) = \operatorname{Max} |F(s)| \big(s \in \overline{C(s_0, \pi R)}\big)$. L'égalité (19) et l'inégalité (6) fournissent alors

$$|d_n| e^{-\lambda_n \mathcal{R}(s_0)} \leq (\pi^2/2) R M(s_0, R) \Lambda_n^* \lambda_n e^{\varepsilon \nu(R)},$$

ce qui est l'égalité (I). Le théorème F est donc complètement démontré.

APPLICATIONS DU THÉORÈME FONDAMENTAL.

1. Si la série de Dirichlet $\Sigma d_n e^{-\lambda_n s}$ possède une abscisse de convergence $\sigma_c < \infty$, cette série converge uniformément dans tout domaine défini par $|\arg s - \sigma_0| \leq \gamma < \pi/2$, où $\sigma_0 > \sigma_c$. Elle converge donc uniformément dans le domaine $\Delta(a, b) : \sigma \geq a, |t| \leq b$, quel que soit $a > \sigma_c$, et quel que soit $b > 0$. Si $F(s)$ est la somme de cette série, on voit que, pour tout entier $n \geq 1$, les sommes $\sum_1^m d_i e^{-\lambda_i s}$, avec $m \geq n$, représentent $F(s)$ dans $\Delta(a, b)$ avec la précision logarithmique égale à $+\infty$. La condition III du théorème fondamental est donc réalisée automatiquement (sous chacune de ses formes).

si $\overline{D}^* < \infty$, dans tout domaine Δ défini dans l'énoncé du théorème, c'est-à-dire quelle que soit la fonction $g(\sigma)(\sigma > a > \sigma_c)$ et quelle que soit la fonction de densité $D(\lambda)$. Pour une série de Dirichlet convergente, l'énoncé du théorème fondamental devient donc très simple. On a, en effet, le théorème suivant :

THÉORÈME *a*. — *Supposons que la densité moyenne supérieure* $\overline{D}^*$ *de* $\{\lambda_n\}(0 < \lambda_n \uparrow)$ *soit finie, et supposons que* $\Sigma d_n e^{-\lambda_n s}$ *admette une abscisse de convergence* $\sigma_c < \infty$. *Si, pour* $\sigma > \sigma_c$ *la somme de cette série représente une fonction* $F(s)$ *qui peut être prolongée analytiquement à travers un canal plus large que* $2\pi\overline{D}^*$ *jusqu'au cercle* $\overline{C(s_0, \tau R)}$ *avec* $R > \overline{D}^*$, *alors les inégalités* (I) *ont lieu pour tout entier positif n.*

Ce cas particulier du théorème F peut être démontré directement et beaucoup plus facilement que le cas général. Nous avons d'ailleurs démontré ce cas-ci, il y a plusieurs années, sous une forme, il est vrai, plus restrictive et moins précise (¹).

Le théorème *a* fournit un grand nombre de résultats concernant le prolongement analytique des séries de Dirichlet convergentes : la position des points singuliers, la distribution des valeurs prises par la fonction, l'ordre de grandeur de la fonction dans une bande curviligne, etc.

Comme un tel passage au prolongement analytique a déjà été fait dans nos travaux antérieurs (²), et bien que l'on puisse le faire maintenant avec plus de précision (D^* remplaçant D^*, convergence ordinaire au lieu de convergence absolue, etc.), nous laissons au lecteur le soin d'adapter cette nouvelle forme du théorème sur les séries de Dirichlet convergentes à l'étude du prolongement analytique.

Remarquons cependant que le théorème fondamental permet de fournir des renseignements sur le prolongement analytique des fonctions qui ne sont représentées par une série de Dirichlet qu'avec une certaine précision (sans que la série admette une abscisse de convergence). On peut avoir, pour ces cas généraux, des théorèmes du type de Liouville, Weierstrass, Picard, etc. Ainsi, par exemple, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME *b*. — *Supposons que l'hypothèse* I *et l'hypothèse* III^a *du théorème fondamental soient satisfaites, la dernière pour tout* $n \geq 1$ *et supposons que* $F(s)$ *soit une fonction holomorphe dans* Δ, *pouvant être prolongée jusqu'à chaque cercle* $\overline{C(s_i, \tau R)}$ *avec* $R > D^*$, *à travers un canal plus large que* $2\pi D^*$, *la suite* $\{s_i\}$ *étant telle que* $\lim \mathcal{R}(s_i) = -\infty$, *et supposons que, dans tous ces cercles,* $|F(s)| < M$. *Dans ces conditions* $F(s)$ *est identiquement nulle.*

(¹) *Voir* S. MANDELBROJT, *Séries lacunaires* (*Actualités Scientifiques et Industrielles*, Hermann, Paris, 1936).

(²) Voir aussi le mémoire cité dans les *Transactions* de 1944.

La conclusion subsiste si, dans tout ce qui précède, on remplace D* *par* $\overline{\mathrm{D}}^*$ (*aussi dans les hypothèses* I *et* III^a).

Il résulte en effet du théorème F que les inégalités (I) ont lieu pour chaque n, et lorsqu'on remplace s_0 par s_i ($i \geq 1$). En fixant n et en faisant tendre i vers l'infini, on voit que $d_n = 0$ $n \geq 1$. On a, par conséquent, dans Δ : $|F(s)| < e^{-\mu_n \sigma}$ (σ assez grand), et la condition (A) (1) donne alors, en vertu du lemme I, $F(s) \equiv 0$.

2. Nous n'insistons pas sur les autres applications du théorème F au prolongement analytique des « séries asymptotiques ». Nous préférons passer au cas où l'emploi des séries non convergentes est essentiel. Nous allons voir que la notion de précision logarithmique d'une représentation par une série de Dirichlet (non convergente) est bien adaptée à l'étude des fonctions indéfiniment dérivables.

Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable dans $I \equiv [0, \infty)$, bornée ainsi que chacune de ses dérivées dans I et soit $m_n = \overline{\text{borne}}_{x \in I} |f^{(n)}(x)|$. La fonction $C_f(\sigma) = \overline{\text{borne}}_{n \geq 1} (n\sigma - \log m_n)$ sera appelée le *caractère* de la fonction f. Le caractère joue un rôle très important dans la théorie des fonctions indéfiniment dérivables.

Remarquons que si $\overline{\lim}\, m_n^{1/n} = A < \infty$, on a $C_f(\sigma) = \infty$ pour $\sigma > \log A$. Si, par contre, $\lim m_n^{1/n} = \infty$, $C_f(\sigma)$ est une fonction convexe avec $\lim C_f(\sigma)/\sigma = \infty$. Ces propriétés sont faciles à démontrer.

Nous allons maintenant étudier des propriétés qui généralisent celle de la quasi-analyticité. Par exemple le théorème de Denjoy-Carleman apparaîtra comme un cas très particulier d'un théorème général.

3. Commençons par le lemme suivant :

Lemme III. — *Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable dans l'intervalle $I \equiv [0, \infty)$, avec $|f(x)| < M < \infty$ ($x \in I$), et dont chaque dérivée est bornée dans* I. *Soit $C_f(\sigma)$ le caractère de $f(x)$. Soit $\{\nu_n\}$ une suite d'entiers non négatifs tels que*

$$f^{(\nu_n)}(0) = 0 \qquad (n \geq 1).$$

Soit $\{q_n\}$ la suite d'entiers non négatifs complémentaire à la suite $\{\nu_n\}$

$$(\{\nu_n\} \cup \{q_n\} = \{n\} \qquad (n \geq 0), \qquad \{\nu_n\} \cap \{q_n\} = 0).$$

Pour chaque a réel, la fonction

$$F_a(s) = \int_0^\infty e^{-xe^{s-a}} f(x)\, dx \tag{20}$$

(1) Ou la condition correspondante à la forme B de l'énoncé du théorème F, si D* est remplacé par $\overline{\mathrm{D}}^*$.

est holomorphe dans la région $\overline{\Delta}_0$ *définie par* $e^\sigma \cos t \geq 1$. *On a, dans cette région* $|F_a(s)| \leq M e^{as}$, *et quel que soit l'entier* $n \geq 1$, $F_a(s)$ *est représenté dans* $\overline{\Delta}_0$ *par* $\sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s}$, *avec* $m \geq n$, *où* $d_k^{(a)} = e^{\lambda_k a} f^{(q_k)}(0)$, $\lambda_k = q_k + 1$, *avec une précision logarithmique égale à* $C_f(\sigma - a) - a$ (¹).

En intégrant par parties q fois l'intégrale dans (20), nous obtenons, pour s tel que $\mathcal{R}(e^{s-a}) > 0$

$$F_a(s) = \sum_1^q f^{(m-1)}(0) e^{-m(s-a)} + e^{-q(s-a)} \int_0^\infty f^{(q)}(x) e^{-xe^{s-a}} dx.$$

Mais si $e^\sigma \cos t \geq 1$, on a $\mathcal{R}(e^{s-a}) \geq e^{-a}$; on voit donc que pour $s \in \overline{\Delta}_0$

$$\left| F_a(s) - \sum_1^q f^{(m-1)}(0) e^{-m(s-a)} \right| \leq m_p e^{(q+1)a - q\sigma}, \tag{21}$$

où $m_q = \overline{\text{borne}}_{x \geq 0} |f^{(q)}(x)|$. Mais comme $f^{(\nu_n)}(0) = 0$ $(n \geq 1)$, on a dans $\overline{\Delta}_0$

$$\left| F_a(s) - \sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s} \right| \leq m_q e^{a+q(a-\sigma)}, \tag{22}$$

où les suites $\{d_k^{(a)}\}$, $\{\lambda_k\}$ sont celles définies dans l'énoncé, et où q prend toutes les valeurs entières telles que $q_m + 1 = \lambda_m \leq q < \lambda_{m+1} = q_{m+1} + 1$ (s'il n'existe qu'un nombre fini N de q_n on donnera à q_{N+1} la valeur $+\infty$) (²).

Il résulte immédiatement de (22) que

$$\overline{\underset{m \geq n}{\text{borne}}} \; \overline{\underset{\sigma \geq x}{\text{borne}}} \left| F_a(s) - \sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s} \right| \leq \overline{\underset{q \geq \lambda_n}{\text{borne}}} \, m_q e^{a+q(a-x)}. \tag{23}$$

Mais il résulte de la définition de $C_f(\sigma)$ que, quel que soit l'entier positif p, on a pour σ suffisamment grand $(\sigma \geq \sigma_p)$

$$C_f(\sigma) = \overline{\underset{n \geq p}{\text{born}}} \, (n\sigma - \log m_n).$$

Ceci est évident si $\overline{\lim} \, m_n^{1/n} = A < \infty$, car alors $C_f(\sigma) = \infty$ pour $\sigma > \log A$, et, dans le cas où $\lim m_n^{1/n} = \infty$, cette égalité résulte de $\lim C_f(\sigma)/\sigma = \infty$. On voit donc, d'après (23), qu'il existe une suite $\{a_n\}$ telle que, pour $s \in \Delta_0$, $\sigma \geq a_n$

$$\overline{\underset{m \geq n}{\text{borne}}} \; \overline{\underset{\sigma \geq x}{\text{borne}}} \left| F_a(s) - \sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s} \right| \leq e^a e^{-C_f(x-a)}.$$

(¹) Si la suite $\{q_n\}$ est vide cela voudra dire que, dans $\overline{\Delta}$: $|F_a(s)| \leq e^{a - C_f(\sigma - a)}$.

(²) Si $\{q_n\}$ est vide, on posera dans (22) : $1 \leq q < \infty$.

Il résulte d'autre part, directement de (20), que

$$|F_a(s)| \leq M \int_0^\infty e^{-x\mathcal{R}(e^x - a)}\, dx \leq M e^a.$$

Le lemme III est donc démontré.

4. Nous passons maintenant à l'énoncé du théorème principal concernant la quasi-analyticité générale. Ici encore nous donnons plusieurs formes de l'énoncé, mais nous ne soulignons que celles de ces formes qui nous paraissent intéressantes. La conclusion dans toutes ses formes est la même, $f(x)$ est identiquement nulle.

THÉORÈME (Q-A) (*Forme* A). — *Hypothèse* I. — *$f(x)$ est une fonction indéfiniment dérivable dans l'intervalle* $I \equiv [0, \infty)$, *bornée ainsi que chacune de ses dérivées dans* I. *$\{\nu_n\}$ est une suite d'entiers non négatifs, avec $\nu_1 = 0$; la suite $\{q_n\}$ d'entiers positifs complémentaires à la suite $\{\nu_n\}$ est de densité supérieure* $\overline{D}\,' < 1/2$ *et l'on a*

$$f^{(\nu_n)}(0) = (0) \qquad (n \geq 1).$$

Hypothèse II^a. — *En désignant par* $C_f(\sigma)$ *le caractère de f, et par* $\overline{D}'(q)$ *la fonction de densité supérieure de* $\{q_n\}$, *on a*

$$(Q) \qquad \int^\infty C_f(\sigma)\, e^{-\int^\sigma \frac{du}{1 - 2\overline{D}'(C_f(u))}}\, d\sigma = \infty.$$

Conclusion. — La fonction $f(x)$ est identiquement nulle.

Forme B. — *Dans tout ce qui précède, le symbole* $\overline{D}'$ *est remplacé par* $\overline{D}$ (densité et fonction de densité moyennes supérieures de $\{q_n\}$).

Forme C. — Même hypothèse I que dans la forme B. L'hypothèse II^a est remplacée par la suivante :

Hypothèse II^c. — $\nu(D)$ étant la fonction d'excès de $\{q_n\}$ et ν^{-1} la fonction inverse de ν, il existe une constante $0 < \alpha < 1/2$ telle que

$$\int^\infty C_f(\sigma)\, e^{-\int^\sigma \frac{du}{1 - 2\nu^{-1}(\alpha C_f(u))}}\, d\sigma = \infty.$$

Forme D. — *Même hypothèse* I *que dans la forme* B. *L'hypothèse* II^a *est remplacée par la suivante :*

Hypothèse II^d. — *Il existe une fonction continue décroissante $h(\sigma)$ telle que* $\lim h(\sigma) = \overline{D}'$ *et une fonction croissante* $C(\sigma)$ *telle que*

$$(Q_1) \qquad \begin{cases} 2\nu\big(h(\sigma)\big) - C_f(\sigma) < -C(\sigma), \\ \displaystyle\int^\infty C(\sigma)\, e^{-\int^\sigma \frac{du}{1 - 2h(u)}}\, d\sigma = \infty. \end{cases}$$

Forme E. — Même hypothèse I que dans la forme B. L'hypothèse II^a est remplacée par la suivante :

Hypothèse II^e. — Cette hypothèse diffère de l'hypothèse II^d par le fait que, dans les relations (Q_i), l'expression $2\nu(h(\sigma))$ est remplacée par

$$\mathrm{R}(h(\sigma)) = \log \int_0^\infty e^{-\pi h(\sigma) r} Q(r)\, dr,$$

où

$$Q_1^*(r) = \prod_{m>1} (1 + r^2/q_m^2) \quad (^1).$$

5. *Démonstration.* — Supposons $\overline{D}^* < 1/2$, et choisissons les deux quantités positives ξ et R de la manière suivante :

$$\pi \overline{D}^* < \arccos e^{-\xi} = \pi \mathrm{R} < \pi/2. \tag{24}$$

Le cercle $\overline{C(\xi + \pi \mathrm{R}, \pi \mathrm{R})}$ appartient évidemment au donmaine $\overline{\Delta}_0$ défini par $e^\sigma \cos t \geqq 1$. D'après le lemme III, la fonction $\mathrm{F}_a(s)$ définie par (20), avec $a > 0$ arbitraire, est holomorphe dans $\overline{\Delta}$; on a, dans ce domaine, $|\mathrm{F}_a(s)| \leqq \mathrm{M} e^a$, et en posant $d_k^{(a)} = e^{\lambda_k a} f^{(q_k)}(0)$, $\lambda_k = q_k + 1$, $\sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s}$, avec $m \geqq n$ (n entier positif arbitraire) représente $\mathrm{F}_a(s)$ dans $\overline{\Delta}$ avec la précision logarithmique $C_f(\sigma - a) - a$. Si, au lieu d'avoir $\overline{D}^* < 1/2$, on avait $D^* < 1/2$, on pourrait remplacer, dans (24), $\overline{D}^*$ par D^*.

Le domaine Δ est défini par $\sigma > a_0 > 0$, $|t| < \arccos e^{-\sigma} = \pi\, g(\sigma)$. On voit que $g(\sigma)$ est à variation bornée et, si a_0 est assez grand, $\lim g(\sigma) > g(\sigma) > \overline{D}^*$, $(\sigma > a_0)$. Comme $1 - 2g(\sigma) \sim (2/\pi) e^{-\sigma}$, on voit immédiatement que la condition (Q) est équivalente à la suivante :

$$\int^\infty C_f(\sigma)\, e^{-\frac{1}{2}\int^\sigma \frac{du}{g(u) - \overline{D}^*(C_f(u))}} d\sigma = \infty. \tag{25}$$

Comme on peut écrire $C_f(\sigma - a) = p_n(\sigma) + a$, où $p_n(\sigma)$ est la précision logarithmique de la représentation de $\mathrm{F}_a(s)$ par $\sum_1^m d_k^{(a)} e^{-\lambda_k s}$, avec $m \geqq n$, pour chaque n, on voit que si les hypothèses de la forme A du théorème (Q-A) sont satisfaites, les hypothèses de la forme A du théorème F sont satisfaites, avec $\mathrm{F}(s) = \mathrm{F}_a(s)$, $s_0 = \xi + \pi \mathrm{R}$, $\mathrm{M}(s_0, \mathrm{R}) \leqq \mathrm{M} e^a$, $\{\lambda_n\} = \{q_n + 1\}$ (²), n étant un entier positif quelconque.

(¹) Si la suite $\{\nu_n\}$ est composée de tous les entiers non négatifs, on posera $\mathrm{R}(u) \equiv 0$. La fonction $h(\sigma)$, elle-même, peut alors être prise comme étant identiquement nulle.

(²) Il est clair que la fonction de densité supérieure correspondant à $\{q_n\}$ est supérieure à la fonction de densité supérieure correspondant à $\{\lambda_n\}$.

On peut donc écrire, pour chaque $n \geq 1$,

$$|d_n^{(a)}| = e^{q_{n+1}a} |f^{(q_n)}(0)| \leq (\pi^2 \lambda_n R/2)\, e^{2\gamma_n(R)} \Lambda_n^* M e^{a} e^{q_{n+1}(\xi+\pi R)}.$$

En fixant n et ξ (et, par conséquent, aussi R) et en faisant tendre a vers $+\infty$, on voit (puisque $q_n > 0$) que $f^{(q_n)}(0) = 0$. On a donc dans $\bar{\Delta}$, quel que soit a positif fixe

$$|F_a(s)| < e^{a - C_f(\sigma - a)} = e^{-p_n \sigma},$$

avec, d'après (25),

$$\int^{\infty} p_n(\sigma)\, e^{-\frac{1}{\pi}\int^{\sigma} \frac{du}{s(u)}}\, d\sigma = \infty.$$

Le lemme I fournit alors immédiatement $F_a(s) \equiv 0$. Ce qui prouve aussi, bien entendu, que $f(x) \equiv 0$.

Il est de même évident que si les hypothèses de la forme B du théorème (Q-A) sont satisfaites, on arrive par l'intermédiaire de la forme B du théorème F à $f(x) \equiv 0$. De même les hypothèses de la forme C de (Q-A) conduisent à la même conclusion par l'intermédiaire de la forme C du théorème F, etc. (1). On voit d'ailleurs que, tout comme pour le théorème fondamental, la forme E est encore ici la plus générale.

6. Il est évident que le théorème (Q-A) contient comme cas très particulier le théorème sur les classes quasi analytiques. Ainsi, par exemple, si dans la forme A de (Q-A) on suppose que la suite $\{\nu_n\}$ est composée de tous les entiers non négatifs, c'est-à-dire si

$$(a) \qquad f^{n}(0) = 0 \qquad (n \geq 0),$$

on a $D^*(q) \equiv 0$, et la condition (Q) devient la condition

$$(Q_2) \qquad \int^{\infty} C_f(\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma = \infty.$$

Autrement dit, on a, en particulier, l'énoncé suivant : Si (a) et (Q_2) ont lieu, $f(x) \equiv 0$. En particulier, si en posant $A(\sigma) = \overline{\underset{n \geq 1}{\text{borne}}}\,(n\sigma - \log M_n)$, on a $\int^{\infty} A(\sigma)\, e^{-\sigma}\, d\sigma = \infty$, $|f^{(n)}(x)| < M_n (n > 0)$, et si (a) a lieu, $f(x) \equiv 0$ [on a évidemment $A(\sigma) \leq C_f(\sigma)$]. C'est le théorème de Denjoy-Carleman. La forme de cet énoncé relève de celle donnée par Ostrowski.

---

(1) Pour passer de la forme E du théorème (Q − A) à la forme E du théorème F, on remarquera que si l'hypothèse H^c du théorème (Q − A) est satisfaite, elle l'est aussi lorsqu'on y remplace $Q_n(r)$ par $Q_n(r) = \prod_{m \neq n} (1 + r^2/q_m^2)$, n étant un entier positif quelconque.

7. Mais, outre que notre théorème (Q-A) n'exige que l'inégalité $D^*<1/2$ pour permettre de conclure que $f(x)\equiv 0$, si une condition convenable [la condition (Q) par exemple] concernant $C_f(\sigma)$ est satisfaite, nous pouvons affirmer que, même si la condition (Q) est réduite à la condition classique de la quasi-analyticité [condition (Q_2)], nous n'exigeons nullement que la fonction et *toutes* ses dérivées soient nulles en un point pour pouvoir conclure que $f(x)$ est identiquement nulle.

Considérons les deux exemples suivants (dont le premier illustre le cas analytique) :

1° Soit $f(x)$, $x\in I\equiv[0,\infty)$ une fonction indéfiniment dérivable, bornée ainsi que chacune de ses dérivées sur I et telle que $C_f(\sigma)\geq ce^{\sigma}$ $(c>0)$ pour σ suffisamment grand [soit, par exemple $|f^{(n)}(x)|\leq n!$ $(n\geq 1)$. $|f(x)|<M<\infty$; on a alors $C_f(\sigma)\sim e^{\sigma}$]. Soit en plus $f^{(\nu_n)}(0)=0$ $(\nu_1=0)$ $(n\geq 1)$, la suite $\{q_n\}$, complémentaire à la suite $\{\nu_n\}$, étant telle qu'en désignant par $D^*(q)$ la fonction de densité supérieure de $\{q_n\}$ on ait, pour q suffisamment grand

$$D^*(q)<b/\log q \quad (0<b<1/2).$$

Ceci a lieu par exemple si $q_n\geq an\log n$ $(a>2)$. On a, dans ces conditions, $2D^*\big(C_f(u)\big)<1/u$ (pour u suffisamment grand) et, pour $\sigma>\sigma_0$

$$C_f(\sigma)\,e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{du}{1-2D^*(C_f(u))}}\geq ce^{\sigma}e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{u\,du}{u-1}}\geq A/\sigma,$$

où $A>0$. Donc la condition (Q) du théorème (Q-A) est satisfaite et $f(x)\equiv 0$. Par conséquent, si $C_f(\sigma)>ce^{\sigma}$ on conclut que la fonction est identiquement nulle sans rien supposer *a priori* sur les dérivées dont les exposants q_n satisfont à la condition $q_n\geq an\log n$.

2° On voit de même que si $C_f(\sigma)\geq(ce^{\sigma}/\sigma)$ $(c>0)$ pour σ suffisamment grand [par exemple si $f(x)\in C\{n\log n)^n\}$, $|f(x)|<M<\infty$ dans $[0,\infty)$], il suffit de supposer que $f^{(\nu_n)}(0)=0$ $(\nu_1=0)$, la suite $\{q_n\}$ complémentaire à la suite $\{\nu_n\}$ étant telle que, pour q suffisamment grand, on ait

$$D^*(q)<b/\log q(\log\log q),$$

avec $0<b<1/2$ (par exemple $q_n>an\log n(\log\log n)$ $(a>2)$ pour pouvoir déjà conclure que $f(x)$ est identiquement nulle.

Car alors

$$C_f(\sigma)\,e^{-\int_{\sigma_0}^{\sigma}\frac{du}{1-2D^*(C_f(u))}}>A/\sigma\log\sigma,$$

et la condition (Q) est satisfaite.

Si dans le théorème F on pouvait remplacer dans la condition (A) la fonction $D^*(p_n(u))$ par la constante D^*, on pourrait aussi remplacer dans la condition (Q) du théorème (Q-A), $D^*(C_f(u))$ par D^* et il suffirait alors que dans

chacun des cas 1° et 2° qu'on vient de citer (1) on suppose que $D^*=\lim D^*(q)=0$ (c'est-à-dire que $\lim n/q_n=0$) pour pouvoir déjà conclure que $f(x)\equiv 0$. Or ceci n'est pas le cas. En réalité nous verrons dans le théorème R du chapitre suivant qu'on ne peut pas remplacer dans (Q) la fonction $D^*(C_f(u))$ par une fonction $h(u)$ bien inférieure (même si $D^*=0$) pour que la conclusion, $f(x)\equiv 0$, continue à subsister.

Ainsi, par exemple, avec les notations utilisées dans les exemples 1° et 2° on peut affirmer qu'il existe des fonctions non identiquement nulles pour lesquelles $C_f>ce^{\sigma}/\sigma$, mais pour lesquelles $D^*(q)\leq b/\log q$ ($q_n\geq a n\log n$).

THÉORÈME RÉCIPROQUE.

1. Soit $R(\sigma)$, $\sigma\in I\equiv[0,\infty)$ une fonction bornée inférieurement. Il existe une fonction $\varphi(\sigma)$ convexe dans I jouissant des propriétés suivantes : $\varphi(\sigma)\leq R(\sigma)$, $\sigma\in I$, et, quelle que soit la fonction convexe $\psi(\sigma)$ telle que $\psi(\sigma)\leq R(\sigma)$, $\sigma\in I$, on ait $\psi(\sigma)\leq\varphi(\sigma)$. On écrira

$$\varphi(\sigma)=conv\,R(\sigma).$$

On démontre facilement qu'en posant, pour $-\infty<u<\infty$

$$A(u)=\overline{\underset{\sigma\geq 0}{\text{borne}}}\,\big(\sigma u-R(\sigma)\big),$$

on a

$$\varphi(\sigma)=\overline{\underset{-\infty<u<\infty}{\text{borne}}}\,\big(\sigma u-A(u)\big).$$

Si $\lim R(\sigma)/\sigma=\infty$, on a aussi $\lim A(u)/u=\infty$, et quel que soit σ_0 on a, pour u suffisamment grand,

$$A(u)=\overline{\underset{\sigma\geq\sigma_0}{\text{borne}}}\,\big(\sigma u-R(\sigma)\big),$$

de même que, quel que soit u_0, on a, pour σ suffisamment grand,

$$\varphi(\sigma)=\overline{\underset{u\geq u_0}{\text{borne}}}\,\big(\sigma u-A(u)\big).$$

Si $\lim R(\sigma)/\sigma=\infty$, $A(u)$ est aussi une fonction convexe.

2. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME R. — *Soit* $\{\nu_n\}$ *une suite d'entiers non négatifs* ($\nu_1=0$), *et soit* $\{q_n\}$ *la suite d'entiers positifs complémentaires à la suite* $\{\nu_n\}$. *Soit* $N(q)$ *la distribution de la suite* $\{q_n\}$. *Supposons que* $\lim\log q_n/n=0$.

(1) C'est-à-dire les cas où $C_f(\sigma)>ce^{\sigma}$ et $C_f(\sigma)>ce^{\sigma}/\sigma$.

(2) *Voir* S. MANDELBROJT, *Duke Mathematical Journal*, vol. 9, n° 4, décembre 1942, p. 647-661.

Il existe une fonction $f(x)$, non identiquement nulle, indéfiniment dérivable sur l'intervalle $I \equiv [0, \infty)$, bornée, ainsi que chacune de ses dérivées sur I, telle que $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \geq 1)$, et telle que, si l'on désigne par $C_f(\sigma)$ son caractère, on ait, pour σ suffisamment grand,

$$C_f(\sigma) \geq C\, cnv\, N(e^{\sigma}) + \int_0^{\sigma} N(e^u du),$$

où C est une constante positive arbitraire donnée inférieure à $\log 2$.

Dans cet énoncé $N(e^{\sigma})$ est considéré comme fonction de σ. Autrement dit, en posant $N(e^{\sigma}) = R(\sigma)$, on a $cnv\, N(e^{\sigma}) = cnv\, R(\sigma)$.

Posons

$$M(iz) = \Pi(1 - z^2/\nu_n^2) = \Sigma(-1)^n l_n z^{2n} \qquad (l_n > 0),$$
$$Q(iz) = \Pi(1 - z^2/q_n^2) = \Sigma(-1)^n r_n z^{2n} \qquad (r_n > 0).$$

$N(q)$ ayant la signification de l'énoncé, on a

$$\log Q(r) = \log \Pi(1 + r^2/q_n^2) = 2r^2 \int_0^{\infty} N(x) \frac{dx}{x(x^2 + r^2)} \geq \int_1^r \frac{N(r)}{x}\, dx + N(r) \log 2 = N_1(r),$$

où r est une quantité positive quelconque.

Mais, comme $\sin i\pi r = r M(r) Q(r)$, on voit que

$$\log M(r) \leq \pi r - N_1(r),$$

et les inégalités de Cauchy pour les coefficients de Taylor donnent, pour chaque entier n et chaque $r > 0$,

$$\log l_n \leq \pi r - N_1(r) - 2n \log r.$$

Posons $\pi r = 2n$, ce qui donne

$$(26) \qquad l_n \leq e^{2n} (2n)^{-2n} \pi^{2n} e^{-N_1(2n/\pi)} \leq \left(R n^{\frac{1}{2}} \pi^{2n}/(2n)!\right) e^{-N_1(2n/\pi)},$$

où R est une constante positive.

Soit $\omega(z)$ $(z = x + iy)$ une fonction holomorphe dans tout le plan z, sauf sur la demi-droite $y = 0$, $x < -1$, telle que $|\omega(z)| < 1$, $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) \neq 0$. Une telle fonction existe : si la fonction $\alpha = \alpha(z)$ réalise la représentation conforme de la région décrite sur $|\alpha| < 1$, avec $\alpha(0) = 0$, $\alpha'(0) > 0$, et si $\alpha^{(q_1)}(0) \neq 0$, on posera $\omega(z) = \alpha(z)$; sinon, il existe une constante $b > -1$, telle que la fonction $\omega(z) = 1/2\,[\alpha((1+b)z + b) - \alpha(b)]$ jouit des propriétés voulues (1).

Posons $z = e^s$, $F(s) = \omega(e^s)$. La fonction $F(s)$ est holomorphe et bornée dans le domaine $\mathcal{D}$ défini par la réunion du demi-plan $\sigma < 0$ et de la bande $|t| < \pi$.

(1) En réalité on peut poser $\omega(z) = \alpha(z)$. Notre procédure nous permet d'éviter quelques calculs.

On a donc dans $\mathcal{D}$, $|F(s)|<1$. Écrivons $D_p^{(n)}F(s)=\frac{d^p}{d(e^s)^p}\left(F^{(n)}(s)\right)$. Pour tout s tel que $|s-\sigma_1|=\gamma(0<\gamma<\pi)$, où σ_1 est réel quelconque, on a, d'après les inégalités de Cauchy,

$$|F^{(n)}(s)|\leq n!/(\pi-\gamma)^n.$$

On a de même pour s tel que $\sigma<-\pi$, $|F^{(n)}(s)|<n!/\pi^n$.

Mais si $|s-\sigma_1|=\gamma$, on a pour $\sigma_1\geq\sigma_0$

$$|e^s-e^{\sigma_1}|=e^{\sigma_1}|e^{s-\sigma_1}-1|>k|s-\sigma_1|=k\gamma,$$

avec $k=k(\sigma_0)>0$. La courbe $L(\sigma_1,\gamma)$ située dans $|t|<\pi$ et donnée par $|e^s-e^{\sigma_1}|=k\gamma$ est, par conséquent, à l'intérieur du cercle $C(\sigma_1,\gamma)$, et sur $L(\sigma_1,\gamma)$ on a encore $|F^{(n)}(s)|\leq n!/(\pi-\gamma)^n$.

On a, par conséquent, pour $\sigma_1>\sigma_0$,

$$|D_p^{(n)}F(\sigma_1)|=\frac{p!}{2\pi}\left|\oint_{L(\sigma_1,\gamma)}\frac{F^{(n)}(s)\,de^s}{(e^s-e^{\sigma_1})^{p+1}}\right|\leq k^{-p}p!\,n!/(\pi-\gamma)^n\gamma^p. \tag{27}$$

Il est aussi clair que pour $\sigma<\alpha$, avec $\alpha<-\pi$, on a

$$|D_p^{(n)}F(s)|=\frac{p!}{2\pi}\left|\oint_{|e^\xi-e^s|=e^{-\pi}-e^\sigma}\frac{F^{(n)}(\xi)\,de^\xi}{(e^\xi-e^s)^{p+1}}\right|\leq L^p p!\,n!/\pi^n, \tag{28}$$

où $L=(e^{-\pi}-e^\alpha)^{-1}$.

En posant, dans (27), $\gamma=p\pi/(n+p)$, on a, pour $\sigma>\sigma_0$,

$$|D_p^{(n)}F(\sigma)|\leq k^{-p}n!\,p!\,(n+p)^{n+p}/p^p n^n\pi^{n+p}\leq C^p n!\,(n+p)^p/\pi^n,$$

où $C=C(\sigma_0)$. Si, par conséquent, on choisit $\sigma_0<\alpha$, on a, pour *tout* σ,

$$\begin{cases}|D_p^{(n)}F(s)|\leq A^p n!\,n^p/\pi^n & \text{si } n\geq p,\\ |D_p^{(n)}F(s)|\leq A^p n!\,p!/\pi^n & \text{si } p\geq n,\end{cases} \tag{29}$$

où A est une constante. On posera $D_p^{(n)}F(-\infty)=\omega^{(n)}(0)p^n$.

Nous allons maintenant montrer qu'en posant, pour $x\geq 0$,

$$f_1(x)=\sum(-1)^n l_n F^{(2n)}(\sigma),$$

où $\sigma=\log x$, il existe une constante k_1 telle que la fonction $f(x)=f_1(k_1x)$ satisfait aux conditions voulues.

Les inégalités (26) et (29) fournissent, pour $p\geq 0$,

$$|f^{(p)}(x)|\leq\sum l_n|D_p^{(2n)}F(\sigma)|\leq RA^p\sum_{n=0}^{\infty}\left((2n)^p+p!\right)n^{\frac{1}{2}}e^{-N_1(2n/\pi}. \tag{30}$$

Posons enfin $N(e^\sigma)=B(e^\sigma)$ et $N_1(r)-\varepsilon B(r)=A(\varepsilon,r)$.

Comme $\lim \mathrm{N}(e^{\sigma})/\sigma = \infty$, les séries (30) convergent, et l'on peut écrire

$$|f_1^{(p)}(x)| \leq \mathrm{R}_1 \mathrm{A}^p p! + \mathrm{R}\mathrm{A}^p \max_{n \geq 1} \left(e^{-\mathrm{A}(\varepsilon, 2n/\pi)} (2n)^p \right) \sum n^{\frac{1}{2}} e^{-\varepsilon \mathrm{B}(2n/\pi)},$$

où $\mathrm{R}_1 > 0$ et où ε est arbitraire tel que $0 < \varepsilon < \log 2$.

On peut donc écrire, pour $p \geq 1$,

$$|f_1^{(p)}(x)| \leq \mathrm{B}^p (p! + e^{\max(p\sigma - \mathrm{A}(\varepsilon, e^{\sigma}))}) = \mathrm{B}^p (p! + \mathrm{M}_p),$$

où B est une constante et où $\log \mathrm{M}_p = \max_{\sigma \geq 0} \left(p\sigma - \mathrm{A}(\varepsilon, e^{\sigma}) \right)$.

Comme $\mathrm{N}(q) \leq q$ (les q_n étant des entiers positifs strictement croissants), c'est-à-dire $\mathrm{N}(e^{\sigma}) \leq e^{\sigma}$, on a

$$\log \mathrm{M}_p \geq \max_{\sigma \geq 0} (p\sigma - \mathrm{P}e^{\sigma}) \geq \log p! + p\mathrm{S},$$

où S et P sont des constantes. On a ainsi

$$|f_1^{(p)}(x)| \leq g^n \mathrm{M}_p \qquad (p \geq 1, x \in \mathrm{I}),$$

où g est une constante. Posons $f(x) = f_1(k_1 x)$ $(k_1 = 1/g)$.

Comme $\mathrm{A}(\varepsilon, e^{\sigma})$ est une fonction convexe de σ, en posant

$$\mathrm{A}(u) = \max_{\sigma \geq 0} \left(u\sigma - \mathrm{A}(\varepsilon, e^{\sigma}) \right),$$

on a, d'après ce qu'on a vu au début de ce chapitre,

$$\mathrm{A}(\varepsilon, e^{\sigma}) = \max_{u} \left(u\sigma - \mathrm{A}(u) \right) = u(\sigma)\sigma - \mathrm{A}\left(u(\sigma)\right),$$

avec $\lim_{\sigma = \infty} u(\sigma) = \infty$.

Comme $\mathrm{A}(u)$ est une fonction croissante, et comme $\mathrm{A}(p) = \log \mathrm{M}_p$ on a, en désignant par p le plus petit entier supérieur à $u(\sigma)$, et en posant $m_p = \overline{\text{borne}}\, |f^{(p)}(x)|$ $(x \in \mathrm{I})$ (pour σ suffisamment grand)

$$\begin{aligned} \mathrm{A}(\varepsilon, e^{\sigma}) &\leq p\sigma - \mathrm{A}(p-1) = p\sigma - \log \mathrm{M}_{p-1} \\ &\leq \sigma + (p-1)\sigma - \log m_{p-1} \leq \sigma + \overline{\underset{n \geq 1}{\text{borne}}} (n\sigma - \log m_n) = \sigma + \mathrm{C}_f(\sigma). \end{aligned}$$

On a, par conséquent,

$$\mathrm{C}_f(\sigma) > \mathrm{A}(\varepsilon, e^{\sigma}) - \sigma.$$

Mais comme $\lim_{\sigma = \infty} \mathrm{N}(e^{\sigma})/\sigma = \infty$, on a bien $\mathrm{C}_f(\sigma) > \mathrm{A}(\varepsilon/2, e^{\sigma})$, ce qui constitue l'inégalité de l'énoncé si ε est choisi de sorte que $\log 2 - \varepsilon/2 = \mathrm{C}$.

Il reste à démontrer que $f^{(n)}(0) = 0$ et que $f(x) \not\equiv 0$ pour voir que $f(x)$ est bien la fonction cherchée.

Supposons alors que

$$\omega(z)=\Sigma a_n z^n \left(\overline{\lim}\,|a_n|^{\frac{1}{n}}=1\right),$$

et soit $F_1(s)=\Sigma|a_n|e^{ns}$. On voit immédiatement que pour $\sigma\leq a<-\pi$ on a

$$|F_1^{(n)}(s)|\leq M n!/\pi^n,$$

où M est une constante [on opère sur $F_1(s)$ comme on l'a fait sur $F(s)$]. On peut donc, par conséquent, écrire pour $\sigma\leq a$

$$|F_1^{(2n)}(\sigma)|=\Sigma|a_p|p^{2n}e^{p\sigma}\leq M(2n)!/\pi^{2n},$$

et l'inégalité (26) prouve encore que la série double

$$\sum l_n F_1^{(2n)}(\sigma)=\sum_n l_n\sum_p|a_p|p^{2n}e^{p\sigma}$$

converge.

On peut donc écrire, pour $x\leq e^a$ $(\sigma\leq a)$,

$$f(x)=\sum_n(-1)^n l_n\sum_p a_p p^{2n}e^{p\sigma}=\sum_p a_p e^{p\sigma}\sum_n(-1)^n l_n p^{2n}=\sum a_p M(ip)e^{p\sigma}.$$

Mais $M(i\nu_n)=0$ $(n\geq 1)$ et $M(iq_n)\neq 0$, donc, pour $x\leq e^a$:

$$f(x)=\Sigma a_{q_n}M(iq_n)e^{q_n\sigma}=\Sigma a_{q_n}M(iq_n)x^{q_n}.$$

Mais on a, rappelons-le, $a_{q_1}=\omega^{(q_1)}(0)/q_1!\neq 0$. Donc $f(x)$ n'est pas identiquement nulle, et le théorème est complètement démontré.

3. Soit, par exemple, $\{\nu_n\}$ une suite d'entiers non négatifs $(\nu_1=0)$, telle que la suite complémentaire q_n satisfasse à la condition $q_n\sim dn\log n$ avec $0<d<2$, on a alors $2N(q)>q/\log q$ (pour q suffisamment grand), et $2N(e^\sigma)>e^\sigma/\sigma$ (pour σ suffisamment grand). Par conséquent, d'après le théorème R, il existe une fonction $f(x)$, indéfiniment dérivable sur I, bornée ainsi que chacune de ses dérivées sur cet intervalle, telle que $C_f(\sigma)>e^\sigma/\sigma$ pour σ suffisamment grand, telle que $f^{(\nu_n)}(0)=0$, avec $D^+(q)<b/\log q$ [$D^+(q)$ est la fonction de densité supérieure de la suite $\{q_n\}$] et pourtant, non identiquement nulle. Ainsi notre remarque de la fin du chapitre dernier est justifiée. Nos théorèmes [F et (Q-A)] ne sont donc pas très profondément perfectibles.

4. La fonction f qui vérifie les conditions du théorème R appartient à la classe $C\{M_n\}$ avec

$$\log M_n=\max_{\sigma>0}(p\sigma-A(\varepsilon,e^\sigma))\leq\max_{\sigma>0}\left(p\sigma-\int_0^\sigma N(e^u)\,du\right).$$

Or, d'après un lemme du Mémoire cité (Mandelbrojt et Mac Lane, lemme VII), on a

$$\int_0^\sigma \mathrm{N}(e^u)\,du = \max_{n\geq 1}\left[n\sigma - \log(q_1 q_2 \dots q_n)\right],$$

et, comme la suite $\{q_n\}$ est croissante, on a aussi

$$\log(q_1 q_2 \dots q_n) = \max_{\sigma\geq 0}\left(n\sigma - \int_0^\sigma \mathrm{N}(e^u)\,du\right).$$

Par conséquent $\mathrm{M}_n \leq q_1 q_2 \dots q_n$ $(n \geq 1)$. La fonction f appartient donc à la classe $\mathrm{C}(q_1 q_2 \dots q_n)$.

Ainsi on a le théorème suivant :

Théorème R'. — *Si la suite d'entiers positifs* $\{q_n\}$, *complémentaire à la suite d'entiers non négatifs* $\{\nu_n\}$ $(\nu_1 = 0)$, *est telle que*, $\lim \log q_n/n = 0$, *il existe une fonction* $f(x)$, *non identiquement nulle sur* $\mathrm{I} \equiv [0, \infty)$, *indéfiniment dérivable et bornée sur* I, *telle que* $f^{(\nu_n)}(0) = 0$ *et appartenant à la classe* $\mathrm{C}\{q_1 q_2 \dots q_n\}$.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME SOIXANTE-TROISIEME.

Pages.

Sur une théorie générale de la réductibilité des équations finies ou différentielles, par M. *Ernest Vessiot* 1

Quelques réflexions à propos de la parataxie, par M. *Bertrand Gambier* 23

Sur le rattachement de certaines questions d'arithmétique à un principe d'extremum, par M. *André Roussel* 45

Sur les propriétés différentielles du premier ordre des surfaces simples de Jordan et quelques applications, par M. *A. Marchaud* 81

Arithmétique des corps abéliens du trosième degré, par M. *Albert Châtelet* 109

Sur l'existence des solutions du problème de représentation conforme de Helmholtz. Cas des arcs sans tangente, par M. *Julien Kravtchenko* 161

Sur les vibrations des fils élastiques et des fils parfaits., par M. *J. Haag* 185

Recherches sur la déformation des surfaces, par M. *Paul Vincensini* 255

Les dérivées des fonctions méromorphes et la théorie des défauts, par M. *Henri Milloux* 289

Sur l'ensemble de puissances d'une loi de probabilité, par M. *W. Dœblin* 317

Sur une inégalité fondamentale, par M. *S. Mandelbrojt* 351

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

124621-47